$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. φυσικοι αριθμος.

$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ Ακεραιοι αριθμι.

$Q = \{ 2, 5, -8, \frac{4}{3}, \boxed{0,32} \}$ ρητοι

Ειναι ολοι οι αριθμοι που μπορουν να γραφουν ωs κλασμα.

Αρρητοι ειναι αυτοι που δεν ειναι ρητοι

π.χ   Το $Π = 3,14$

Προγματικοι αριθμοι που ειναι οι ρητοι και οι αρρητοι $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \{ π, \sqrt{2}, \boxed{0,34}, 5, -8, ... \}$.

Σύμβολα : Όταν λέμε το

$$x \in N$$

εννοούμε ότι το x ανήκει στους
φυσικούς αριθμούς ενώ όταν

λέμε x ∉ N εννοούμε ότι

το x δεν ανήκει στους φυσικούς

Ένα σύνολο μπορώ να το παρουσιάσω με δυο τρόπους.

αναγραφή

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

περιγραφή

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5 \}$$

ή

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 6 \}$$

ή

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 5 \}$$

$A \subseteq B$

↳ Το A είναι υποσύνολο του B.

Αυτο σημαίνει οτι το καθε

στοιχείο του A είναι και

στοιχείο του B.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{-4, 1, 2, 3, 50\}$

Αφου το καθε στοιχείο του A

ανηκει στο B το $A \subseteq B$

Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$
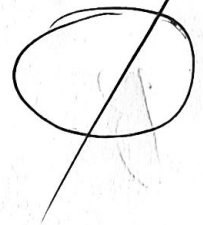
Τοτε $A = B$.

Ιδιότητα

i) $A \subseteq A$

π.χ $A = \{0, 1, 2\}$ και $A = \{0, 1, 2\}$.

ii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$

iii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

Το κενό σύνολο $\emptyset$
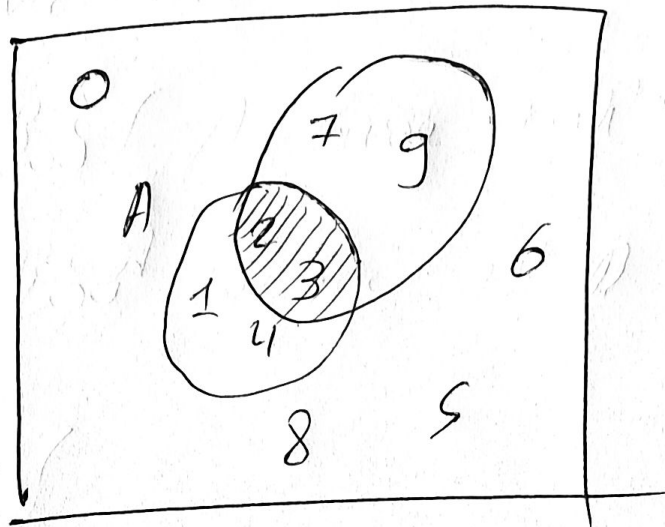
είναι το σύνολο που δεν έχει

τίποτα μέσα.

Τομη δυο συνολων

Εστω ενα μεγαλο συνολο $\underline{O}$

$$A \cap B = \{x \in \underline{O} \;/\; x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

$A \subseteq \underline{O}$

$B \subseteq \underline{O}$

διαγραμμα Venn

π.χ $\underline{O} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$B = \{2, 3, 7, 9\}$.

$A \cap B = \{2, 3\}$.

Ενωση δυο συνολων

Εστω συνολο $\underline{O}$

και $A \subseteq \underline{O}$ και $B \subseteq \underline{O}$

$A \cup B = \{x \in \underline{O} \; / \; x \in A \; \text{ή} \; x \in B\}$.

π.χ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$.

στο
ιδιο
παραδειγμα
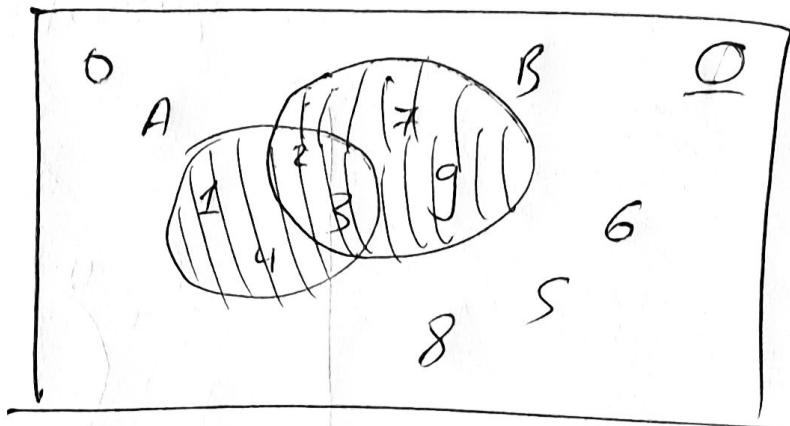
Το συμπλήρωμα του A

Έχω το σύνολο $\underline{\Omega}$

$A \subseteq \underline{\Omega}$

$B \subseteq \underline{\Omega}$

$A' = \{x \in \underline{\Omega} \,/\, x \notin A\}$

δηλαδή στο ίδιο παράδειγμα

$A' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$
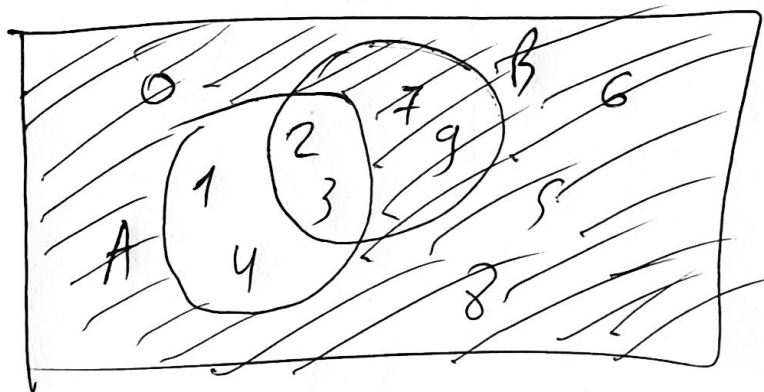
Ασκηση

Εστω $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x\ \text{αρτιος},\ 1 < x < 9\}$

Εστω $B = \{x \in \mathbb{N} / \ (x^2 - 2x)(x^2 + 7x + 12) = 0\}$

(a) Να γραψουν με αναγραφη τα συνολα.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{0, 2\}$

$\longrightarrow$ $(x^2 - 2x)(x^2 + 7x + 12) = 0$

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = 0 \implies \alpha = 0\ \text{ή}\ \beta = 0}$$

$x^2 - 2x = 0$ ή $x^2 + 7x + 12 = 0$

$x \cdot (x - 2) = 0$ $\qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\boxed{x = 0}$, ή $x - 2 = 0$ $\qquad \Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$\boxed{x = 2}$

$x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \boxed{-3} \ \boxed{-4}$

Άρα $\quad$ $A \cap B = \{ \quad 2 \quad \}$ μονοσύνολο

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 0\}$.

$A' = \{-3, -1, 0\}$.

$B' = \{-3, -1, 4, 6, 8\}$.

$(A \cap B)' = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8\}$.

$(A \cup B)' = \{-3, -1\}$.

$A' \cup B' = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8\}$.

$(A \cup B)' \cap B' = \{-3, -1\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{0, 2\}$

$\Omega = \{-3, -1, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

Έστω $\underline{O} = \{ x \in \mathbb{N} / \ 0 \le x < 10 \}$.

