

κριτήριο μονοτονίας

Εστω $f(x)$ συνεχής στο Δ

1. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό x του Δ
τότε η $f(x)$ γνησίως αυξούσα σε όλο το Δ .
2. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό x του Δ
τότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Προσοχή

Το αντίστροφο δεν ισχύει!

1. Αν $f \nearrow$ στο $\Delta \not\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \Delta$
2. Αν $f \searrow$ στο $\Delta \not\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \Delta$.

Προσοχή

Εστω f παραγωγίσιμη στο (a, b) .

1. Αν $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ και η ισότητα επιτυγχάνεται για μεμονωμένα x τότε $f \nearrow$
2. Αν $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ και η ισότητα επιτυγχάνεται για μεμονωμένα x τότε $f \searrow$

Προσοχή

κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση (δηλαδή 1-1) έχει το πολύ μια ριζά.

Τοπικό μέγιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν $\exists \delta > 0$ τ.ω

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 ονομάζεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου ενώ το $f(x_0)$ ονομάζεται τοπικό μέγιστο της f .

Τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο όταν $\exists \delta > 0$ τ.ω $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Το x_0 ονομάζεται θέση ή σημείο τοπικού ελάχιστου ενώ το $f(x_0)$ ονομάζεται τοπικό μέγιστο της $f(x)$.

Ακρότατα

1. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης f ονομάζονται τοπικά ακρότατα ή απλά ακρότατα.
2. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f ονομάζονται ολικά ακρότατα αν και

Προσοχή

1. Αν η $f(x)$ έχει ολικό μέγιστο τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.
2. Αν η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο τότε αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μείγματα
δεν είναι απαραίτητα ολικό μείγμα.

4. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα
δεν είναι απαραίτητα ολικό ελάχιστο.

5. Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι
μεγαλύτερο από ένα τοπικό μείγμα.

Άσκηση 1

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

α) $f(x) = e^x + x^3 + x$ $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.
και δεν έχει ακρότατα.

β) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$. $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$
 $\boxed{x=5} \quad \boxed{x=-1}$

x	-1	5
f'(x)	+	-
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Η $f(x)$ γν. αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[5, +\infty)$

Η $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $[-1, 5]$.

Το $A(-1, 15)$ είναι τοπικό μέγιστο

Το $B(5, -93)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 4 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{x=2} \vee \boxed{x=-2}$$

x	-2	0	2
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$ και $(0, 2]$.

Το $A(-2, -4)$ είναι τοπικό μέγιστο

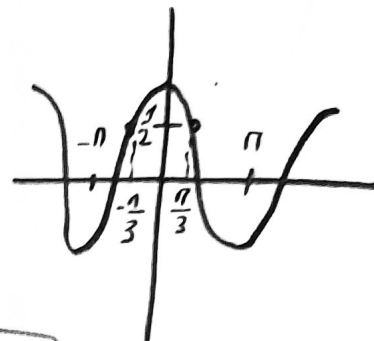
Το $B(2, 4)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

⑧ $f(x) = 2\omega x - x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

$f'(x) = 2\omega x - 1$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\omega x - 1 = 0 \Rightarrow \omega x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$ and $x = -\frac{\pi}{3}$



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Αντιπροσώπων

$f'(\pi) = 2\omega\pi - 1 = -3$

$f'(-\pi) = 2\omega(-\pi) - 1 = -3$

$f'(0) = 2\omega 0 - 1 = 1$

Η $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $[-\pi, -\frac{\pi}{3}]$ και $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

Η $f(x)$ γν. αυξάνουσα στο $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

Το $A(-\pi, -\pi)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Το $B(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Το $\Gamma(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ είναι τοπικό μέγιστο

Το $\Delta(\pi, -\pi)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

$$\textcircled{\epsilon} \quad f(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3) \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2x(2\ln x - 5) + x^2 \cdot \frac{2}{x} - 4(\ln x - 3) - 4x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 4x\ln x - 10x + 2x - 4\ln x + 12 - 4$$

$$f'(x) = 4x\ln x - 4\ln x - 8x + 8$$

$$f'(x) = 4\ln x(x-1) - 8(x-1)$$

$$f'(x) = 4(x-1)(\ln x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-1)(\ln x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} x-1=0 \quad \vee \quad \ln x - 2 = 0 \\ \boxed{x=1} \quad \quad \quad \ln x = 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{x=e^2} \end{array}$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$u(x-1)$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

Η $f(x)$ γν. αύξουσα στο $(0, 1]$ και $[e^2, +\infty)$

Η $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $[1, e^2]$

Το $A(1, -7)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Το $B(e^2, 4e^2 - e^4)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

$$\textcircled{3} \quad f(x) = e^x (x^2 - 4x + 5), \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^x (x^2 - 4x + 5) + e^x (2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x (x^2 - 4x + 5 + 2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x (x^2 - 2x + 1) = e^x (x-1)^2 \geq 0$$

Άρα η $f(x)$ γνησίως/αυξάνει στο $\mathbb{R}$.

