

Επαληψύ

Εξέταση

Ιουνίου.



1. Nδo $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$|a b| = |a| |b|$$

$$|a b|^2 = [|a| |b|]^2$$

$$(a b)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$$

$$a^2 b^2 = a^2 b^2$$

2. Nδo $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a+b|^2 \leq [|a| + |b|]^2$$

$$(a+b)^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$\cancel{a^2} + 2a b + \cancel{b^2} \leq \cancel{a^2} + 2|a||b| + \cancel{b^2}$$

$$2a b \leq 2|a||b|$$

$$a b \leq |a||b| \quad \text{που ισχύει!}$$

Το " = " αν a, b ορισμένοι $\dot{\iota}$ ($a=0$ ή $b=0$).

3. Ndo $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \right)^n = \left(\sqrt[n]{ab} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{a}^n \sqrt[n]{b}^n = ab$$

$$ab = ab.$$

4. EOTW $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ kon

x_1, x_2 pild tul.

Ndo $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ kon $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

5. Έστω $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Νόμο η εξίσωση αυτή μπορεί να
πάρει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$
όπου S το άθροισμα και P το
γινόμενο των ριζών.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$$

$$\frac{\alpha x^2}{\alpha} + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

6. Νόσ ο ν-οσος ορος πος
αριθμητικη προσου αμα

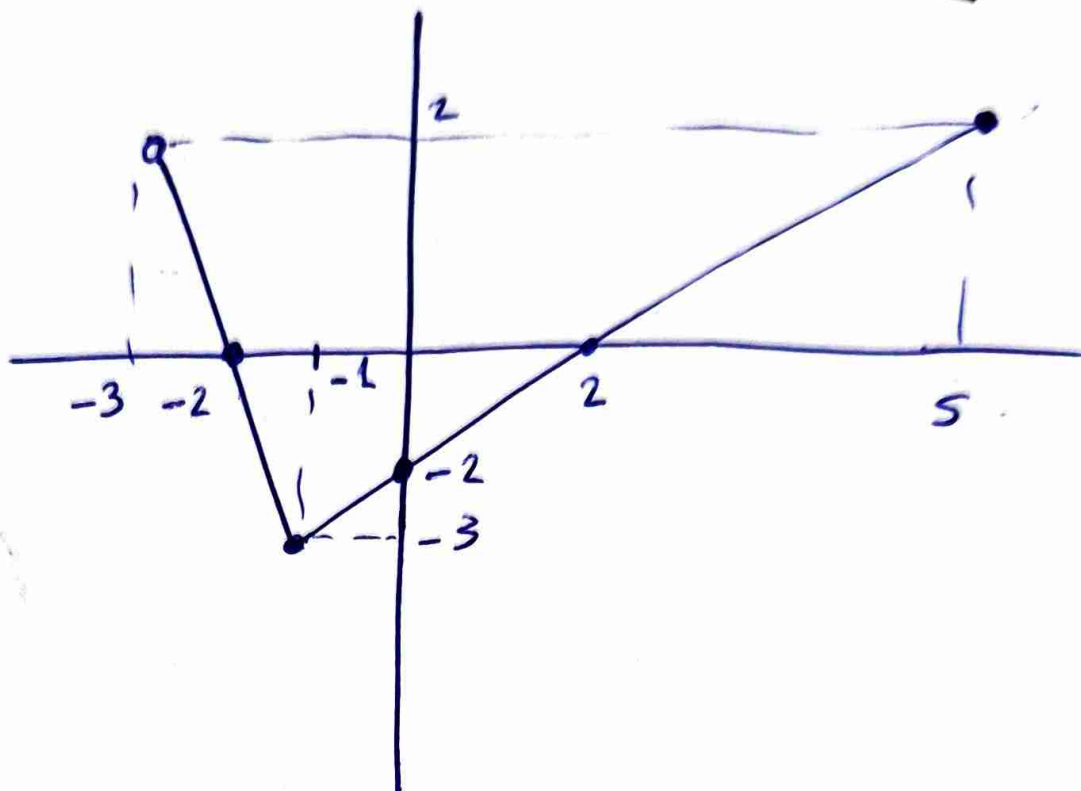
$$a_v = a_1 + w(v-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + w \\ a_3 = a_2 + w \\ \dots \dots \dots \\ a_v = a_{v-1} + w \end{array} \right\} (+)$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + a_3 + \dots + a_v = a_1 + \cancel{a_1 + w} + \cancel{a_2 + w} + \dots + \cancel{a_{v-1} + w}$$

$$\boxed{a_v = a_1 + w(v-1)}$$

Γραφική Παράσταση



1. Πεδίο ορισμού της $f(x)$

$$A_f = [-3, 5]$$

2. Σύνολο Τιμών της $f(x)$

$$\Sigma T_f = [-3, 2]$$

3. Σημεία στροφής με αλγόριθμο.

$$\frac{x'x}{A(-2,0)}$$

$$B(2,0)$$

$$\frac{y'y}{\Gamma(0,-2)}$$

$$\Gamma(0,-2)$$

4. Answer $f(x) \geq 0$

$$x \in (-3, -2] \cup [2, 5]$$

5. $\in$ $\{ \text{ισωση} \}$ $f(x) = 2$

$$x = 5.$$

6. $\in$ $\{ \text{ισωση} \}$ $f(x) = 2026$

το 2026 $\notin \Sigma T_f$ ορα $\cup$

$\in$ $\{ \text{ισωση} \}$ ορα $\cup$ $\in$ $\{ \text{ισωση} \}$

7. $\in$ $\{ \text{ισωση} \}$ $f(x) = x^2 + 3$

το $x^2 + 3 \geq 3$ $\cup$ $\in$ $\{ \text{ισωση} \}$ $f(x) = x^2 + 3$

Αδυνατη.