και $A = \{ x \in \underline{O} / \ 7 < x \le 14 \}$.

και $B = \{ x \in \underline{O} / \ x \ \text{αρτιος} \}$.

ⓐ. Να βρειτε τα $A, B, \underline{O}$.

ⓑ Να βρειτε τα $A \cup B, A \cap B, A', B'$

ⓨ Να βρειε $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$

ⓓ $(A' \cup B)' \cap (B' \cap A)$.

___

Λυση

ⓐ $\underline{O} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

$A = \{ 8, 9 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$.

ⓑ. $A \cup B = \{ 2, 4, 6, 8, 9 \}$

$A \cap B = \{ 8 \}$.

$A' = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$B' = \{ 0, 1, 3, 5, 7, 9 \}$.

⑦ $(A \cup B)' = \{0, 1, 3, 5, 7\}$.

$A' \cap B' = \{0, 1, 3, 5, 7\}$.

⑧. $(A' \cup B)' \cap (B' \cap A) = \{9\}$.

→ $A' \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

→ $(A' \cup B)' = \{9\}$.

→ $B' \cap A = \{9\}$.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$A = \{0, 1, 5\}.$$

$$B = \{1, 3, 4, 5\}.$$

Βρειτε μου ω

$$(A' \cup B)' \cap (B' \cap A). = \{0\}.$$

- $A' = \{2, 3, 4\}$
- $A' \cup B = \{2, 3, 4, 1, 5\}$.
- $(A' \cup B)' = \{0\}$.

- $B' = \{0, 2\}$.
- $B' \cap A = \{0\}$.

⑨ Αν $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ και $B = -\dfrac{2}{3}$

$$A = 1 - 2(\alpha - B) + 3(2\alpha - 3B) - \alpha.$$

$$A = (2\alpha - 2b) \cdot (2\alpha - 2b) + 8(6\alpha - 9b) - \alpha$$

$$A =$$

$$A = 1 - 2(\alpha - B) + 3(2\alpha - 3B) - \alpha.$$

$$A = 1 - 2\alpha + 2B + 6\alpha - 9B - \alpha$$

$$A = 3\alpha - 7B + 1$$

$$A = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 7\left(-\dfrac{2}{3}\right) + 1$$

$$A = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{14}{3} + 1$$

$$A = -\dfrac{9}{6} + \dfrac{28}{6} + \dfrac{6}{6}$$

$$A = \dfrac{25}{6}.$$

② Ⓑ $-2-3-1 = -6$

Ⓓ $-5+3 \cancel{-17} -4 \cancel{+17} +1 = -5$

Ⓒ $1-(-7+3)+(-2-3) =$
$1+7-3-2-3 = 0$

⑥ Ⓑ $\overset{1}{-\dfrac{3}{4}} + \overset{2}{\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{4}$

Ⓓ $2 - \dfrac{7}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{7}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Ⓒ $-\dfrac{7}{5} +1 = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{5}{5} = -\dfrac{2}{5}$

(10) $K = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-2}$

(α) Βρες τα x ώστε να ορίζεται η Κ.

πρέπι $x \neq 0$ και $x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

Η παράσταση Κ ορίζεται για όλα τα $x \in R - \{0, 2\}$.

(Β). $K = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x-2}{x(x-2)} + \dfrac{x^2}{x(x-2)}$

$= \dfrac{x^2 + x - 2}{x(x-2)}$.

(14) ⑬ $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{3y} = \dfrac{3y}{6xy} - \dfrac{2 \cdot 2x}{6xy}$

$$= \dfrac{3y - 4x}{6xy}$$

⑧ $\dfrac{1}{a} - 2 = \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{2\alpha}{\alpha} , = \dfrac{1 - 2a}{a} ,$

⑬2 $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-2} = \dfrac{x - x + 2}{x-2}$

$$\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$$

(13) α, β αντίθετοι $\Rightarrow$ α+β = 0

x, y αντίστροφοι $\Rightarrow$ x·y = 1 ;

(B) $1 - 2(\alpha - 1) - x(3y - \beta) + \beta(-x-2)$

$1 - 2a + 2 - 3yx + x\beta - \beta x - 2\beta$

$1 - 2a + 2 - 3 + x\beta - \beta x - 2\beta$

$3 - 3 - 2a + x\beta - \beta x - 2\beta$

$-2a + x\beta - \beta x - 2\beta$

$-2\alpha - 2\beta$

$-2(\alpha + \beta)$

$-2 \cdot 0$

$0 .$

11. $\boxed{x+y=3}$

B) $(x-3)(y-1) - x(y+2) =$

$B= \cancel{xy} \cancel{-xy} \cancel{\bigcirc} \cancel{xy} - x - 3y + 3 \cancel{xy} - 2x$

$B = -3x - 3y + 3$

$B = -3(x+y) + 3$

$B = -3 \cdot 3 + 3$

$B = -9 + 3$

$B = -6$

(7) (B) $\frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{10}$

(∂) $\frac{3}{2} : (-2) = -\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{4} = -1$

(∂2) $\frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{6} - \frac{15}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{17}{6}$

(8) (B) $B = -2x + 3(1-x) - 2(-x+3) =$

$= -2x + 3 - 3x + 2x - 6 = -3x - 3$

(∂) $1 - 3(-2x+1) - (6x-3)$

$1 + 6x - 3 - 6x + 3 = 1$ ✓

(12) Ⓑ $\quad \alpha + \beta = -3$

$\Lambda = \alpha + \dfrac{\beta}{6} - \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta-1}{3}$

$\Lambda = \dfrac{6a}{6} + \dfrac{b}{6} - \dfrac{3a}{6} + \dfrac{2(b-1)}{6}$

$\Lambda = \dfrac{6a}{6} + \dfrac{b}{6} - \dfrac{3a}{6} + \dfrac{2b-2}{6}$

$\Lambda = \dfrac{6a + b - 3a + 2b - 2}{6}$

$\Lambda = \dfrac{3a + 3b - 2}{6}$

$\Lambda = \dfrac{3(a+b) - 2}{6}$

$\Lambda = \dfrac{3(-3) - 2}{6}$

$\Lambda = -\dfrac{-9+2}{6} = -\dfrac{7}{6} \checkmark$

5 ⒝

$$B = 2\alpha - 5\beta - \gamma$$
$$B = 2 \cdot (-3) - 5(-2) - (-1)$$
$$B = -6 + 10 + 1$$
$$B = 5$$

$\alpha = -3$

$\beta = -2$

$\gamma = -1$

ⓖ $\Delta = 1 - 2\alpha\beta - \alpha\beta\gamma$,

$$\Delta = 1 - 2(-3) \cdot (-2) - (-3)(-2)(-1)$$

$$\Delta = 1 - 12 + 6$$

$$\Delta = -5.$$

3 (B) $4 \cdot (-5) = -20$

(д) $3 - 3 \cdot 5 = -12$

(б2) $9 - 3 \cdot (-1) \cdot (-5) = 9 - 15 = -6$

(ч) $1 \cdot (3-5) \cdot (-7+2) = 1 \cdot (-21+6+35-10) =$

$= 10$ ✓

(4)

(B) $5 - 5 \cdot (-3 + 5) - (7 - 8) \cdot (-5 + 3) =$

$= 5 - 5 \cdot (2) - (-1) \cdot (-2) =$

$= 5 - 10 - 2$

$= -7.$

(8). $1 - 2 \cdot (7 - 8) - 3 \cdot [5 + 4 \cdot (7 - 2 \cdot 5)] =$

$= 1 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot [5 + 4 \cdot (7 - 10)] =$

$= 1 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot [5 + 4 \cdot (-3)] =$

$= 1 \cdot (-1) - 3 \cdot [9 \cdot (-3)] =$

$= 1 - 3 \cdot [-27] =$

$= -3 \cdot (-27) =$

$= 54.$

Επομας Μαθημα

Τεταρτη   5:30 - 7

Σελ 18 - 19

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤
- ⑥
- ⑦
- ⑪

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Παράσταση Συνόλου – Ίσα σύνολα

1. Έστω Ω το σύνολο των ψηφίων ενός αριθμού και τα υποσύνολά του:

$A = \{ x \in \Omega \,/\, x \text{ ψηφίο του αριθμού } 2100 \}$ και

$B = \{ x \in \Omega \,/\, x \text{ ψηφίο του αριθμού } 2021 \}$

α. Να γράψετε τα σύνολα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους.