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x + \sin x - 5, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 1 - \eta\mu x \geq 0 \quad \text{αρα } f \text{ γν. αυξάνει στο } \mathbb{R}.$$

$$\Gammaνωρίζω ότι $\eta\mu x \leq 1 \Rightarrow 1 - \eta\mu x \geq 0$$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = -2x^2 + 4x - (x-1) \ln x, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = -4x + 4 - \ln x - \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = -4x + 4 - \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -4x - \ln x + \frac{1}{x} + 3.$$

Παρατηρώ ότι $f'(1) = 0$

$$f''(x) = -4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	
$f'(x)$	$\nearrow +$	$\searrow -$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

H $f(x)$ γρ. αυξουσα στο $[0, 1]$

H $f(x)$ γρ. υφισινουσα στο $[1, +\infty)$.

Το $A(1, 2e)$ είναι ολικό μέγιστο.

① $f(x) = 2e^x - x^2 - x$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x - 1.$$

$$f''(x) = 2e^x - 2$$

Λύνω την εξίσωση $f''(x) = 0 \quad (\Rightarrow) 2e^x - 2 = 0$
 $e^x = 1$

$$\boxed{x=0}$$

x	0	
$f''(x)$	- 0 +	
$f'(x)$	$\searrow +$	$\nearrow +$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 1$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 1$$

H $f(x)$ γρ. αυξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν εχη ακροαση.

$$\textcircled{E} \quad f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 7x \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 12x \ln x + \frac{6x^2}{x} - 6x^2 - \frac{7}{2} \cdot 2x + 7$$

$$f'(x) = 12x \ln x + 6x - 6x^2 - 7x + 7$$

$$f'(x) = 12x \ln x - 6x^2 - x + 7$$

$$f''(x) = 12 \ln x + 12 - 12x - 1$$

$$f''(x) = 12 \ln x - 12x + 11$$

$$f'''(x) = \frac{12}{x} - 12 \quad \text{Παρατηρώ ότι } f'''(1) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{12}{x^2} < 0.$$

x	0	1	$+\infty$
f'''	-	-	
f'''	$\swarrow + \circ \searrow$	$\swarrow - \searrow$	
f''	$\swarrow - \searrow$	$\swarrow - \searrow$	
f'	$\swarrow + \circ \searrow$	$\swarrow - \searrow$	
f	$\swarrow \nearrow$	$\swarrow \searrow$	

$$x < 1 \Rightarrow f'''(x) > f'''(1) \Rightarrow f'''(x) > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'''(x) < f'''(1) \Rightarrow f'''(x) < 0.$$

$$x < 1 \Rightarrow f''(x) < f''(1) \Rightarrow f''(x) < -1$$

$$x > 1 \Rightarrow f''(x) < f''(1) \Rightarrow f''(x) < -1$$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Η $f(x)$ είναι γεννησίως αύξουσα στο $(0, 1]$

Η $f(x)$ είναι γεννησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Το $A(1, \frac{3}{2})$ είναι ολικό μέγιστο.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$$

$$D_f = (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2) - \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x-2 - x \ln x}{x(x-2)^2} = \frac{\varphi(x)}{x(x-2)^2}$$

Θεωρούμε $\varphi(x) = x-2 - x \ln x$.

$$\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

Λογιστικά $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	2
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$x(x-2)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$x < 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) < -1$$

$$x > 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) < -1$$

Η $f(x)$ γρ. φθινούσα στο $(0, 2)$ και $(2, +\infty)$

και δεν έχει άκροτατα,

$$(p) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2, & x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

- Εξετάζω αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο 1.
- Δεν με ενδιαφέρει αν η $f(x)$ είναι παραγ/μη στο 1,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 = f(1) \quad \begin{array}{l} \text{Είναι} \\ \text{συνεχής} \\ \text{στο 1.} \end{array}$$

1. Αν $x \in (-\infty, 1)$ η $f_1'(x) = 6x^2 - 6x$
 Άρα $f_1'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 6x^2 - 6x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x(x-1) = 0$
 $\boxed{x=0} \quad \boxed{x=1}$