8. Answer $f(x) + 3 \leq 0$

$$f(x) \leq -3$$

$$x = -1$$

Κλ α δ ω τ υ

Εστω $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - \beta x, & x > 1 \end{cases}$

η οποία διέρχεται από τα σημεία,

$A(-1, -3)$ και $B(3, -1)$

1. Να βρεθούν τα α, β .

$$f(-1) = -\alpha - 1 = -3 \Rightarrow -\alpha = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}$$

$$f(3) = 2 - 3\beta = -1 \Rightarrow 3 = 3\beta \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 1}}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}}$$

2. Σημια τοπικά με αλγόριθμο

$$\frac{x'x}{f(x)=0}$$

$$\frac{y'y}{f(y)=2 \cdot 0 - 1}$$

$$\underline{x \leq 1}$$

$$f(x)=0$$

$$\underline{x > 1}$$

$$f(x)=0$$

$$f'(0) = -1$$

$$\Delta [0, -1]$$

$$2x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$2 - x = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

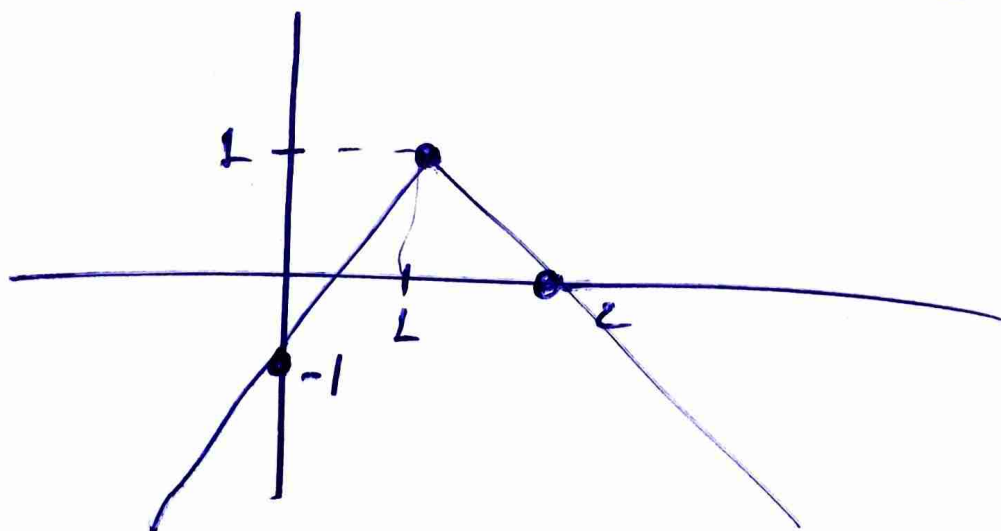
$$\Delta [2, 0]$$

3. Να σχεδιάσουμε την $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

x	0	1
y	-1	1

x	1	2
y	1	0



4. Να λούει η εξίσωση $f(x) - x^2 = 0$

$$\underline{x \leq 1}$$

$$f(x) - x^2 = 0$$

$$2x - 1 - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$
$$\textcircled{x=1} \quad \checkmark$$

$$\underline{x > 1}$$

$$f(x) - x^2 = 0$$

$$2 - x - x^2 = 0$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

~~$\textcircled{-2}$~~

$\textcircled{2}$ $\checkmark$

Επίλυση εξισώσεων

1. $\frac{x-2}{3} - \frac{2x-1}{9} = 1$

$$9 \cdot \frac{x-2}{3} - 9 \cdot \frac{2x-1}{9} = 9 \cdot 1$$

$$3(x-2) - (2x-1) = 9$$

$$3x-6-2x+1=9$$

$$x-5=9$$

$$x=5+9$$

$$x=14$$

2.

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$a=2$$

$$b=-1$$

$$c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

εχω δυο ριζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

①
② $-\frac{1}{2}$

3.

$$|2x-4|=6$$

$$2x-4=6$$

↓

$$2x-4=-6$$

$$2x=6+4$$

$$2x=-6+4$$

$$2x=10$$

$$2x=-2$$

$$x=5$$

$$x=-1$$

4.

$$|2x-2|=|4x-2|$$

$$2x-2=4x-2$$

↓

$$2x-2=-4x+2$$

$$2x-4x=-2+2$$

$$2x+4x=2+2$$

$$-2x=0$$

$$6x=4$$

$$x=0$$

$$x=\frac{4}{6}$$

5.

$$(x-1)^3 = 27$$

$$(x-1)^3 = 3^3$$

$$x-1=3$$

$$x=3+1$$

$$x=4$$

6.

$$(x-2)^4 = 16$$

$$(x-2)^4 = 2^4$$

$$x-2=2$$

$$x=2+2$$

$$x=4$$

or

$$x-2=-2$$

$$x=-2+2$$

$$x=0$$

Ιδιότητες απόλυτων τιμών.

1. $|x| = 0 \quad (\Rightarrow) x = 0 \quad \vee \quad x = -0$

2. $|x| = |y| \quad (\Rightarrow) x = y \quad \vee \quad x = -y$

3. $|a||b| = |ab|$

4. $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$

5. $\overset{\oplus}{|x|} = x \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\ominus}{|x|} = -x$

6. $x^2 = |x|^2$

7. $|-x| = |x|$

8. $|x| \leq 0 \quad (\Rightarrow) -0 \leq x \leq 0 \quad (\Rightarrow) x \in [-0, 0]$

9. $|x| \geq 0 \quad (\Rightarrow) x \geq 0 \quad \vee \quad x \leq -0 \quad \Rightarrow x \in (-\infty, -0] \cup [0, +\infty)$

Ιδιότητες των ριζών

$$1. \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$2. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$3. \sqrt{x} \geq 0 \quad \text{και} \quad x \geq 0$$

$$4. \sqrt{x}^2 = x \quad \text{ενω} \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$5. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

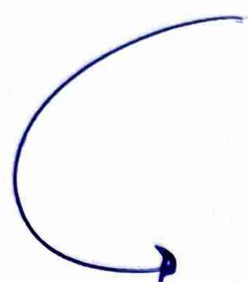
$$6. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$7. \sqrt[n]{a}^n = a$$

Εξίσωση 2ου Βαθμού

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

$$a \neq 0$$


$$\Delta = b^2 - 4a\gamma$$

1. Αν $\Delta > 0$ έχουμε δύο ρίζες $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Αν $\Delta = 0$ έχουμε 1 ρίζα διπλή $x_1 = -\frac{b}{2a}$

3. Αν $\Delta < 0$ είμαστε αδυνατούμε.