β. Να εξετάσετε, αν τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

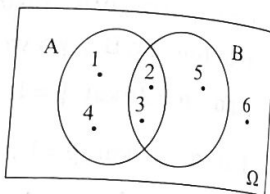**γ.** Το σύνολο $\Gamma = \{ 0, 2 \}$ είναι υποσύνολο του Α ;

2. Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \le x < 5 \}$ και $B = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ διαιρέτης του } 8 \}$

α. Να γράψετε τα σύνολα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους.

β. Να εξετάσετε, αν τα σύνολα Α και Β είναι ίσα. **γ.** Ισχύει $A \subseteq B$;

Πράξεις με σύνολα

3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα Venn για τα υποσύνολα Α και Β ενός βασικού συνόλου Ω.

Να βρείτε τα σύνολα:

α. Ω, Α, Β

β. $A \cup B$, $A \cap B$, A', $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$

4. Έστω $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ ένα βασικό σύνολο και τα υποσύνολά του:

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ και $B = \{ 4, 5, 6 \}$

Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και στη συνέχεια με διάγραμμα Venn τα σύνολα:

α. $A \cup B$ **β.** $A \cap B$ **γ.** A'

5. Έστω $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ένα βασικό σύνολο και τα υποσύνολά του $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ και $B = \{ 0, 2, 4 \}$. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και στη συνέχεια με διάγραμμα Venn τα σύνολα:

α. $A \cup B$ **β.** $A \cap B$ **γ.** $(A \cup B)'$ **δ.** $A \cap B'$ **ε.** $B \cap A'$

6. Αν $A = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ διαιρέτης του } 12 \}$ και

$B = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ πολλαπλάσιο του } 3 \text{ και } x < 17 \}$,

να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

7. Έστω $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ και $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$.

Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα και στη συνέχεια να τα παραστήσετε με διάγραμμα Venn.

α. $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$. Τι παρατηρείτε;

β. $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$. Τι παρατηρείτε;

8. Έστω Α, Β και Γ τρία υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, για τα οποία ισχύουν:

$A \cap B = \{ 1, 2 \}$, $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 5 \}$, $B \cap \Gamma = \{ 2, 3 \}$ και $B \cup \Gamma = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Να κάνετε το διάγραμμα Venn και στη συνέχεια, να βρείτε τα σύνολα Α, Β και Γ.

9. Να βρείτε τις τιμές του γ, για τις οποίες το σύνολο $A = \{ 0, \gamma \}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $B = \{ 0, \gamma + 1, 2 - \gamma \}$.

10. Να βρείτε τις τιμές των α, β, για τις οποίες τα σύνολα:

$A = \{ 0, \alpha, 1 \}$, $B = \{ 0, \beta, 2 \}$

είναι ίσα και στη συνέχεια το σύνολο Ρ που έχει ως στοιχεία τα υποσύνολα του Α.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

11. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).**

α. Δύο σύνολα λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

β. $\varnothing \subseteq A$

Αν Ω το βασικό σύνολο και Α, Β δύο υποσύνολά του, τότε:

γ. $A \subseteq A \cup B$ **δ.** $A \cap B \subseteq A$

ε. $(A')' = A$ **στ.** $A \cup A' = \Omega$ **ζ.** $\Omega' = \varnothing$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

1. $A = \left[(x^2 y^3)^{-2} (x y^3)^4 \right] : \left(\dfrac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3}$

i) Νδδ $A = x^9 y^9$

$A = \left[\left(x^{-4} y^{-6} \, x^4 y^{12} \right) \right] : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3} \right)^3$

$A = \left(x^{-4+4} \; y^{-6+12} \right) : \dfrac{y^{-3}}{x^9}$

$A = x^0 \, y^6 \, \cdot \; \dfrac{x^9}{y^{-3}}$

$A = 1 \cdot y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = \dfrac{y^6 x^9}{y^{-3}} = y^{6-(-3)} x^9$

$A = y^9 x^9$

11). Av $x = 2010$ køı $y = \dfrac{1}{2010}$

$$A = x^9 y^9$$

$$A = (xy)^9$$

$$A = \left(2010 \cdot \dfrac{1}{2010}\right)^9$$

$$A = 1^9 = \underline{\underline{1}}$$

2. $A = \left[(xy^{-1})^2 : (x^3 y^7)^{-1} \right]^2$ $x = 0,4$
    $y = -2,5$

$A = \left(x^2 y^{-2} : x^{-3} y^{-7} \right)^2$

$A = \left[x^{2-(-3)} \; y^{-2-(-7)} \right]^2$

$A = \left(x^5 y^5 \right)^2 = x^{10} y^{10} = (xy)^{10}$

$A = \left[(0,4)(-2,5) \right]^{10} = 1^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999)$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

    $2 \cdot 2000 = 4000$

ii). $99 \cdot 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1$
    $= 9999$

iii). $\dfrac{7,23^2 - (4,23)^2}{11,46} = \dfrac{(7,23 - 4,23)(7,23 + 4,23)}{11,46}$

$= \dfrac{3 \cdot 11,46}{11,46} = 3$.

4. i) $N\delta$ $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 - (a^2 - 2a\beta + \beta^2) = 4a\beta$$

$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 - a^2 + 2a\beta - \beta^2 = 4a\beta$$

$(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$

$(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$

$$4a\beta = 4a\beta$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

ii). $\left(\dfrac{999}{1000} + \dfrac{1000}{999}\right)^2 - \left(\dfrac{999}{1000} - \dfrac{1000}{999}\right)^2 =$

$\lceil ca \quad a = \dfrac{999}{1000} \quad$ $\kappa u \quad \beta = \dfrac{1000}{999}$

$$4 \cdot \dfrac{999}{1000} \cdot \dfrac{1000}{999} = 4$$

5.   i) vdo $a^2 - (a-1)(a+1) = 1$

$$a^2 - (a^2 - 1^2) = 1$$

$$a^2 - a^2 + 1 = 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

ii). $1,3265^2 - 0,3265 \cdot 2,3265$

$\text{Tca}\ ai = 1,3265$.

$$1,3265^2 - (1,3265 - 1)(1,3265 + 1) = 1$$

$$1,3265^2 - 0,3265 \cdot 2,3265 = 1$$

6. $\log_8 x$

$2 \log_8 x+1$

Nδο $(x+1)^2 - x^2 = x + x+1$

$\cancel{x^2}+2x+1 - \cancel{x^2} = 2x+1$

$2x+1 = 2x+1$

$0 = 0$.

7. $v \in N$ νδο $2^v + 2^{v+1} + 2^{v+2}$

είναι πολλα/σια του 7.

