

Το Θεώρημα Μέσης Τύπος

Αν η $f(x)$ είναι:

1. συνεχής στο $[a, b]$

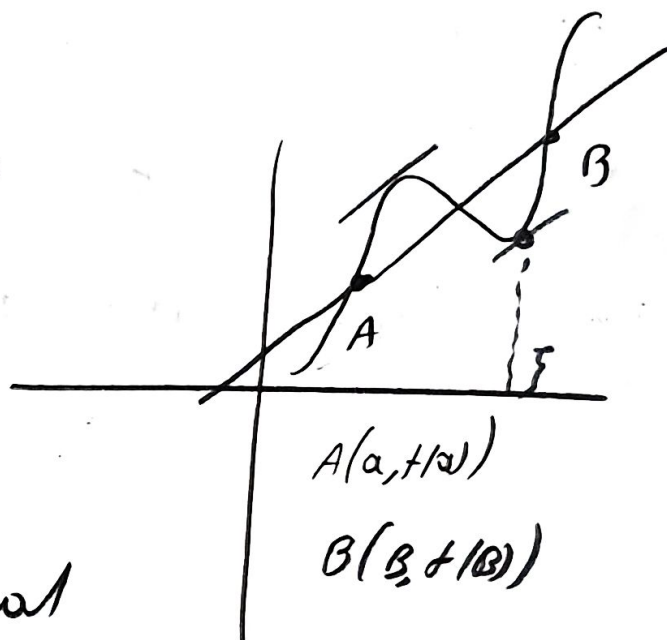
2. παραγωγώσιμη στο (a, b)

τότε $\exists \xi \in (a, b)$ τ.ω $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία EA_B έχει κλίση

$$\lambda_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Το Θ.Μ.Τ. εξασφαλίζει

την ύπαρξη τουλάχιστον μιας

εφαπτομένης στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi \in (a, b)$

η οποία να είναι παράλληλη στην EA_B .

Άσκηση 41

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6, & x \leq -1 \\ 3x^2 + 7x + 7, & x > -1 \end{cases}$

α) Να ελεγχθεί αν ικανοποιείται το ΘΜΤ στο $[-3, 1]$

$$\left. \begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 + 5x + 6) = 3 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x^2 + 7x + 7) = 3 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$$

$$\cdot f(-1) = 3$$

Επειδή $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ η $f(x)$ είναι

συνεχής στο -1 .

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3, -1)$ και $(-1, 1]$

ως πολυώνυμο. Άρα η $f(x)$ συνεχής στο $[-3, 1]$.

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 5x + 6 - 3}{x - 1} = 1.$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 + 7x + 7 - 3}{x - 1} = 1.$$

Αρα η $f(x)$ είναι παραγωγώσιμη στο -1 .

Επίσης η $f(x)$ παραγωγώσιμη στο $(-3, -1)$

και $(-1, 1)$ ως πομπωτικό αρα η $f(x)$

παραγωγώσιμη στο $(-3, 1)$ Σημειώ ικανοποιούνται

οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $(-3, 1)$.

③ Νδο $\exists \xi \in (-3, 1)$ τ.ω $f'(\xi) = 2$ και οτι
συνεχώς να βρεθεί το ξ αυτό.

Απο ΘΜΤ $\exists \xi \in (-3, 1)$ τ.ω $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$

$$f'(\xi) = \frac{17 - 9}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\begin{array}{l} x \leq -1 \\ \hline f'(x) = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x + 5 = 2$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Απορριπτεται

$$\begin{array}{l} x > -1 \\ \hline f'(x) = 2 \end{array}$$

$$6x + 7 = 2$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Αρα } \xi = -\frac{5}{6}$$

Άσκηση 42

Δίνεται $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να δειχθεί ότι η $f(x)$ ικανοποιεί

το ΘΜΤ στο $[1,5]$ και ότι συνεχώς να

$$\text{Βρει } \xi \in (1,5) \text{ τ.ω } f'(\xi) = \frac{1}{2}$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,5]$ αφού είναι

συνεχής στο $(1,5)$ και $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και

$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$. Ενώ η f είναι παραγωγισή

στο $(1,5)$ συνεπώς η $f(x)$ ικανοποιεί το ΘΜΤ

στο $[1,5]$. άρα $\exists \xi \in (1,5)$ τ.ω

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}.$$

Астрономия 43

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισίμη και $f(3) - f(1) = 4$

⑥ NSO $\exists x \in (1,3)$ s.t. $f'(x) = 2$

Ans DMTC $\exists \xi \in (1, 3)$ s.t. $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$

(B) $N \cap M(x_0, f(x_0))$ του f στο x_0 να
 είναι άπειρο του f είναι παραγωγικό

5 TMW $\varepsilon \circ y = 2x + 3$.

Η εφαρμογή της f στο $M(x_0, H(x_0))$ είναι

c) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad // \quad \varepsilon \approx y = 2x + 3$

аpa apкu vдо $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ т.ч. $f'(x_0) = 2$.