Επίλυση Αισωμάτων

1.

$$2x - \frac{3(x-1)}{5} \geq 1 - \frac{1-2x}{10}$$

$$10 \cdot 2x - 10 \cdot \frac{3(x-1)}{5} \geq 10 \cdot 1 - 10 \cdot \frac{1-2x}{10}$$

$$20x - 2 \cdot 3(x-1) \geq 10 - 1 - 2x$$

$$20x - 6(x-1) \geq 10 - 1 - 2x$$

$$20x - 6x + 6 \geq 9 - 2x$$

$$14x + 2x \geq 9 - 6$$

$$16x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{16}$$

2.

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{matrix}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	0	+

$$x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

3.

$$-x^2 + 2x - 1 > 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-1)(-1)$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-2}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = \textcircled{1}$$

x	1
$-x^2 + 2x - 1$	-

Αδυνατά

4.

$$-x^2 + 2x - 1 < 0$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

5.

$$|2x-2| \leq 4$$

α' τροπῶς

$$-4 \leq 2x-2 \leq 4$$

$$2-4 \leq 2x \leq 4+2$$

$$-2 \leq 2x \leq 6$$

$$-1 \leq x \leq 3$$

β' τροπῶς

$$|2x-2|^2 \leq 4^2$$

$$(2x-2)^2 \leq 16$$

$$4x^2 - 8x + 4 \leq 16$$

$$4x^2 - 8x - 12 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

x	-1	3
$x^2 - 2x - 3$	+	+

$$x \in [-1, 3]$$

6.

$$|2x-4| > 2$$

α' τροπῶς

$$|2x-4| > 2$$

$$2x-4 > 2 \quad \text{ή} \quad 2x-4 < -2$$

$$2x > 4+2 \quad 2x < 4-2$$

$$2x > 6 \quad 2x < 2$$

$$x > 3 \quad x < 1$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

β' τροπῶς

$$|2x-4|^2 > 2^2$$

$$(2x-4)^2 > 4$$

$$4x^2 - 16x + 16 > 4$$

$$4x^2 - 16x + 12 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

x	1	3
$x^2 - 4x + 3$	+	+

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

7.

$$|x-1| \leq |2x-3|$$

$$|x-1|^2 \leq |2x-3|^2$$

$$(x-1)^2 \leq (2x-3)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 - 12x + 9$$

$$x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 12x - 9 \leq 0$$

$$-3x^2 + 10x - 8 \leq 0$$

$$\Delta = 100 - 96 = 4$$

$$x = \frac{-10 \pm 2}{-6} < \frac{-8}{-6} = \left(\frac{4}{3}\right)$$

(2)

x	$\frac{4}{3}$ 2	
$-3x^2 + 10x - 8$	-	-

$$x \in (-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, +\infty)$$

Αριθμητική πρόοδος

Δίνονται οι αριθμοί 2, 5, 8, ...

1. Να βρω τον v -οστό όρο.

$$a_v = a_1 + w(v-1)$$

1ος όρος : $a_1 = 2$

Διαφορά : $w = 3$

→ $a_v = 2 + 3(v-1)$

$$a_v = 2 + 3v - 3$$

$$\underline{\underline{a_v = 3v - 1}}$$

2. Βρω τον 35ο όρο της πρόοδου

$$a_{35} = 3 \cdot 35 - 1$$

$$a_{35} = 105 - 1$$

$$\underline{\underline{a_{35} = 104}}$$

3. Ποιοι από τις προόδους είναι ο 2999;

$$a_v = 2999$$

$$3v - 1 = 2999$$

$$3v = 2999 + 1$$

$$3v = 3000$$

$$\underline{\underline{v = 1000}}$$

$$\boxed{a_{1000} = 2999}$$

4. Βρες το άθροισμα των 150 πρώτων όρων.

$$S_v = \frac{v}{2} (2a_1 + w(v-1))$$

$$\boxed{a_1 = 2 \quad w = 3 \quad v = 150}$$

$$S_{150} = \frac{150}{2} (2 \cdot 2 + 3 \cdot (150 - 1))$$

$$S_{150} = 75 (4 + 3 \cdot 149)$$

$$S_{150} = 75 \cdot (4 + 447)$$

$$S_{150} = 75 \cdot 1788$$

$$\boxed{S_{150} = 134100}$$

Συναρτήσεις

1. Να βρω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

α) $f(x) = \frac{x-6}{x^2-3x+2}$

β) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

α) $f(x) = \frac{x-6}{x^2-3x+2}$

πρέπει $x^2-3x+2 \neq 0$

$\rightarrow x^2-3x+2 = 0$

$\Delta = 9-8=1$

$x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

$D_f = \mathbb{R} - \{2, 1\}$

β) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

πρέπει $x^2-1 \geq 0$

$\Delta = 0^2+4=4$

$x = \frac{-0 \pm 2}{2} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

x	-1	1
x^2-1	+	-

$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. Δίνεται $f(x) = x^2 - 4x + 3$