Πολλα/σια του 7: $7k$, $k \in Z$.

$2^v + 2^{v+1} + 2^{v+2} = 2^v + 2^v \cdot 2^1 + 2^v \cdot 2^2 =$

$= 2^v + 2 \cdot 2^v + 4 \cdot 2^v =$

$= 7 \cdot \cdot 2^v$ πολλα/σιο του 7.

Σχολικο (Σιλ 53.)

1. i) $\dfrac{a^3-2a^2+a}{a^2-a} = \dfrac{\cancel{a}(a^2-2a+1)}{\cancel{a}(a-1)} = \dfrac{(a-1)^2}{\cancel{a-1}}$

$$= a-1.$$

ii) $\dfrac{(a^2-a)+2a-2}{a^2-1}$

$= \dfrac{a(a-1)+2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{\cancel{(a-1)}(a+2)}{\cancel{(a-1)}(a+1)} = \dfrac{a+2}{a-1}$

2. i) $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2 \cdot \dfrac{a^3+a^2}{(a+1)^3} = \left(\dfrac{a^2}{a}-\dfrac{1}{a}\right)^2 \cdot \dfrac{a^2(a+1)}{(a+1)^3}$

$= \left(\dfrac{a^2-1}{a}\right)^2 \cdot \dfrac{a^2}{(a+1)^2} =$

$= \left(\dfrac{(a-1)(a+1)}{a}\right)^2 \dfrac{a^2}{(a+1)^2} = \dfrac{(a-1)^2\cancel{(a+1)^2}}{\cancel{a^2}} \cdot \dfrac{\cancel{a^2}}{\cancel{(a+1)^2}}$

$$= (a-1)^2$$

11). $\dfrac{a^2+a+1}{a+1} \cdot \dfrac{a^2-1}{a^3-1} =$

$= \dfrac{a^2+a+1}{a+1} \cdot \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} = \underline{1}$

$\boxed{a^3 - B^3 = (a-B)(a^2 + aB + B^2)}$

3. i) $(x+y)^2 \cdot \left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-2} =$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-2} =$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{y}{xy} + \dfrac{x}{xy}\right)^{-2} =$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^{-2} = (x+y)^2 \left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2 =$

$= (x+y)^2 \cdot \dfrac{(xy)^2}{(x+y)^2} = x^2 y^2$

11). $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} = \dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} =$

$$= \dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{\dfrac{y}{xy}-\dfrac{x}{xy}}{\dfrac{y^2}{x^2y^2}-\dfrac{x^2}{x^2y^2}} = \dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{\dfrac{y-x}{xy}}{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}}$$

$$= \dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{(y-x)x^2y^2}{xy(y^2-x^2)} =$$

$$= \dfrac{\cancel{x+y}}{\cancel{x-y}} \cdot \dfrac{-\cancel{(x-y)}\,(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}\,\cancel{(y-x)}\cancel{(y+x)}} = \dfrac{-xy}{y-x},$$

4. Ndo $\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right) = 1$

$$\dfrac{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}{(x-y)\cancel{(x+y)}} : \left(\dfrac{x^2}{x-y}-\dfrac{y(x-y)}{x-y}\right) = 1$$

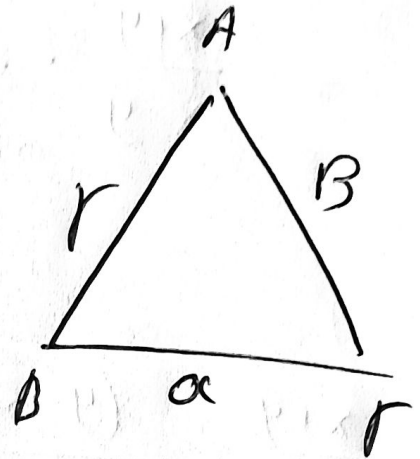$$\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y} : \dfrac{x^2-yx+y^2}{x-y} = 1 \ (=)$$

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x^2 - xy + y^2} = 1$$

$$1 = 1$$

5. i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$

νδο ΑΒΓ ισοπλυρο

Αρκει νδο $\alpha = \beta = \gamma$.

Ισχυω οτι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = k \implies \boxed{\alpha = \beta k}$

$\beta = \gamma k$

$\gamma = \alpha k$.

$\gamma = \beta \cdot k \cdot k$

$\gamma = \beta \cdot k^2$

$\gamma = \gamma k \cdot k^2$

$\gamma = \gamma k^3$ $\gamma \neq 0$

$1 = k^3$

$\underline{k = 1}$

Σωσωλ

$\alpha = \beta$

$\beta = \gamma$

$\alpha = \gamma$

Ισοπλυρ.

ii). Αν $\quad \alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = k$

$$\alpha = \beta + k$$

$$\beta = \gamma + k$$

$$\gamma = \alpha + k.$$

Αρα $\qquad \alpha = \beta + k$

$$\alpha = \gamma + k + k$$

$$\alpha = \gamma + 2k$$

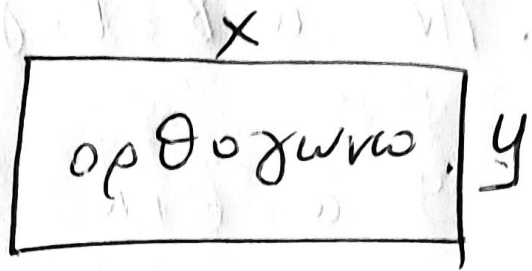$$\alpha = \alpha + k + 2k$$

$$\alpha = \alpha + 3k$$

$$0 = 3k.$$

$$\underline{\underline{k = 0}}$$

Αρα Ισοπλυρο διοτι $\alpha = \beta = \gamma$.

6. $L = 4a$

$E = a^2$

$$\boxed{\text{ορθογωνιο}}$$ with sides x and y

Νδο το ορθογωνιο ειναι τετραγωνο με πλευρα a.

$$L = 2x + 2y = 4a \iff \boxed{x + y = 2a}$$

περιμετρ

ομοι $E = a^2$

$$\boxed{xy = a^2}$$

$$\begin{cases} x + y = 2a \implies y = 2a - x \\ xy = a^2 \end{cases}$$

$$x(2a - x) = a^2$$

$$2ax - x^2 = a^2$$

$$0 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$0 = (x - a)^2$$

$$0 = x - a$$

$$\boxed{x = a}$$

$x + y = 2a$

$\boxed{y = a}$

$$\boxed{\text{Τετρα}\atop\text{γωνο}}\ a$$

(7) i) Αν α ρητός και β άρρητος

τότε α+β άρρητος.

Ρητός ειναι κάθε αριθμός που μπορεί

να γραφει ως κλάσμα.

αρα $\alpha = \dfrac{k}{\lambda}$

— Έστω α+β ειναι ρητός.

Αφου α+β ειναι ρητός γράφεται

ως ανάλογο κλάσμα.

