

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad x \neq 0$$

SOS

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x \cdot (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

f ↓

$$f''(x) = - \frac{(e^x)'(e^x - 1)^2 - e^x[(e^x - 1)^2]'}{(e^x - 1)^4}$$

$$f''(x) = - \frac{e^x(e^x - 1)^2 - e^x \cdot 2(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4}$$

$$f''(x) = - \frac{e^x(e^x - 1) - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^3} = - \frac{e^{2x} - e^x - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{+e^{2x} + e^x}{(e^x - 1)^3}$$

x	0
f''	- / +
f	↗ / ↘

$$\Sigma T_f =$$

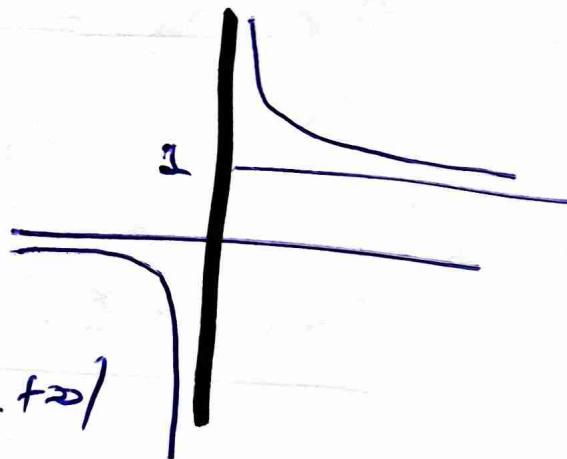
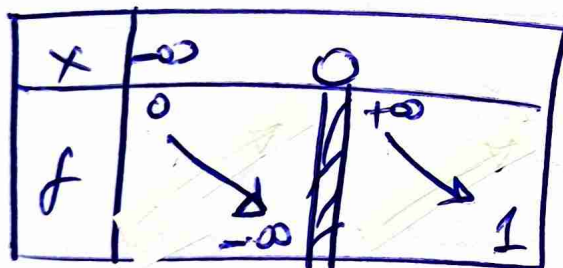
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\bullet x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$



$$\Sigma T_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$\varepsilon_1 \ni x=0$ κατακόρυφη γραμμή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\varepsilon_2 \ni y=0$ οριζόντια $-\infty$ γραμμή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\varepsilon_3 \ni y=1$ οριζόντια $+\infty$ γραμμή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$(-\infty, \infty) \quad h(x) = \ln(x-1), \quad x > 1$$

$$\bullet (h \circ f) = h(f(x)) = \ln\left(\frac{e^x}{e^{x-1}} - 1\right) = \ln \frac{e^x - e^{x+1}}{e^x - 1}$$

$$x \in D_f \quad \text{or} \quad h(x) \in D_h = \ln \frac{1}{e^{x-1}} = -\ln(e^{x-1})$$

$$x \neq 0 \quad \frac{e^x}{e^{x-1}} > 1 \quad \Rightarrow \frac{e^x}{e^{x-1}} - 1 > 0$$

$$D_{h \circ f} = (0, \infty)$$

$$\frac{e^x}{e^{x-1}} - \frac{e^{x-1}}{e^{x-1}} > 0$$

$$\frac{1}{e^{x-1}} > 0$$

$$e^{x-1} > 0$$

$$e^x > 1$$

$$\bullet (f \circ h) = f(h(x)) = \frac{e^{\ln(x-1)}}{e^{\ln(x-1)} - 1} = \frac{x-1}{x-2} \quad \underline{\underline{x > 2}}$$

$$x \in D_h \quad \text{or} \quad h(x) \in D_f$$

$$x > 2$$

$$\ln(x-1) \neq 0$$

$$x-1 \neq 1$$

$$x \neq 2$$

$$x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$$

Αφού $f(x)$ είναι γν. φθίνουσα είναι

1-1 άρα αντιστρέφεται

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) = y$$

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$y(e^x - 1) = e^x$$

$$ye^x - y = e^x$$

$$ye^x - e^x = y$$

$$e^x(y - 1) = y$$

$$e^x = \frac{y}{y - 1}$$

$$x = \ln \frac{y}{y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{x - 1}$$

Проборы

$$e^x(e^x - 2) = e^{2x} - 2e^x$$

$$(e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x}$$

$$[(e^x - 1)^2]' = 2(e^x - 1) \cdot e^x$$

Δίνεται $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x$ SOS
 $x \in \mathbb{R}$.