α) Να βρω τα σημεία τομή με τον
αξονά $x'x$ και $y'y$

$$\underline{x'x}$$

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{matrix}$$

$$A(3,0) \quad B(1,0)$$

$$\underline{y'y}$$

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3$$

$$f(0) = 3$$

$$\Gamma(0,3)$$

β) Να βρω τα x ώστε $f(x) < 0$
να βρισκείται κάτω από τον $x'x$

$$f(x) < 0$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

x	1	3
$x^2 - 4x + 3$	+	+
	-	

$$x \in (1,3)$$

⑦ Βρίττει τα κοινά σημεία των $f(x)$ και

$g(x)$ όπου $g(x) = x - 1$

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1$$

$$x^2 - 4x + 3 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow (4) \\ \searrow (1) \end{matrix}$$

$$A(4, 3) \quad B(1, 0)$$

⑧ Βρίττει τα x ώστε η $f(x)$ να είναι

πικύω από την $g(x)$

$$f(x) > g(x)$$

$$x^2 - 4x + 3 > x - 1$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

x	$\frac{1}{4}$		
$x^2 - 5x + 4$	+	-	+

$$x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

α) Na analizie tw napisz

$$A = f(0) - f(1) + \frac{1}{2} f(2)$$

$$\bullet f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\bullet f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\bullet f(2) = 2^2 = 4$$

$$A = -1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$A = -2 + 2 = 0$$

β) Na zobu u εξίσωση $f(x) = x+2$

$$\underline{x \leq 1}$$

$$f(x) = x+2$$

$$2x-1 = x+2$$

$$2x-x = 2+1$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\underline{x > 1}$$

$$f(x) = x+2$$

$$x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=-1}$$

⑦ Σημια τερμ με αλουν $x'x$ και $y'y$

$$\frac{x'x}{f(x)=0}$$

$$f(x)=0$$

$$\frac{y'y}{f(y)=-1}$$

$$f(y)=-1$$

$$\frac{x \leq 1}{f(x)=0}$$

$$f(x)=0$$

$$2x-1=0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\frac{x > 1}{f(x)=0}$$

$$f(x)=0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$A(0, -1)$$

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$

Να βρούμε την κλίση της και να τη σχεδιάσουμε.

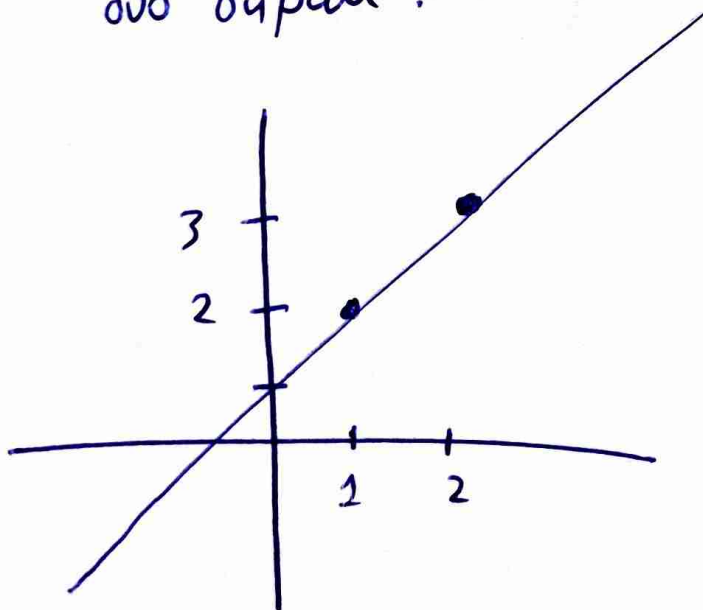
$$\varepsilon: y = x + 1$$

Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης είναι ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται με το x .

$$\varepsilon \text{ δω } \underline{\underline{\lambda_{\varepsilon} = 1}}$$

Για να σχεδιάσω την ευθεία χρειαζόμαστε

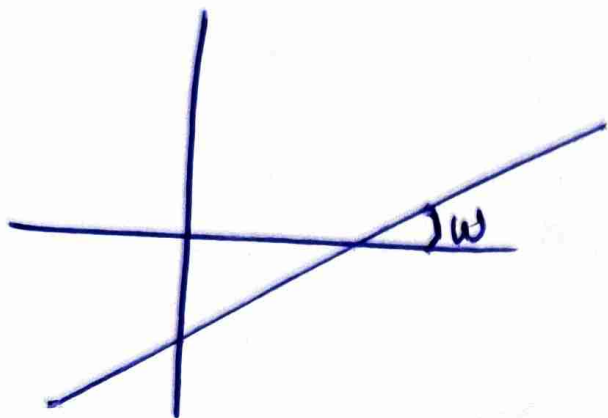
δύο σημεία.



x	1	2
y	2	3

5. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$

Να βρούμε τη γωνία που σχηματίζει
η ευθεία ε με τον $x'x$.



κάθε ευθεία σχηματίζει
με τον άξονα $x'x$
μία γωνία.

$$\varepsilon\varphi \hat{\omega} = \lambda_{\varepsilon}$$

Έστω τώρα

κλίση $\lambda_{\varepsilon} = -1$ από τη γωνία

που σχηματίζει με τον $x'x$ και 135° .

Τυπώλογο

α	30	45	60	120	135	150
$\varepsilon\varphi \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Τις
Αν $\lambda_{\varepsilon} > 0$ οξεία

Αν $\lambda_{\varepsilon} < 0$ αμβλυσ.

6. Να βρω την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,4)$

Εστω $\varepsilon: y = ax + b$ η ευθεία που ψάχνω

$$y = ax + b \begin{cases} \rightarrow A(0,2) & 2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \underline{\underline{b=2}} \\ \rightarrow B(2,4) & 4 = 2a + b \end{cases}$$

$$4 = 2a + 2$$

$$4 - 2 = 2a$$

$$2 = 2a$$

$$\underline{\underline{a=1}}$$

$$\varepsilon: y = x + 2$$

Βασικό

Όταν για ευθεία διέρχεται από ένα σημείο οι συντεταγμένες του σημείου την εξισώσουν

7. Να βρω την κλίση της ευθείας
η οποία διέρχεται από τα σημεία
 $A(2,4)$ και $B(6,2)$ και στη συνέχεια
να βρω την ευθεία AB .