$\alpha + \beta = \dfrac{\mu}{\nu}$

$\dfrac{k}{\lambda} + \beta = \dfrac{\mu}{\nu}$

$\beta = \dfrac{\mu}{\nu} - \dfrac{k}{\lambda}$

$\beta = \dfrac{\mu\lambda}{\nu\lambda} - \dfrac{k\nu}{\lambda\nu} = \dfrac{\mu\lambda - k\nu}{\lambda\nu}$

Αρα
α+β άρρητος

$\underline{\text{μιτι } \beta \text{ άρρητος}}$

$(\Rightarrow) \left| \beta = \dfrac{\mu\lambda - k\nu}{\lambda\nu} \right.$
Άτοπο.

i) Αν α ρητός και β άρρητος

υ/δο α·β άρρητο/

Άρα α ρητός γράφεται ω κλάσμα

$$\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$$

Έστω αβ είναι ρητός

άρα $\alpha\beta = \frac{\nu}{\mu}$

$$\frac{\kappa}{\lambda}\beta = \frac{\nu}{\mu}$$

$$\mu\kappa\beta = \lambda\nu$$

$$\beta = \frac{\lambda\nu}{\mu\kappa} \qquad \text{Το β γράφεται σαν κλάσμα άρα είναι ρητό}$$

Άρα

το α·β άρρητο/   Άτοπο!

Δυνάμεις

1. $(-2)^2 = 2^2 = 4$

$-2^2 = -4$

$(-2)^3 = -2^3 = -8$

$-2^3 = -8$

2. $a^0 = 1$

$1^\nu = 1$

$a^1 = a$

3. $a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^\nu}$

$\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{a}\right)^\nu$

4. $a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$

$a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$

$\dfrac{a^\nu}{a^\mu} = a^{\nu-\mu}$

(ίδια βάσεις)

5. $a^\nu \cdot \beta^\nu = (a\beta)^\nu$

$a^\nu : \beta^\nu = (a:\beta)^\nu$

$\dfrac{a^\nu}{\beta^\nu} = \left(\dfrac{a}{\beta}\right)^\nu$

6. $(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu}$

Επομενο Μαθημα
Σαββατο 12-1

Σελ. 27	Σελ 28	Σελ 35
④ α γ	⑫ οι	① β δ
⑤ α γ	⑬ οι	② β δ σ τ .
		⑤ ΟΛΗ

Σελ 37	Σελ 36
⑮	⑩
	⑪ .

(2) (B) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2 = (2x)^2 - 2x\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{6}$

(15) (a) Não $\quad a(a-2) - (a-1)^2 = -1$

$= a^2 - 2a - (a^2 - 2a\cdot1 + 1^2) =$

$= a^2 - 2a - a^2 + 2a - 1$

$= -1$

(b) $A = 2022 \cdot 2020 - 2021^2$

~~$\cdots$~~ ~~$\cdots$~~ ~~$2022(2021)\cdot(2)$~~

2022

$2022\,(2022-2) - (2022-1)^2 = -1$

$= 2022 \cdot 2020 - 2021^2 = A = -1$

11

(20) $-10x^2 + 2(x+3)^3 - (2x-1)^2$

$-10x^2 + 2(x^3 + 3x^2 3 + 3x(3)^2 + 3^3) - (2x^3 - 22x1 + 1^2)$

$-10x^2 + 2(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - (4x^2 - 4x + 1)$

$-10x^2 + 2x^3 + 18x^2 + 54x + 54 - 4x^2 + 4x - 1$ ∞

$4x^2 + 2x^3 + 58x + 53$ ✓

⑨

Ⓑ $x^3 - 3x(2x-1) - (x-1)^3 =$

$x^3 - 6x^2 + 3x - [x^3 - 3x^2 1 + 3x1^2 - 1^3] =$

$x^3 - 3x - x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 1 =$

$-3x - 1$

δ) $x^2 - 2x(1-x) - (2x-1)^2 = x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^2 + 2·2x·(-1) + (-1)$

$= x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 1 =$

$= x^2 - \frac{9}{?}x$

$= x^2 - 2x + 2x^2 - \left((2x)^2 - 2·2x·1 + 1^2\right)$

$= 3x^2 - 2x - 4x^2 + 4x - 1 \qquad = -x^2 + 2x - 1$

52) $8x(x-1)(x+1) - (2x-1)^3 =$

$8x(x^2 - 1^2) - [(2x)^3 - 3(2x)^2 1 + 3(2x)1^2 - 1^3] =$

$8x^3 - 8x - [8x^3 - 3(4x^2)1 + 6x - 1] =$

$8x^3 - 8x - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 =$

$-14x + 12x^2 + 1$
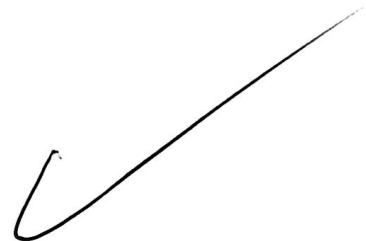
13

B) $(a^2-3)^2 - a(a-1)(a-5) = (a-1)(a^3-5)+4$

$(a^4-3^2) - a(a^2+5a-a+5) = (a^4-5a-a^3+5)+4$

$-a^4+3^2 - a(a^2-4a+5) = -a^4+5a+a^3-5+4$

$-a^4+3^2-a^3+4a^2-5a = -a^4+5a+a^3-5+4$

$-a^4+a^4-a^3-a^3+4a^2-5a-5a = -5+4-9$

$(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 3 + 3^2 - a(a^2-5a-a+5) = a^4-5a-a^3+5+4$