Να βρούμε η ελάχιστη τιμή του α
 ώστε η f να είναι κυρτή!

$$f'(x) = \frac{\alpha}{4} 4x^3 + 3x^2 + \frac{2x}{2} + 1$$

$$f'(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$f''(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$$

Απαιτώ $f''(x) \geq 0$ ώστε η f κυρτή.

Για να είναι μια τριωνύμια Θετικό
 πρέπει $\Delta \leq 0$ και $\alpha \geq 0$
 αν $\alpha x^2 + Bx + \gamma$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3\alpha = 36 - 12\alpha = 12(3 - \alpha)$$

Απαιτώ $\Delta \leq 0 \Rightarrow 3 - \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 3$

Ελάχιστη τιμή του $\alpha = 3$

Θεωρούμε παραγωγισμένη $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$f(-1) = -4 \text{ και } f(1) = 3 \text{ και } f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}, x \neq 0$$

Να βρούμε τον τύπο της $f(x)$

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(3x + \ln|x| - \frac{2}{x} \right)'$$

27

$$f(x) = \begin{cases} 3x + \ln(-x) - \frac{2}{x} + C_1, & x < 0 \\ 3x + \ln x - \frac{2}{x} + C_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(-1) = -3 + \ln 1 + 2 + C_1 = -4 \Leftrightarrow -1 + C_1 = -4 \Leftrightarrow C_1 = -3$$

$$f(1) = 3 - 2 + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 2$$

Αρα

$$f(x) = \begin{cases} 3x + \ln(-x) - \frac{2}{x} - 3, & x < 0 \\ 3x + \ln x - \frac{2}{x} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
 ότι $(x-1)f'(x) = 2x^2 + 3x - 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, παραγωγισίμη
 και $f(2) = 11$. Να βρω τύπο $f(x)$

Για $x \neq 1$ έχω ότι $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x-1}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x+5)(x-1)}{x-1} \quad \Leftrightarrow f'(x) = 2x+5$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 5x)'$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1, & x < 1 \\ C_2, & x = 1 \\ x^2 + 5x + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(2) = 4 + 10 + C_3 = 11 \quad \Leftrightarrow C_3 = -3$$

Αφού f παραγωγισίμη είναι και συνεχής άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \Leftrightarrow 6 + C_1 = 6 + C_3$$

$$\Leftrightarrow C_1 = C_3 = -3$$

$$\text{Επίσης } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5x - 3) = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2 + 5x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^2 + 5x - 3}$$

Есть $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная в 0

$$f(1) = 5 \text{ и } f(-1) = 2$$

$$\bullet x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1, \quad x \neq 0$$

Вопрос: найти $f(x)$

$$x f'(x) + f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \quad (\Rightarrow) [x f(x)]'$$

$$[x f(x)]' = \left[x^2 - \frac{1}{x} \right]'$$

$$\text{Аналогично } x f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{x} + C_1, & x < 0 \\ x^2 - \frac{1}{x} + C_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}, & x < 0 \\ x - \frac{1}{x^2} + \frac{C_2}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f(-1) &= -2 - C_1 = 2 \\ C_1 &= -4 \\ f(1) &= C_2 = 5 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x}, & x < 0 \\ x - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

1.

Δίνεται $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές
 παραγωγισμένη με συνεχώς δεύτερη παραγωγή

- $f''(x) \neq 0$
- $f(a) = f(b) = 0$
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$
- Η εξίσωση $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) = 0$
 έχει μοναδική ρίζα στο (a, b)

Προεκτάω

- Αφού $f(a) = f(b) = 0$ Rolle $\exists \xi \in (a, b)$
 τέω $f'(\xi) = 0$

- $f''(x) \neq 0$ και συνεχώς,

$$f''(x) > 0 \quad \text{ή} \quad f''(x) < 0$$

Για να δω τι από τα δύο συμβαίνει
 πρέπει να βρω αντιστοίχια για την $f''(x)$
 $\rightarrow$ Το ΘΜΤ δίνει αντιστοίχια,

• $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) = 0$

εχουμε παραδοσικη
πιθανωτα (0, B)

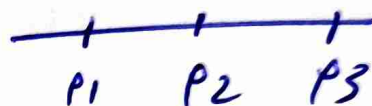
$$f\left(\frac{a+B}{2}\right) > 0$$

x	a	B
f(x)	// + //	// //

και να τρωε εγω οτι η f(x) δεν εχει
και τριτη ριζη.