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 4}{6 - 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_{AB} = -\frac{1}{2}$$

$$\Sigma \circ y = \alpha x + \beta$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \beta \longrightarrow A(2,4)$$

$$4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \beta$$

$$4 = -1 + \beta$$

$$\underline{\underline{5 = \beta}}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

8. Να βρεθεί η ευθεία ε_1 η οποία είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y = 2x - 4$ και τερνι των $x'x$ σε σημείο με τετμήριων 5.

$$\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$$

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} = 2$$

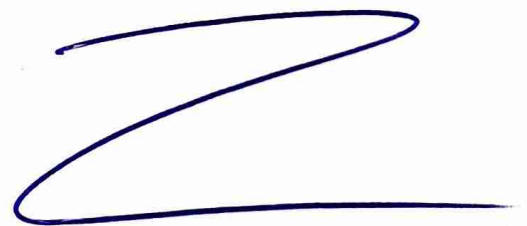
$$y = 2x + \beta \rightarrow A(5, 0)$$

$$0 = 2 \cdot 5 + \beta$$

$$0 = 10 + \beta$$

$$\underline{\underline{\beta = -10}}$$

$$\varepsilon_1: y = 2x - 10$$



Tip

κάθε σημείο του $x'x$ είναι $(x, 0)$

κάθε σημείο του $y'y$ είναι $(0, y)$.

9. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x < 4 \\ bx-3, & x \geq 4 \end{cases}$ τυ

ορισμένη η γραμμική παράσταση διότι έχει

ορισμένα τα $A(4, -1)$ και $B(-1, 4)$

Να βρούμε τα a, b και να σχεδιάσουμε την $f(x)$.

Γνωρίζουμε ότι $f(4) = -1$ άρα $f(4) = 4b - 3 = -1$
 $4b = 3 - 1$

Γνωρίζουμε ότι $f(-1) = 4$

$4b = 2$

$b = \frac{1}{2}$

$f(-1) = -a + 3 = 4$

$-a = 4 - 3$

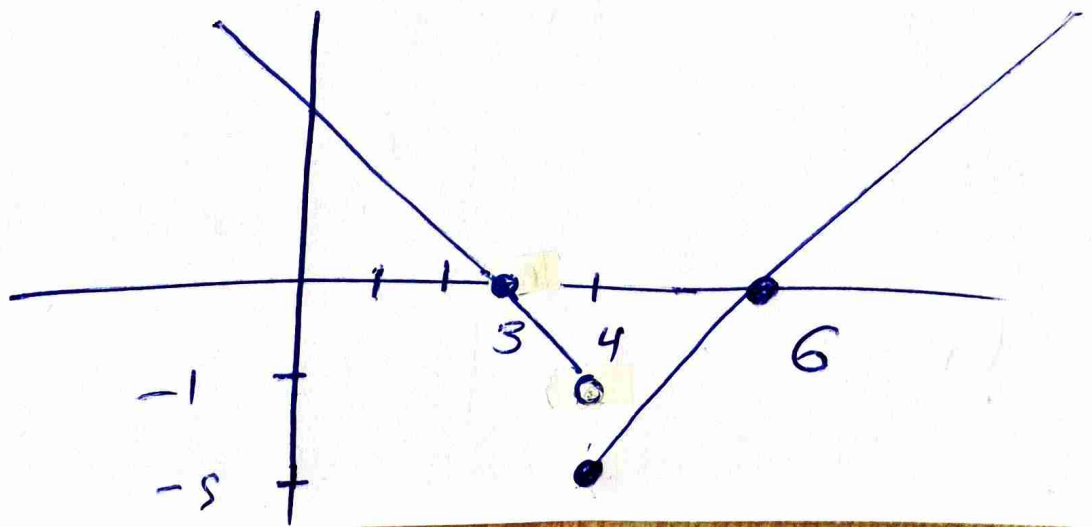
$\Rightarrow -a = 1$

$\Rightarrow a = -1$

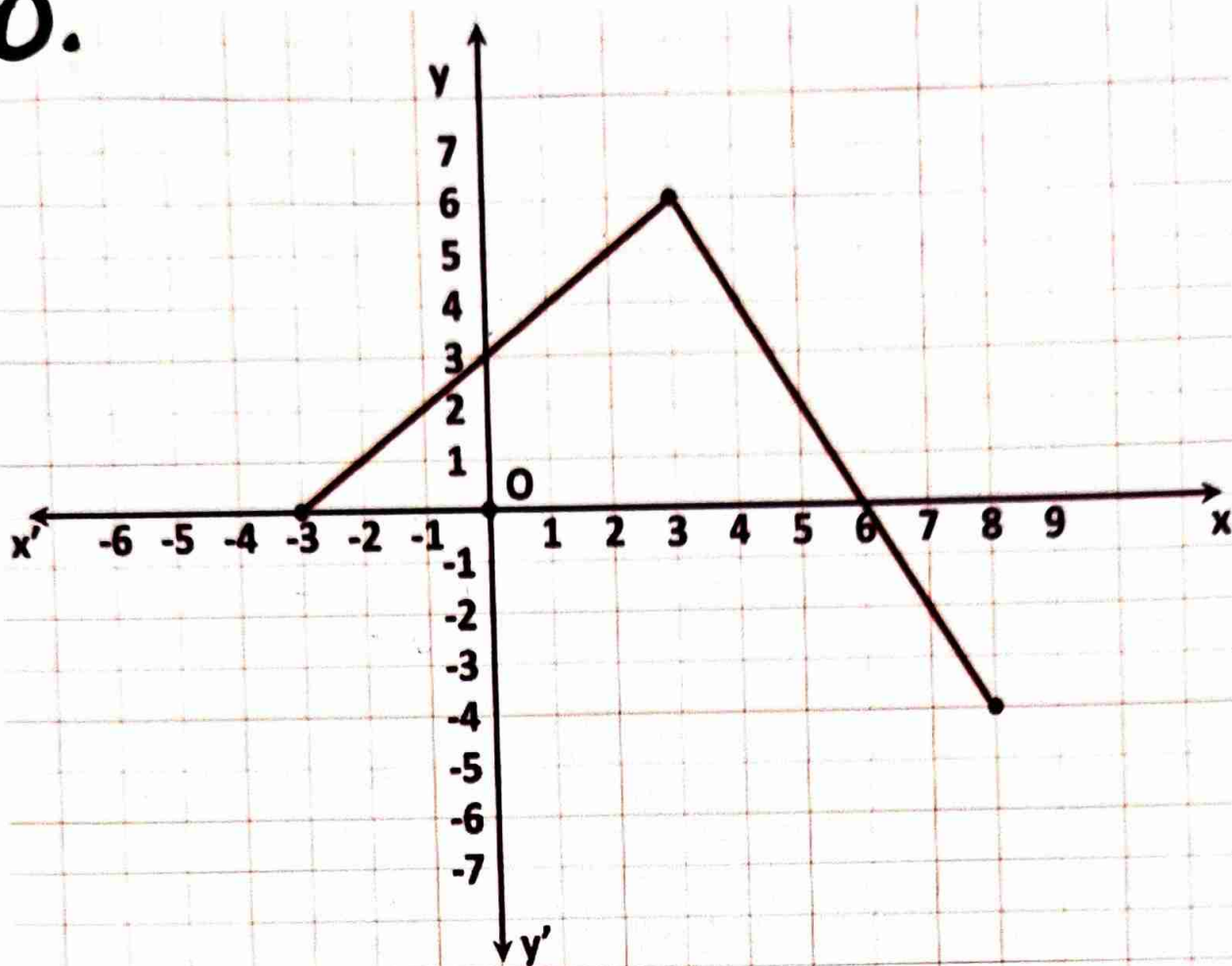
$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 4 \\ \frac{1}{2}x-3, & x \geq 4 \end{cases}$$