$a^4 - 6a^2+9 - a^3+5a^2+a^2-5a = a^4-5a-a^3+9$

$-6a^2 + 6a^2 = 0$

$0=0$ ✓

б) $(x^2-1)(a^2-9) + (3x-a)^2 = (ax-3)^2$

$(x-1)(x+1)(a-3)(a+3)+(9x^2-2\cdot3x\cdot a-a^2) = (a^2x^2-2ax\cdot3+$

$(x-1)(x+1)(a-3)(a+3)+(9x^2-6ax-a^2) = (a^2x^2-6ax+9)\ 3^2$

$x^2a^2-9x^2-a^2+9+9x^2-6xa+a^2 = a^2x^2-6xa+9$

$0=0$

Ⓑ $1 - 2x(-x+1) - (3x-1)^2 =$

$1 + 2x^2 - 2x - [(3x)^2 + 2\cdot3x\cdot1 + 1^2] =$

$1 + 2x^2 - 2x - [9x^2 - 6x + 1] =$

$1 + 2x^2 - 2x - 9x^2 + 6x - 1 =$
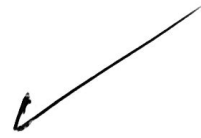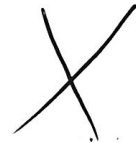
~~~~ $4x - 7x^2$

δ) $1 - 8x^2(x-2) - (2x-1)^3 =$

~~$1 - 8x^3 + 16$~~

$1 - 8x^3 + 16x^2 - ((2x)^3 + 3(2x)^2\cdot1 + 3\cdot2x\cdot1^2 + 1^3) =$

$= 1 - 8x^3 + 16x^2 - 8x^3 + 6x + 6x + 1$

$= 1 - 8x^3 + 1x^2 - 2x^3 + 12x + 1$

~~$-2\cdot8x^3$~~ 1
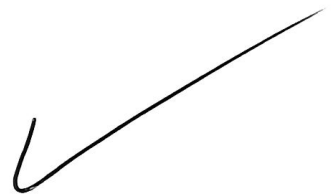
$\times$

$\rightarrow (1-x^2)^2$

㊽ $x^5 - (-x-2)(x-2) - x(-x^2+1)^2 =$

$=$ ~~$x^5 + x^2$~~

$x^5 - (2^2 - x^2) - x((-x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot1 + 1^2) =$

$= x^5 - 2^2 + x^2 - x(+x^4 + 2x^2 + 1)$

$= \cancel{x^5} - 2^2 + x^2 \cdot 0 \cancel{- x^5} + 2x^3 - x$ ✓

$= -4 + 2x^3 + x^2 - x$

(12)

(B) $(a-B)^2 + 4aB = (a+B)^2$

$a^2 - 2aB + B^2 + 4aB = a^2 + 2aB + B^2$

$a^2 - 2aB + B^2 - a^2 + 2aB - B^2 + 4aB = 0$

$-4aB + 4aB = 0$

$0 = 0$

(δ) $(a+B)^3 - (a-B)^3 - 6a^2B = 2B^3$

$(a^3 + 3a^2B + 3aB^2 + B^3) - (a^3 - 3a^2B + 3aB^2 - B^3) - 6a^2B = 2B^3$

$a^3 + 3a^2B + 3aB^2 + B^3 - a^3 + 3a^2B - 3aB^2 + B^3 - 6a^2B - 2B^3 = 0$

$6a^2B - 6a^2B + 2B^3 - 2B^3 = 0$

$0 = 0$

(ε) $(a-1)^2 - 2(a-1)(a+1) + (a+1)^2 = 4$

$a^2 - 2a + 1 - (2a+2)(a+1) + (a^2 + 2a + 1) = 4$

$a^2 - 2a + 1$

$a^2 - 2a + 1 - 2(a^2 - 1) + a^2 + 2a + 1 = 4$

$a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 2 + a^2 + 2a + 1 = 4$

$2a^2 - 2a^2 + 1 - 2a^2 + 2 + 1 = 4$

$4 = 4$

Σελ 46

(1)

(β) $(x+7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

$$(a+\beta)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \beta + \beta^2$$

$$(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$$

(γ) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

(ε) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

(θ) $(3x^2-1)^2 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 1 + 1^2 =$

$$= 9x^4 - 6x^2 + 1$$

③ ⓐ $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

ⓑ $(x^2-4)^3 = (x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 4 + 3 \cdot x^2 \cdot 4^2 - 4^3$

$$= x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$$

⑤ ⓔ $(3x^2-5)(3x^2+5) = (3x^2)^2 - 5^2 = 9x^4 - 25$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

ⓕ $\left(y^2-\frac{2}{3}\right)\left(y^2+\frac{2}{3}\right) = (y^2)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$$= y^4 - \frac{4}{9}$$

extra

$$(-x+2)(-x-2) = x^2 - 2^2$$

Επορασ Μαθημα

Τεταρτη   5:30-7

---

1. α δ ξ   σζ η

2. α γ

3. β γ

5. α β γ δ

9. αι γ ε

10. α γ ε

11. α β γ δ ε

12. α γ   13. αι γ

① ⓐ $7x - 7y = 7(x - y)$

ⓑ $3x - 12 = 3(x - 4)$

ⓒ $9x - 6 = 3(3x - 2)$

ⓓ $10x - 2 = 2(5x - 1)$

② ⓐ $x^2 - 2xy = x(x - 2y)$

ⓑ $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

ⓒ $14x^3 - 21x^2 = 7x^2(2x - 3)$

③ ⓐ $x^2 - x = x(x - 1)$

ⓑ $x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$

ⓒ $6x^4 + 2x^2 = 2x^2(3x^2 + 1)$

⑧ ⓐ $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

ⓑ $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$

ⓒ $49y^2 - 16 = (7y)^2 - 4^2 = (7y - 4)(7y + 4)$

(9)

(B) $y^2 - \frac{1}{4} = y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)$

(f) $x^4 - 81 = \left(x^2\right)^2 - 9^2 = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 9\right) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$

(10)

(B) $x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2)$

(f) $2x^3 - 18x = 2x\left(x^2 - 9\right) = 2x(x-3)(x+3)$

(52) $3x^4 - 12x^2 = 3x^2\left(x^2 - 4\right) = 3x^2(x-2)(x+2)$

(13)

(a) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$.

(B) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$.

(15)

(B) $y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2$

(52) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

(16)

(a) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

(52) $16x^4 - 8x^2 + 1 = \left(4x^2 - 1\right)^2$.

20) ⑧

$$x^2 - 3x + 2 \neq (x - x_1)\cdot(x - x_2) = (x - (-1))\cdot(x - (-2)) = (x+1)\cdot(x+2).$$

$$= b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0. \checkmark$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = -\frac{3 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{-3+1}{2} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{1} \\[2mm] \dfrac{-3-1}{2} = \dfrac{-4}{2} = \boxed{2}. \end{cases}$$

④ ⑧ $\quad x(2x-1) - 3(2x-1) = (2x-1)(x-3)$

⑥ $\quad (x-2)^2 - 3(2-x)(x+1) = (x-2)^2 + 3(x-2)(x+1)$

$$= (x-2)\left(x-2 + 3(x+1) \right)$$

$$= (x-2)(4x+1)$$

62) $\quad x(2x-1) - 2x + 1 =$

$$x(2x-1) - (2x-1)$$

$$(2x-1)(x-1).$$

⑤ ⑥ $(x-2)^2 + 3x - 6 = (x-2)^2 + 3(x-2) = (x-2)[x-2+3]$

$$= (x-2)(x+1)$$

⑤ $(x-3)^2 - 2x + 6 = (x-3)^2 - 2(x-3) = (x-3)(x-3-2)$

$$(x-3)(x-5)$$

ⓒ $(3x-2)^2 - 3x + 2 = (3x-2)^2 - (3x-2) =$

$$= (3x-2)(3x-2-1) = (3x-2)(3x-3)$$

Ⓘ $[-(2z-1)]^2 + 4(1-2z) =$

$(2z-1)^2 + 4(1-2z) = (2z-1)^2 - 4(2z-1)$

$$= (2z-1)(2z-1-4)$$

$$= (2z-1)(2z-5).$$

(17) **(ε).** $x^2 - y^2 + 6y - 9 =$

$$= x^2 - (y^2 - 6y + 9) =$$

$$= x^2 - (y-3)^2 =$$

$$= (x - y + 3)(x - y - 3).$$

(6) **(ß)** $\alpha x - \alpha y - \beta x + \beta y =$

$$= \alpha(x - y) - \beta(x - y)$$

$$= (x - y)(a - \beta).$$

(δ) $ax - ay - x + y =$

$$= \alpha(x - y) - (x - y)$$

$$= (x - y)(a - 1).$$

(20) (ε) $x^2 - x - 6 = 2(x-2)(x-(-3)) =$

$$(2x-4)(x+3)$$

$\Delta = b^2 - 4ay$

$\Delta = x^2 + 4 \cdot x \cdot (-6)$

$\Delta = x^2 + 24x$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ 2 / -3