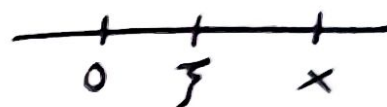
O_{pul} and $npiv$ $\exists s \in (1, 3)$ t.w. $f'(s) = 2$.

Άσκηση 44

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0)=0$
παράγωγωλη. Νόο $\exists \xi > 0$ τ.ω $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

Η $f(x)$ ικανοποιι το ΘΜΤ στω $[0, x]$

αρά $\exists \xi \in (0, x)$ τ.ω



$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Άσκηση 45

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παράγωγωλη.

και $f(a) + f(3a) = 2f(2a)$, $a > 0$

Νόο $\exists \xi \in (a, 3a)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$.

Η f ικανοποιι το ΘΜΤ στω $[a, 2a]$ και $[2a, 3a]$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = \frac{f(2a) - f(a)}{a}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3a) - f(2a)}{3a - 2a} = \frac{f(3a) - f(2a)}{a}$$

οπwl wgxwv vzi $f(a) + f(3a) = 2f(2a)$

$$\Leftrightarrow f(3a) - f(2a) = f(2a) - f(a)$$

Αφου $a > 0$ διαχωρι $\mu \in \alpha$.

$$\frac{f(3a) - f(2a)}{a} = \frac{f(2a) - f(a)}{a}$$

$$f'(3a) = f'(2a)$$

οπwl ανw Rolle $\exists \xi \in (a, 3a)$ τω

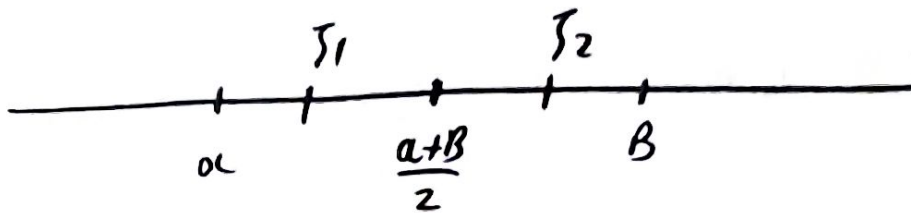
$$f''(\xi) = 0$$

Άσκηση 46

Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ για την

οποία ισχύει $f(a) = 3a - b$ και $f(b) = a + b$

Να $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ π.ω $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$.



Η $f(x)$ συνεχής στο $[a, \frac{a+b}{2}]$ και $[\frac{a+b}{2}, b]$

και παραγωγίσιμη στο $(a, \frac{a+b}{2})$ και $(\frac{a+b}{2}, b)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2}} = 2 \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2}} = 2 \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{b-a}$$

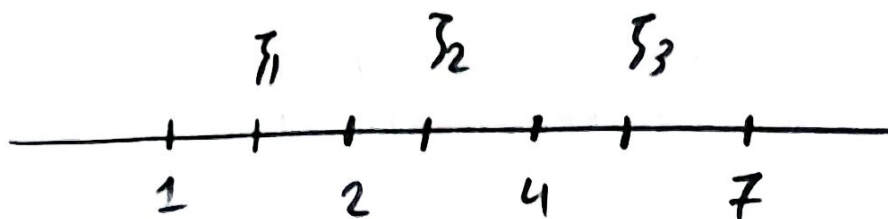
$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2 \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a} + 2 \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{b-a}$$

$$= 2 \left[\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a} + \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{b-a} \right] = 2 \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 2 \frac{a+b-3a+b}{b-a} = 4.$$

Άσκηση 47

Δίνεται παραγωγώσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία
 $f(1) = 2\alpha$, $f(2) = 4\alpha$, $f(4) = 6\alpha$, $f(7) = -3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Νόσο $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 7)$ τ.ω $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$



Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ και $[2, 4]$ και $[4, 7]$

Η $f(x)$ παραγωγώσιμη στο $(1, 2)$ και $(2, 4)$ και $(4, 7)$.

Από ΘΜΤ στα παραπάνω διαστήματα έχω

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4\alpha - 2\alpha}{1} = 2\alpha$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{6\alpha - 4\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{-3\alpha - 6\alpha}{3} = \frac{-9\alpha}{3} = -3\alpha$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2\alpha + \alpha - 3\alpha = 0.$$

Άσκηση 48

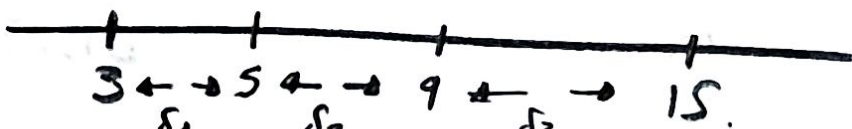
Δίνεται παραγωγώση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία

ισχύει $f(15) = f(3) + 8$. Νόο $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3, 15)$

τ.ω $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 4$.

Παρατηρώ ότι οι συντελεστές των $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$ και $f'(\xi_3)$ είναι διαφορετικοί από 1. και

έχω αθροισμα.