x	4	3
y	-1	0

x	4	6
y	-3	0



10.



- α) Να βρείς το πεδίο ορισμού.
- β) Να βρείς το σύνολο τιμών.
- γ) Να βρείς τις σιμια τομή με ως αζουα.
- δ) Βρείς τα $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(7)$
- ε) Να λουα τιν εξίσων $f(x)=2$
 i) $f(x)=2$ ii) $f(x)=4$ iii) $f(x)=6$ iv) $f(x)=8$
- ς) Να λουα τιν ανίσων
 i) $f(x) < 0$ ii) $4 \leq f(x) < 6$.

$$\textcircled{a} \quad A_f = [-3, 8]$$

$$\textcircled{b} \quad \Sigma T_f = [-4, 6]$$

$$\textcircled{1} \quad \underline{x'x}$$

$$A(-3, 0)$$

$$B(6, 0)$$

$$\underline{y'y}$$

$$\Gamma(0, 3)$$

$$\textcircled{8} \quad f(-2) = 1 \quad f(1) = 4 \quad f(2) = 5 \quad f(4) = 4$$

$$f(7) = -2$$

$$\textcircled{E} \quad \text{i) } f(x) = 2$$

($\Rightarrow$)

$$x = -1$$

$$x = 5$$

$$\text{ii) } f(x) = 4$$

($\Rightarrow$)

$$x = 1$$

$$x = 4$$

$$\text{iii) } f(x) = 6$$

($\Rightarrow$)

$$x = 3$$

$$\text{iv) } f(x) = 8$$

αδωαζη.

$$\textcircled{D} \quad \text{i) } f(x) < 0$$

$$x \in (6, 8]$$

$$\text{ii) } 4 \leq f(x) < 6$$

$$x \in [1, 3) \cup (3, 4].$$

Ενα σημαντικό Ινστιτούτο

Λειτουργεί για τα

Δ' Θέματα της

Τραπέζας είναι οι

Παραμετρικά Εξισώσεις

2α Βαθμίου.

A

Δίνεται η εξίσωση του Βαθμίου.

$$(\lambda - 3)x^2 - \lambda x - 1 = 0, \lambda \neq 3$$

$$\boxed{\alpha = \lambda - 3 \quad \beta = -\lambda \quad \gamma = -1}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4(\lambda - 3)(-1)$$

$$\Delta = \lambda^2 + 4(\lambda - 3)$$

$$\Delta = \lambda^2 + 4\lambda - 12.$$

$$\Delta^* = 16 + 4 \cdot 12 = 64$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow (2) \\ \searrow (-6) \end{matrix}$$

λ	$-6 \quad 2$		
$\lambda^2 + 4\lambda - 12$	+	-	+

1. Να βρω τα λ ώστε να έχω
δύο πραγματικά και ανίσυμ ρίζες.

$$\text{Αναιτω } \Delta > 0 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$$

2. Να βρω τα λ ώστε να έχω
διπλή ρίζα, των οποίων και να βρω

$$\text{Αναιτω } \Delta = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \text{ ή } \lambda = 2$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\lambda}{2(\lambda-3)} = \frac{\lambda}{2(\lambda-3)}$$

$$\text{Αν } \lambda = -6 \text{ τότε } x = \frac{-6}{2(-6-3)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Αν } \lambda = 2 \text{ τότε } x = \frac{2}{2(2-3)} = -1$$

3. Να βρω τα λ ώστε η εξίσωση
να είναι ασυμμετρη

$$\text{Αναιτω } \Delta < 0 \Rightarrow \lambda \in (-6, 2).$$

4. Να βρω το λ ώστε να έχω
πραγματική ρίζα

Απάντω $\Delta \geq 0$ από $\lambda \in (-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$

5. Να βρω τα λ ώστε το τριώνυμο
να είναι θετικό

Απάντω $\Delta < 0$ ή $\Delta = 0$ και $\lambda - 3 > 0$
 $\lambda > 3$
 $\lambda \in (-6, 2)$

~~$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι θετικό~~
ποτέ

6. Να βρω τα ω τέτοια ώστε
να είναι αρνητικό

Αντίθετο $\Delta < 0$ και $\lambda - 3 < 0$

$$\lambda \in (-6, 2) \quad \text{και} \quad \lambda < 3$$

$$\text{αρα} \quad \lambda \in (-6, 2)$$

7. Να βρω τα λ ώστε να
έχει ετερογενή ρίζα

$$P < 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\frac{\delta}{\alpha} < 0$$

$$\lambda \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$$

$$\frac{-1}{\lambda - 3} < 0$$

$$\lambda - 3 < 0$$

$$\lambda < 3$$

$$\lambda \in (-\infty, -6) \cup (2, 3)$$

Το SOS συνα

εδω παρα ειναι

οτι γεννιωνται

Δ' Θεματα με

τον εχης τροπο.