19 β) $2x^2+x-1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-(-1)\right) = (2x-1)(x+1)$

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma \qquad\qquad X = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot2\cdot(-1)$$

$$\Delta = 1+8 = 9 \qquad\qquad X = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot2} = \frac{-1\pm3}{4}$$

$$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$X_2 = \frac{-1-3}{4} = \boxed{-1}$$

γ) $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1(-2) \qquad X = \frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{1\pm3}{2}\begin{cases}\boxed{2}\\\boxed{-1}\end{cases}$$

$$\Delta = 1+8$$

$$\Delta = 9$$

δ) $x^2 + x + 1$ δεν παραγοντωποιείται ,

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3 < 0$$

(17) (20) $(x^2+1)^2 - 4x^2 =$

~~$(x^2+1)(x^2+1) - 4x^2$~~

$(x^2+1)^2 - (2x)^2$

$= (x^2+1-2x)(x^2+1+2x)$

$= (x-1)^2 \ (x+1)^2$

(17) ⓑ $2x^3 - 12x^2 + 18x =$

$$= 2x\left(x^2 - 6x + 9\right)$$

$$= 2x(x-3)^2$$

ⓨ $4x^3 - x^2 - 4x^4 =$

$$= x^2\left(4x - 1 - 4x^2\right)$$

$$= -x^2\left(4x^2 - 4x + 1\right)$$

$$= -x^2\left(2x - 1\right)^2.$$

(7) ⓑ $x^3 - x^2 + x - 1 =$

$$= x^2(x-1) + x - 1$$

$$= (x-1)(x^2+1)$$

ⓢ $xy - x - y + 1 = x(y-1) - (y-1)$

$$= (y-1)(x-1).$$

(20) (γ) $x^2 - 8x + 15 =$

$\Delta = B^2 - 4af = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$

$X_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 \pm 2}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$

$= 1(x-5)(x-3)$

㉑ **①** $7x^2 - 13x + 6 = 7(x-1) \cdot \left(x - \frac{6}{7}\right)$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 7 \cdot 6$

$\Delta = 169 - 168$

$\Delta = 1$

$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 7} = \frac{13 \pm 1}{14} = \frac{14}{14} =$

$x_1 = \frac{13+1}{14} = 1$

$x_2 = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$
$\hookrightarrow \Delta > 0$

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$$
$\hookrightarrow \Delta = 0$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν παραγοντοποιείται

όταν $\Delta < 0$.

Οδηγος παραγοντοποιησ

1. Οταν εχω δυο ορους.
   i) κοινοι παραγοντες.
   ii) διαφορα τετραγωνων $a^2 - B^2 = (a-B)(a+B)$.
   iii) αθροισμα - διαφορα κυβων $a^3 - B^3 = (a-B)(a^2 + aB + B^2)$
   $$a^3 + B^3 = (a+B)(a^2 - aB + B^2)$$

2. Οταν εχω τρει ορους.
   i) κοινοι παραγοντες.
   ii) $(a-B)^2 = a^2 - 2aB + B^2$ η $(a+B)^2 = a^2 + 2aB + B^2$
   iii) παραγοντοποιηση τριωνυμου $ax^2 + Bx + \gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. Οταν εχω τεσσερη ορου.
   i) κοινοι παραγοντες.
   ii) ομαδοποιηση
   iii) αναπτυγμα κυβου $a^3 + 3a^2B + 3aB^2 + B^3 = (a+B)^3$
   iv) διθετη παραγοντοποιηση $(3+1)$.

Επορω Μοσθηρα

① α γ ε 7 ϑ   ⑮ α γ

② α γ ε   ⑯ γ ε .

③ α γ ε   ⑳ α δ .

④ α γ ε

⑤ α γ ε 7

⑥ α γ

⑦ α γ

⑧ α γ ε

⑨ α γ ε

⑩ α γ ε

16. Ⓑ $9x^2 - 12x + 4 =$ ~~(3x-2)²+2x²+2~~

$(3x-2)^2$

Ⓓ $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

19. Ⓓ $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Ⓔ $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

21. ⓐ $4x^2 - 9x + 5 =$

$\Delta = b^2 - 4a\delta = (-9)^2 - (4 \cdot 4 \cdot 5) = 81 - 80 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{9 \pm 1}{8} = \begin{cases} \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Ⓑ $4\left(x-1\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)$

17. (a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = $

$$3(x + 1)^2$$

(b) $x^2 + 2x + 1 - y^2.$

$$= (x+1)^2 - y^2$$

$$= (x + 1 - y)(x + 1 + y)$$

18. (a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

$x(x^2 - 3x + 3)$

$(x - 1)^3 - 1^3 = (x - 1 - 1)(x^2 - 3x + 3x - 1)$

(b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

15. (δ) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

(ε) $x^2 - 8x + 16 = (x - 16)^2 - 8x =$

$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 16 + 16^2 - 8x =$

$= x^2 - 32x + 256 - 8x =$

$= x^2 - 40x + 256.$

$(x-4)^2$

19. (α) $3x^2 + x - 2 =$

$\Delta = b^2 - 4ay = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25.$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 \pm 5}{6}$

$\dfrac{-1-5}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1.$

$\dfrac{-1+5}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$

$3 \cdot (x - x_1)(x - x_2) =$

$= 3 \cdot (x - (-1)) \cdot (x - \frac{2}{3}) =$

$= 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - \frac{2}{3}).$

11. ⓐ $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x-2) - 9(x-2)$

$(x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$

ⓑ $4x^3 - 8x^2 - x + 2 = x(4x^2-1) - 2(4x^2-1)$

$(4x^2-1)(x-2)$

$(2x-1)(2x+1)$.

13. ⓐ $27x^3 - 125 = (3x)^3 - 5^3 = (3x-5)$

$(9x^2 + 15x + 25)$

ⓑ $(2x-1)^3 - x^3 = (2x-1)^3 - x^3 =$

$(2x-1-x)(4x^2-4x+1 + (4x-2)x + x^2)$

$(2x-1-x)(4x^2-4x+1+4x^2-2+x^2)$

25. (a) $\dfrac{x^2+2x}{3x+6} = \dfrac{x(x+2)}{3(x+2)} = \dfrac{x}{3}$

(B) $\dfrac{3x^2-x}{6x-2} = \dfrac{x(3x-1)}{2(3x-1)} = \dfrac{x}{2}$

(γ) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \dfrac{x-1}{x}$

27. (a) $\dfrac{x^3-x}{x^2-x} = \dfrac{x(x^2-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x+1)}{x}$

(B) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)}$

(γ) $\dfrac{x^4-x}{x^2-x} = \dfrac{x(x^3-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x^2+x+1)}{x}$

$a^3-B^3 = (a-B)(a^2+aB+B^2)$

14. (A) $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x[(x-1)(x^2 + x + 1)]$

(B) $2x^5 - 16x^2 = 2x^2(x^3 - 8) =$
$2x^2[(x-8)(x^2 + 8x + 64)]$

(C) $x^4 - 2x^3 - x + 2 = x^3(x - 2) - (x-2) =$
$(x-2)(x^3 - 1) =$
$(x-2)[(x-1)(x^2 + x + 1)]$

(D) $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = x^3(x^2 - 1) + 8(x^2 - 1) =$
$(x^2 - 1)(x^3 + 8) =$
$(x-1)(x+1)[(x+8)(x^2 - 8x + 64)]$

(E) $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = x^4(x^3 - 1) - (x^3 + 1) =$
$(x^3 - 1)(x^4 - 1) =$