2. Αν $x \in (1, +\infty)$ η $f_2'(x) = -6x^2 + 18x - 12$

Άρα $f_2'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -6x^2 + 18x - 12 = 0$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{x=2}$$

x	0	1	2
$f_1'(x)$	+	-	+
$f_2'(x)$	+	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Η $f(x)$ γν. αυξουσα στο $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$

Η $f(x)$ γν. φθινουσα στο $[0, 2]$

Το $A(0, f(0))$ Τοπικο Μεγιστο

Το $B(2, f(2))$ Τοπικο Ελαχιστο.

$$\textcircled{v} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 3 \\ e^x(x-3) + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [x^2 - 2x] = 3$$

То опито
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ сечуна постои.

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} [e^x(x-3) + 2] = 2$$

$$x \in (-\infty, 3)$$

$$f_1(x) = x^2 - 2x$$

$$f_1'(x) = 2x - 2$$

$$x = 1$$

$$x \in [3, +\infty)$$

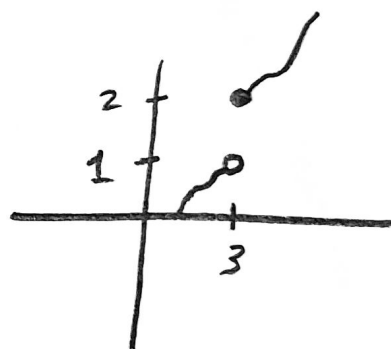
$$f_2(x) = e^x(x-3) + 2$$

$$f_2'(x) = e^x(x-3) + e^x$$

$$f_2'(x) = e^x(x-2)$$

$$x = 2$$

x	1	2	3	
$f_1'(x)$	-	0	+	+
$f_2'(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	+	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗	↗



H $f(x)$ sv. φ divousa $(-\infty, 1]$

H $f(x)$ sv. ω divousa $[1, +\infty)$.

To $A(1, f(1))$ T. E.

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x - x^4, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x} - \ln x \right] = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{To opio} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ den} \\ \text{unapxh.} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2 - x - x^4] = 0$$

$$\underline{x \in (0, 1]}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

$$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

απου $x > 0$

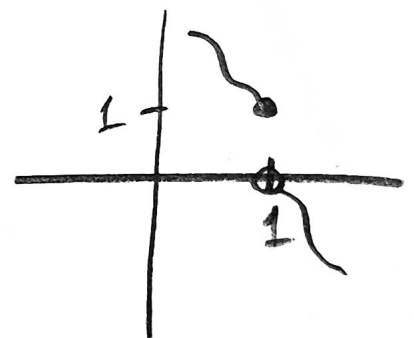
$$\underline{x \in (1, +\infty)}$$

$$f_2(x) = 2 - x - x^4$$

$$f_2'(x) = -1 - 4x^3 < 0$$

απου $x > 0$.

x	0	1
$f_1'(x)$	-	-
$f_2'(x)$	-	-
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	→	→



Η $f(x)$ γν. φθινουσα στο $(0, +\infty)$.

⑥ $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{2x^2}$

Προσν $|x| > 0$ αρα $x \neq 0$ ουνον $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2x^4} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^2-1}{x^3}$$

$$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ η } x=-1.$$

x	-1	0	1
x^2-1	+ 0 -		- 0 +
x^3	-	- 0 +	+
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↗

⑦ $f(x) = x^x, x > 0$

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$\rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	↘	↗	

Ⓐ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 = e^x - x - 1 \geq 0$$

Γνωστή ανώτατη
$e^x \geq x + 1$

$\Rightarrow f \nearrow$

Ⓑ $f(x) = 2x \ln x - x^2$ $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x = 2(\ln x + 1 - x) \leq 0$$

Γνωστή ανώτατη
$\ln x \leq x - 1$

$\Rightarrow f \downarrow$

Ⓒ $f(x) = e^{-x} + \ln x$, $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{x} = \frac{e^x - x}{x e^x} > 0 \quad f \nearrow$$

Επειδή $e^x \geq x + 1 > x \quad (\Rightarrow) \quad e^x > x \quad (\Rightarrow) \quad e^x - x > 0$

Ⓓ $f(x) = -\sigma \varphi x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \eta)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\eta \rho^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \eta \rho^2 x}{x^2 \eta \rho^2 x} > 0 \quad \Rightarrow f \nearrow$$

Γνωστή ανώτατη
$ \eta \rho x \leq x $

Αν $x \neq 0$ τότε $|\eta \rho x| < |x| \quad (\Rightarrow) \quad |\eta \rho x|^2 < |x|^2$
 $(\Rightarrow) \quad \eta \rho^2 x < x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \eta \rho^2 x > 0$

⑤ $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{x^2 + 1} - x = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{x^2 + 1} = x$$

1. Av $x \geq 0$ tot $\sqrt{x^2 + 1}^2 = x^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 + 1 = x^2$

$$1 = 0$$

Adusăm.