Να αποδειχθει οτι η

$f(x) = (\lambda - 3)x^2$ τετρα των $g(x) = \lambda x + 1$

σε δυο ακριβως συνα.

$$\forall \lambda \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$$

Εν σιμαντακο

Σητουμεα κωριωδ γω

Β' Σερατα εικα

οι κωινα Γουα

ΑΝΙΩΩΩΩΩ.

A

На Вреџар ои кoиџа џоџа
оџоџоџа.

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 < 0 \\ |2x - 1| \geq 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 1 < 0$$

x	$\frac{1}{2}$	1
$2x^2 - x - 1$	+	-

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$|2x - 1| \geq 1$$

$$2x - 1 \geq 1 \quad \vee \quad 2x - 1 \leq -1$$

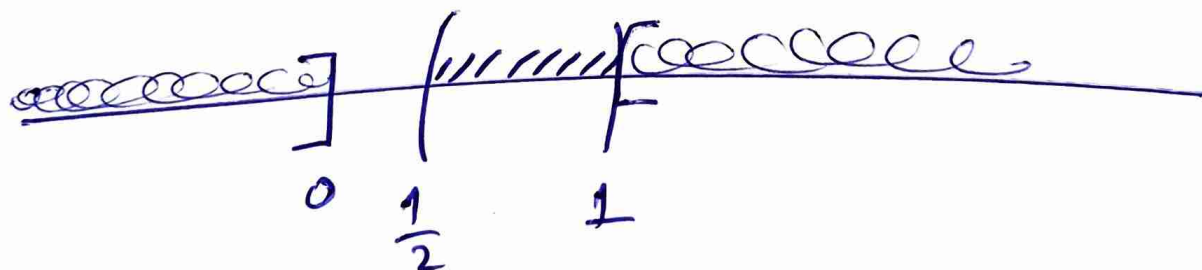
$$2x \geq 2$$

$$2x \leq 0$$

$$\underline{\underline{x \geq 1}}$$

$$\underline{\underline{x \leq 0}}$$

$$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$



Џа џаџаџа кoиџа

џоџа

Τύποι Vieta

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\textcircled{a} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$\textcircled{b} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow x_1 x_2 = -1$$

$$\textcircled{c} \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2^2 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$$

$$\textcircled{d} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{2}{-1} = -2 \quad x_1^2 + x_2^2 = 6$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\textcircled{f} \quad x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -1 \cdot 2 = -2$$

$$\textcircled{g} \quad (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \\ = 6 - 2(-1) = 8.$$

Τύπος

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 0$ (1)

(α) Να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες -2 και 4

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = -2 + 4 = 2$$

$$P = -2 \cdot 4 = -8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

(β) Να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ όπου

x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1)

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x^2 - (-2x) - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + 2x - 1 = 0}}$$

3. Έστω η εξίσωση $x^2 - 3\lambda x + \lambda^2 = 0$

α) Να εχουμε πραγματικη ριζη

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = (-3\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda^2$$

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 = 5\lambda^2$$

$$\Delta = 5\lambda^2 \geq 0$$

β) Να βρωμε τα λ ωστε να ισχυει

i) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -6$

Παρατηρει $\lambda \neq 0$ ωστε $\Delta > 0$ και $x_1 \neq x_2$

$$\boxed{x_1 + x_2 = 3\lambda}$$

$$\boxed{x_1 x_2 = \lambda^2}$$

Αρα $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -6$

$$\lambda^2 (3\lambda) = -6$$

$$3\lambda^3 = -6$$

$$\lambda^3 = -2$$

$$\lambda = -\sqrt[3]{2}$$

$$11). \quad x_1 x_2 - |x_1 + x_2| = 4$$

$$\lambda^2 - |3\lambda| = 4$$

$$\lambda^2 - 3|\lambda| - 4 = 0$$

$$|\lambda|^2 - 3|\lambda| - 4 = 0$$

$$|\lambda| = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t = 4$$

$$t = -1$$

$$|\lambda| = 4$$

$$|\lambda| = -1$$

$$\lambda = 4 \quad \vee \quad \lambda = -4$$

Answer

Γεωμετρική Προοδος

Δίνεται γεωμετρική προοδος

-5, 10, -20, ...

1. Να βρούμε τον ν-οστό όρο

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

$$\boxed{\alpha_1 = -5}$$

$$\boxed{\lambda = -2}$$

$$\alpha_v = -5 \cdot (-2)^{v-1}$$

2. Βρούμε τον α_{13}

$$\alpha_{13} = -5 \cdot (-2)^{13-1}$$

$$\alpha_{13} = -5 \cdot (-2)^{12}$$

$$\alpha_{13} = -5 \cdot 4096$$

$$\alpha_{13} = -20.480$$

3. Ποιος όρος της προόδου είναι το 160;

$$a_v = 160$$

$$-5 \cdot (-2)^{v-1} = 160$$

$$(-2)^{v-1} = \frac{160}{-5}$$

$$(-2)^{v-1} = -32$$

$$(-2)^{v-1} = (-2)^5$$

$$v-1 = 5$$

$$\underline{\underline{v=6}}$$

4. Βρε το άθροισμα των πρώτων 8 όρων

$$S_v = a_1 \cdot \frac{2^v - 1}{2 - 1}$$

$$S_8 = (-5) \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{-2 - 1} = -5 \cdot \frac{256 - 1}{-3}$$

$$S_8 = -5 \cdot \frac{255}{-3} = 5 \cdot 85$$

$$S_8 = 425.$$

SOS

εφαρμογές

1. $\text{Av } d(3x, -1) < 2$ να αντιστοιχιστεί

$$B = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{9x^2 - 1}{\sqrt{1 - 6x + 9x^2}}$$

$$d(3x, -1) < 2$$

$$|3x - (-1)| < 2$$

$$|3x + 1| < 2$$

$$-2 < 3x + 1 < 2$$

$$-3 < 3x < 1$$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{9x^2-1}{\sqrt{(3x-1)^2}}$$

$$B = \frac{\overset{+}{|x+2|}}{x+2} - \frac{9x^2-1}{\overset{-}{|3x-1|}}$$

$$\bullet -1 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{1 < x+2 < 2+\frac{1}{3}}$$

$$\bullet -1 < x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -3 < 3x < 1$$

$$\boxed{-4 < 3x-1 < 0}$$

$$B = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} - \frac{(\cancel{3x-1})(3x+1)}{-(\cancel{3x-1})}$$

$$B = 1 + 3x + 1$$

$$B = 3x + 2$$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{x^2 - 3|x|}$$