$[(x-1)(x^2 + x + 1)](x^2 - 1)(x^2 + 1)$

26. (a) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2}{x}$ ✓

(B) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \dfrac{x+3}{x-3}$

(C) $\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1} = \dfrac{(3x-1)^2}{(3x-1)(3x+1)} = \dfrac{3x-1}{3x+1}$

25.

δ) $\dfrac{3x-x^2}{x^2-9} = \dfrac{x\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+3)}$ $\dfrac{x}{x+3}$

ε) $\dfrac{x^2-25}{10x-2x^2} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{2x(5-x)} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{-2x(x-5)} = \dfrac{x+5}{-2x}$

ς) $\dfrac{1-9x^2}{6x^2-2x} = \dfrac{(1-3x)(1+3x)}{2x\cdot(3x-1)} = \dfrac{-(3x-1)(1+3x)}{2x(3x-1)}$

11. ⓐ $(2x-1)\cdot(x+3) - x^2 + 9 =$

$= (2x-1)\cdot(x+3) - (x-3)\cdot(x+3) =$ ✓

$= (x+3)\left(2x-1 - x + 3\right)$

$= (x+3)\left(x+2\right)$ ✓

ⓑ $x^3 - 2x^2 + (2x-1)(2-x) =$

$= x^2\cdot(x-2) + (2x-1)\cdot(2-x) =$

$= \text{~~(scribbled out)~~}$

$= x^2(x-2) - (2x-1)(x-2)$

$= (x-2)\left(x^2 - 2x + 1\right)$

$= (x-2)(x-1)^2$

12. (a) $101^2 - 99^2 = (101-99)(101+99) =$

$$= 2 \cdot 200 = 400$$

(b) $\dfrac{11,36^2 - 7,52^2}{3\,84} = \dfrac{(11,36-7,52) \cdot (11,36 + 7,52)}{3,84} =$

$$= \dfrac{3,84 \cdot 18,88}{3,84} =$$

$$= \dfrac{}{3,84}$$

27. (δ) $\dfrac{8x^3-2x}{2x^2+x} = \dfrac{2x(4x^2-1)}{x(2x+1)} = \dfrac{2(2x-1)(2x+1)}{2x+1}$

(ε) $\dfrac{x^5-16x}{x^3+4x} = \dfrac{x(x^4-16)}{x(x^2+4)} = \dfrac{x^4-16}{x^2+4} = \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2+4}$

$\qquad = (x-2)(x+2)$.

(σ2) $\dfrac{(x+1)^3-1^3}{x} = \dfrac{\cancel{}(x+1-1)[(x+1)^2+(x+1)\cdot 1+(1)^2]}{x}$

$\qquad = \dfrac{x(x^2+2x+1+x+1+1)}{\cancel{x}}$

$\qquad = x^2+3x+3$,

$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

26. (δ) $\dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{x^2-x+1}{x}$ ✓

(ε) $\dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

(ζ) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = \dfrac{1}{x-1}$ ✓

$a^3+\beta^3 = (a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2).$

21. Ⓑ $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

$\Delta = B^2 - 4ad = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} \quad x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{5 - 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$

23. ⓐ $x^2 - x = 0 =$
$= x \cdot (x - 1) = 0$ ✓

$x = 0$ и $x - 1 = 0$
$\boxed{x = 0}$ $\quad$ $\boxed{x = 1}$.

※ ~~3x=0~~ $\underline{x = 1}$.

Ⓑ $3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$3x = 0$ и $x - 2 = 0$
$\boxed{x = 0}$ $\quad$ $\boxed{x = 2}$

Ⓒ $x^2 - 1 = 0 =$
$= (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$ ✓

$x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$
$\boxed{x = 1}$ $\quad$ $\boxed{x = -1}$.

ⓓ $x^3 = x$ ~~$x^3 - x = 0 = x^2 \cdot (x - 1) = 0$~~

$x^2 = 0$ и $x - 1 = 0$
$\boxed{x^2 = 0}$ и $\boxed{x = 1}$,

ⓔ $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$(x^3 + 1) - x^2 - x =$
$= (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) - x \cdot (x + 1) =$
$= (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) - x \cdot (x + 1) = 0$

$\boxed{x = -1}$ $\quad$ $x^3 + 1 = 0$
$\boxed{x^2 = -1}$.

Ⓕ $3x^2 - 5x + 2 = 0 =$

$3x^2 - 3x = 0$
$3x \cdot (x - 1)$
$3x = 0$ и $x - 1 = 0$ ※

$$(x+1)(x^2-x+1) - x(x+1) = 0.$$

$$(x+1)(x^2-x+1-x) = 0$$

$$(x+1)(x^2-2x+1) = 0$$

$$(x+1)(x-1)^2 = 0$$

$$X+1 = 0 \qquad \text{s} \qquad (x-1)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{X = -1}} \qquad\qquad X-1 = 0$$

$$\underline{\underline{X = 1}}$$

24. (a) $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$

~~$(x-2)^2 + (x-2)(4+x) = 0$~~

~~$(x-2) \cdot (x-1) = 0$~~

$(x-2)(x-2+4+x) = 0$

$x-2 = 0$ ぃ $2x+2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

~~$2x = -2$~~

$\boxed{x = -1}$

(B) $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$.

$= (x+1)^2 + (x+1)(x-1) = 0$

$= (x+1) \cdot (x-1)$

~~$(x+1) = 0$~~ ぃ ~~$(x-1) = 0$~~

$(x+1)\left(x+1+x-1\right) = 0$

$(x+1)(2x) = 0$

$x+1 = 0$ ぃ $2x = 0$

$\boxed{x = -1}$ $\boxed{x = 0}$

① $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$.

$(x-2)(x+2)(x-1) - (x-1)(x+1)(x-2) = 0$

$(x-2)(x-1)\left[x+2 - x - 1 \right] = 0$

$(x-2)(x-1). = 0$

$x-2 = 0$ ∨ $x-1 = 0$

$\boxed{x = 2}$ $\boxed{x = 1}$

② $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$x\cdot(x-2)^2 - x(x-4)\cdot(x+a)+a = 0$

$x(x-2)^2 = (x-2)^2$

$x(x-2)^2 - (x-2)^2 = 0$

$(x-2)^2 \left(x-1 \right) = 0$

$(x-2)^2 = 0$ ∨ $x-1 = 0$

$\boxed{x = 2}$ $\boxed{x = 1}$

32. (a) Ndo

$$\frac{a^3 + \beta^3}{a + \beta} - a\beta = (a - \beta)^2$$

$$\frac{(a+\beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)}{a + \beta} - a\beta = (a - \beta)^2$$

$$a^2 - a\beta + \beta^2 - a\beta = (a - \beta)^2$$

$$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2$$

$$(a - \beta)^2 = (a - \beta^2)$$

(B)

$$\frac{1002^3 + 8}{1004} - 2004$$

$$\frac{1002^3 + 8^3}{1002 + 8} - (1002 - 8) = (1002 - 8)^2$$

$$(1002^2 + 8^2) - (1002 - 8) = (1002 - 8)^2$$
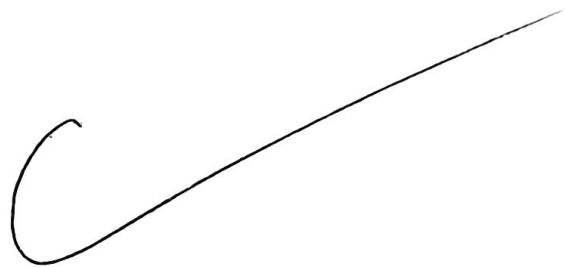
$$(1002 - 8)(1002 + 8) - (1002 + 8) = (1002 - 8)^2$$

$$\alpha = 1002 \qquad \beta = 2$$

$$\frac{1002^3 + 2^3}{1002 + 2} - 2 \cdot 1002 = \left(1002 - 2\right)^2$$

$$\frac{1002^3 + 8}{1004} - 2004 = 1000^2$$

31. №5

$$\frac{a^3 - B^3}{a^2 - B^2} : \left(\frac{a^2}{a+B} + B\right) = 1,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} : \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b}{1}\right) = 1$$

$$\frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)(a+b)} : \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{(a+b)b}{a+b}\right) = 1$$

$$\frac{(a^2 - 2ab + b^2)}{(a+b)} : \left(\frac{a^3 + b^2}{a+b}\right) = 1$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a+b)} \cdot \frac{a+b}{a^3 + b^3} = 1$$

$$\frac{a^2 + aB + B^2}{a+B} : \frac{a^2 + aB + B^2}{a+B} = 1$$

$$1 = 1$$