2. Av $x < 0$ tot adusăm .

În concluzie $f'(x) \neq 0$ apa $f'(x) > 0$ și $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Enunșu $f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Apa $f \nearrow$.

⑥ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2x$, $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x^{2/3} + 2x$$

$$f'(x) = x - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} + 2 = x - 3\sqrt[3]{x} + 2$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x + 2 - 3\sqrt[3]{x} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x + 2 = 3\sqrt[3]{x}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x^2 + 4x + 4 = 9x \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 1 \text{ și } x = 4$$

x	0	1	4	+
f'(x)	+	0	-	0
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$$\textcircled{\Psi} \quad f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \sigma \omega x \quad D_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + \sigma \omega x$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} - \eta \mu x = \sqrt{x} - \eta \mu x$$

$$\begin{aligned} \text{Av } x > 1 \quad \text{τοτε} \quad \sqrt{x} > 1 > \eta \mu x &\Rightarrow \sqrt{x} > \eta \mu x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x} - \eta \mu x > 0 \\ &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Av } 0 < x \leq 1 \quad \text{τοτε} \quad \sqrt{x} \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{x}^2 \leq \sqrt{x} \quad (\Rightarrow) \quad x \leq \sqrt{x}$$

$$\text{Ενωσω} \quad |\eta \mu x| < x \quad (\Rightarrow) \quad -x < \eta \mu x < x$$

$$\text{Αρα} \quad \eta \mu x < x \leq \sqrt{x} \quad (\Rightarrow) \quad \eta \mu x \leq \sqrt{x}$$

$$(\Rightarrow) \quad \sqrt{x} - \eta \mu x \geq 0 \quad \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

Σε καθε περίπτωση $f \nearrow$

① $f(x) = e^x - x + \ln(x^2 + 1)$ $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Av $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

Ensom av $x > 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} > 0$ og $f'(x) > 0$.

Av $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$

oppsatt av $x < 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} < 0$ og $f'(x) < 0$.

x	0
f'	- 0 +
f	↘ ↗

② $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + \mu x$

$$f'(x) = e^x - x - \mu x$$

• $e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x \geq 1$

• $\mu x \leq 1$

$$\left. \begin{array}{l} e^x - x \geq 1 \\ \mu x \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} e^x - x \geq \mu x \\ e^x - x - \mu x \geq 0 \end{array}$$

$$f'(x) \geq 0$$

↗

$$(W_2) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x(1 - \ln x) - \sqrt{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = x - \ln x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1 \quad (\Rightarrow) \quad x - \ln x \geq 1$$

$$\bullet \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \quad \text{após} \quad x < \sqrt{x^2 + 1} \quad (\Rightarrow) \quad x^2 < x^2 + 1$$

$0 < 1$

$$\text{Após } x - \ln x \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad x - \ln x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$$

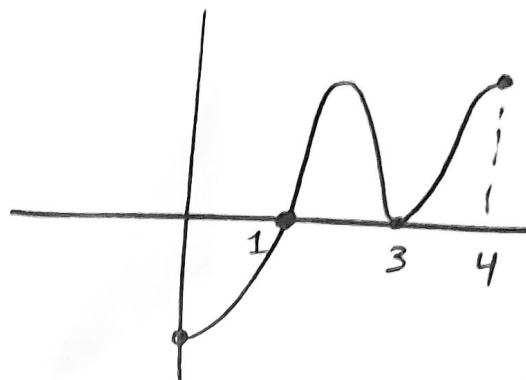
$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow f \nearrow$$

Άσκηση 2

Έστω $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής της οποίας

η γραφική παράσταση της $f'(x)$

δίνεται στο διπλανό σχήμα
να βρεθεί η μονοτονία της.



Παρατηρώ ότι οι λύσεις της

εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι $x=1, x=3$

x	0	1	3	4
f'	-	0	+	+
f	↘	↗	↗	

Η $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$

Η $f(x)$ γν. αυξουσα στο $[1, 4]$

Το $A(1, f(1))$ είναι ελάχιστο.