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 3 \end{array} \right\} k_1 + k_2 + k_3 = 6.$$


και $\Delta = 15 - 3 = 12$

$$\delta_1 = \frac{k_1}{k} \cdot \Delta = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2 \quad (\Rightarrow \delta_1 = 2).$$

$$\delta_2 = \frac{k_2}{k} \cdot \Delta = \frac{2}{6} \cdot 12 = 4 \quad (\Rightarrow \delta_2 = 4)$$

$$\delta_3 = \frac{k_3}{k} \cdot \Delta = \frac{3}{6} \cdot 12 = 6 \quad (\Rightarrow \delta_3 = 6).$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στα $[3, 5]$, $[5, 9]$, $[9, 15]$
και παραγωγίσιμη στα $(3, 5)$, $(5, 9)$, $(9, 15)$ με
πρώτες, δεύτερες και τρίτες παραγωγίσιμες συνάρτησεις.

$$f'(\xi_1) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{f(5) - f(3)}{2}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{f(9) - f(5)}{4}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(15) - f(9)}{15 - 9} = \frac{f(15) - f(9)}{6}$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) =$$

$$= \frac{f(5) - f(3)}{2} + 2 \frac{f(9) - f(5)}{4} + 3 \frac{f(15) - f(9)}{6}$$

$$= \frac{\cancel{f(5)} - f(3) + \cancel{f(9)} - \cancel{f(5)} + f(15) - \cancel{f(9)}}{2}$$

$$= \frac{f(15) - f(3)}{2} = \frac{f(3) + 8 - f(3)}{2} = 4.$$

Άσκηση 49

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $f(1)=2$ και $f(3)=6$

α) Να δο $\exists \xi \in (1,3)$ τω $f(\xi) = 8-2\xi$.

Λοιπόν, $f(x) = 8-2x \Leftrightarrow f(x) - 8 + 2x = 0$

Θαρω συνάρτηση $g(x) = f(x) - 8 + 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως $\{ \text{προϊκτου} \}$ συνεχών συναρτησεων.

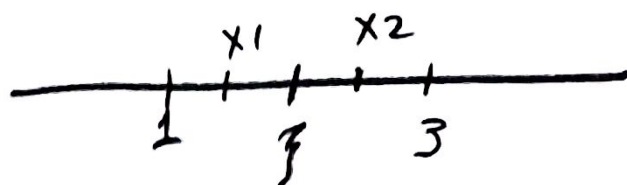
$$g(1) = f(1) - 6 = 2 - 6 = -4$$

$$g(3) = f(3) - 8 + 6 = 6 - 2 = 4$$

Αρα $g(1)g(3) < 0$ από το Bolzano $\exists \xi \in (1,3)$

$$\text{τ.ο. } g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 8 - 2\xi.$$

β) Να δο $\exists x_1, x_2 \in (1,3)$ ωστε $f'(x_1)f'(x_2) = 4$.



Η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ και $(3, 3)$

ως πρώτα παραγωγίσιμη συνάρτησαν

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, 3]$ και $[3, 3]$

ως πρώτα συνεχής συνάρτησαν.

$$f'(x_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 2\sqrt{3} - 2}{3 - 1} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(3) - f(3)}{3 - 3} = \frac{6 - (8 - 2\sqrt{3})}{3 - 3} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{0}$$

$$\text{Άρα } f'(x_1) f'(x_2) = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{0} =$$

$$= \frac{2(3 - \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{0} = 4$$

Άσκηση 50

Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$f(-5) = -2 \quad \text{και} \quad f(1) = 4$$

α) Να $\exists x_0 \in (-5, 1)$ τ.ω $f(x_0) = 1$

Θαρω την εξίσωση $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$

Εστω $g(x) = f(x) - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[-5, 1]$ ως ηράται συνεχών συναρτήσεων

$$g(-5) = f(-5) - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$g(1) = f(1) - 1 = 4 - 1 = 3$$

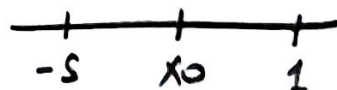
Αρα $g(-5)g(1) < 0$ από ορισμό Bolzano $\exists x_0 \in (-5, 1)$

τ.ω $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1$

β) Να $\exists \xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$ τ.ω $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} =$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-5, 1]$.

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(-5)}{x_0 + 5} = \frac{1 + 2}{x_0 + 2} = \frac{3}{x_0 + 2}$$



$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{4 - 1}{1 - x_0} = \frac{3}{1 - x_0}$$

Apa $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1}{\frac{3}{x_0+2}} + \frac{1}{\frac{3}{1-x_0}} =$

$$= \frac{x_0+2}{3} + \frac{1-x_0}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Άσκηση 51

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγισίμη

$$\text{ώστε } f(1) = a + 2b, \quad f(2) = 2a + 3b, \quad f(3) = 3a + 4b$$

$$\text{Νόο } \exists \xi \in (1, 3) \text{ τ.ω } f''(\xi) = 0$$

Η $f(x)$ είναι παραγωγισίμη στα $[1, 2]$ και $[2, 3]$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2a + 3b - a - 2b}{1} = a + b$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3a + 4b - 2a - 3b}{1} = a + b.$$

Άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ από Rolle

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \text{ τ.ω } f''(\xi) = 0.$$