α) Βρες τα x ώστε να ορίζεται η A .

$$\text{Πρέπει } x^2 - 3|x| \neq 0$$

$$|x|^2 - 3|x| \neq 0$$

$$|x|(|x| - 3) \neq 0$$

$$|x| \neq 0$$

και

$$|x| - 3 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$|x| \neq 3$$

$$x \neq 3$$

$$x \neq -3$$

β) Να λύσεις την εξίσωση $|A| = \frac{1}{2}$

$$A = \frac{(|x| - 3)^{\cancel{2}}}{|x|(|x| - 3)} = \frac{|x| - 3}{|x|}$$

$$\text{Αρα } |A| = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ ή } A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{|x|-3}{|x|} = \frac{1}{2} \quad \text{h}$$

$$2|x|-6=|x|$$

$$|x|=6$$

$$(x=6) \quad (x=-6)$$

$$\frac{|x|-3}{|x|} = -\frac{1}{2}$$

$$2|x|-6=-|x|$$

$$3|x|=6$$

$$|x|=2$$

$$(x=2) \quad (x=-2)$$

① Na Zudu u avisiuwa $|A| < \frac{1}{3}$

$$|A| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < A < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{|x|-3}{|x|} < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{|x|-3}{|x|}$$

ku

$$\frac{|x|-3}{|x|} < \frac{1}{3}$$

$$-|x| < 3|x| - 9$$

$$9 < 3|x| + |x|$$

$$9 < 4|x|$$

$$\frac{9}{4} < |x|$$

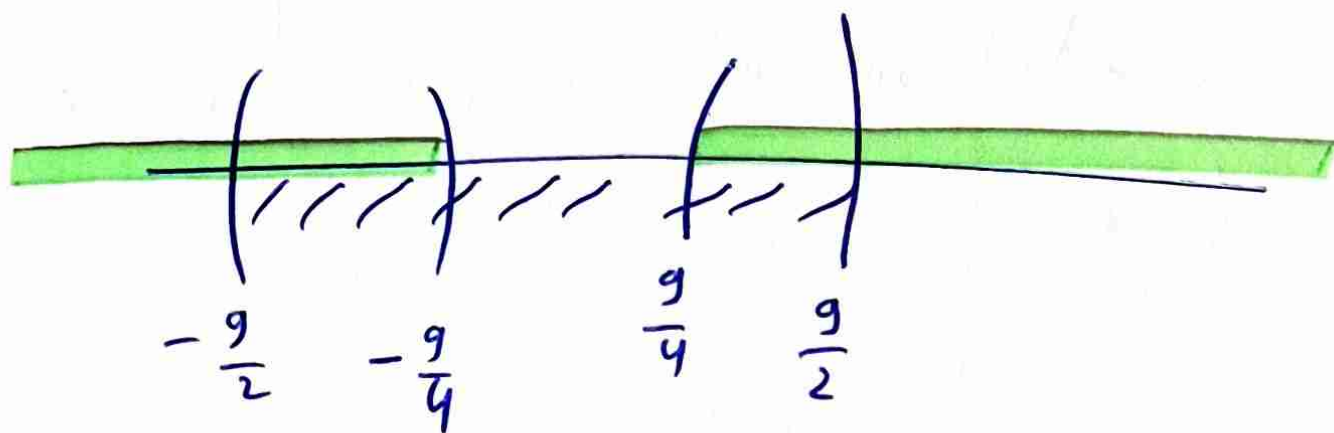
$$x \in (-\infty, -\frac{9}{4}) \cup (\frac{9}{4}, +\infty)$$

$$3|x| - 9 < |x|$$

$$2|x| < 9$$

$$|x| < \frac{9}{2}$$

$$-\frac{9}{2} < x < \frac{9}{2}$$



$$x \in (-\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}) \cup (\frac{9}{4}, \frac{9}{2})$$

3. Να λυθεί η παραίστηκη 1α Βαθμια

$$\lambda^2(\lambda x - 1) = \lambda(x + 1)$$

$$\lambda^3 x - \lambda^2 = \lambda x + \lambda$$

$$\lambda^3 x - \lambda x = \lambda^2 + \lambda$$

$$(\lambda^3 - \lambda) x = \lambda^2 + \lambda$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) x = \lambda(\lambda + 1)$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) x = \lambda(\lambda + 1)$$

1. Αν $\lambda = 0$ $0x = 0$ Αορίστη

2. Αν $\lambda = 1$ $0x = 2$ Αδυνατεί

3. Αν $\lambda = -1$ $0x = 0$ αορίστη

4. Αν $\lambda \neq 0, 1, -1$

$$x = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)}$$

$$x = \frac{1}{\lambda - 1}$$

4. На луду и сѣлову

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x^2+x}$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq -1$$

Екн $x(x+1)$

$$\cancel{x(x+1)} \frac{x-1}{\cancel{x}} - \cancel{x(x+1)} \cdot \frac{2}{\cancel{x+1}} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

$$(x+1)(x-1) - 2x = x+3$$

$$x^2 - 1 - 2x = x+3$$

$$x^2 - 2x - x - 4 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$\cancel{x = -1}$$