Εστω οτι υπαρχουν τρεις ριζες της f(x)

$$f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) = 0$$



$f(p_1) = f(p_2)$ Rolle $\exists \xi_1 \in (p_1, p_2)$ τ.ω $f'(\xi_1) = 0$

$f(p_2) = f(p_3)$ Rolle $\exists \xi_2 \in (p_2, p_3)$ τ.ω $f'(\xi_2) = 0$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ Rolle $\exists \zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω $f''(\zeta) = 0$
Απορω!

Αρα εχουμε το πολυ 2 ριζες.

$\equiv$ ερω ηδη δω ριζες τη α, β.

αρα ειναι πως αυτου.

Αρα $\eta \ f(x) > 0$ στο (a, b)

σηλάνη $f(x) \neq 0$ στο (a, b)

Επίσης $f''(x) \neq 0$ στο (a, b)

Για την $f'(x)$ γνωρίζω ότι $f'(\xi) = 0$.
 $\eta \ f'(x)$ μηδενίζεται στο $\xi \in (a, b)$.

Το οποίο είναι και μοναδική
ρίζα της $f'(x)$ για δύο λόγους.

1ος: Η εξίσωση $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) = 0$
έχει μοναδική ρίζα στο (a, b)
έχω ήδη βρει μια ρίζα το ξ
σημαίνει δεν έχει άλλη άρα
 $\eta \ f'(x)$ δεν μπορεί να μηδενίζεται
σε άλλο σημείο.

2ος: Εστω ότι $\eta \ f'(x)$ είχε δύο ρίζες
 p_1, p_2 . Τότε $f'(p_1) = f'(p_2)$

Polle $\exists t \in (p_1, p_2)$

$$\text{T.v. } f''(t) = 0$$

Answer!

App n $f'(x)$ exy to wlu pm
pity.

2.

$$\bullet [f^2(x)]' \neq 0$$

• f дво φορές παρ/μη

Πρόταση

$$(f^2(x))' = 2f(x)f'(x) \neq 0$$

$$f(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0$$

$$f(x) > 0 \quad \text{ή} \quad f(x) < 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{ή} \quad f'(x) < 0$$

$$f \geq 1$$

$$f' \geq 1$$

f συνεχής + παρ/μη

f' συνεχής + παρ/μη

f''

$$3. \quad [f'(x)]^2 > f''(x) f(x) > 0$$

Προέκταση

$$\text{Αφού } f''(x) f(x) > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \text{ και } f(x) \text{ ομοσημα!}$$

$$\text{Αφού } (f'(x))^2 > f''(x) f(x) > 0$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 > 0$$

$$f'(x) \neq 0$$

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη
 με συνεχή δεύτερη παραγώγο και
 $f''(x) \neq 0$.

Νόμο f κοίτη. αν $f'(1) = 0$
 και $f(1) > f(0)$

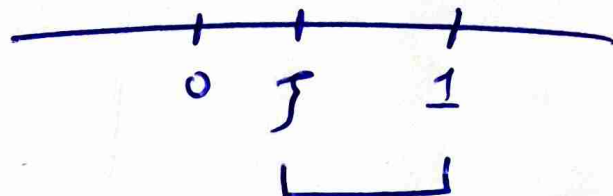
Αφού $f''(x) \neq 0$ και συνεχής τότε

$f''(x) > 0$ ή $f''(x) < 0$

Χρειαζόμαστε αντιστοίχως.

$$f'(1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

$$f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} =$$



$$= \frac{-(f(1) - f(0))}{1 - \xi} = \frac{f(0) - f(1)}{1 - \xi} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

f κοίτη

SOS

1. Επαληψιότητα $\theta \in$ αντιστροφή
2. Επαληψιότητα $\theta \in$ ανωδοτική.