γ' λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Θεωρία

Κωνσταντίνος Γεωργίου

Μαθηματικός, Msc

2020-2021

Περιεχόμενα

1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1: (Συνάρτηση)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Απάντηση:
Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε *πραγματική συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο Ορισμού: $A = \{\, x \in \mathbb{R} \colon f(x) \in \mathbb{R} \,\}$.
Σύνολο τιμών: $f(A) = \{\, y \in \mathbb{R} \colon y = f(x)$ για κάποιο $x \in A \,\}$.

Ορισμός 1.2: (Γραφική παράσταση συνάρτησης)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

Απάντηση:
Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ λέγεται *γραφική παράσταση* της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Ορισμός 1.3: (Ισότητα συναρτήσεων)

Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση:
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται *ίσες* όταν:

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$ και

ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 1.4: (Πράξεις συναρτήσεων)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

Απάντηση:

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκο $\dfrac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} &= A\cap B\\ D_{\frac{f}{g}} &= \{\, x\in A\cap B,\ \text{με } g(x)\neq 0\,\}\end{aligned}$$

Ορισμός 1.5: (Σύνθεση συναρτήσεων)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Απάντηση:
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε *σύνθεση* της f με την g και τη συμβολίζουμε $g\circ f$ τη συνάρτηση με τύπο $(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.
Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι το σύνολο $A_1 = \big\{x\in A\colon f(x)\in B\big\}$.

Η συνάρτηση $g\circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

Ορισμός 1.6: (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται *γνησίως αύξουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός 1.7: (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται *γνησίως φθίνουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Ορισμός 1.8: (Αύξουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται *αύξουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ορισμός 1.9: (Φθίνουσα συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται *φθίνουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Ορισμός 1.10: (Γνησίως μονότονη συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται *γνησίως μονότονη* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ορισμός 1.11: (Ακρότατα συνάρτησης - ολικό μέγιστο)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) *μέγιστο*, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Ορισμός 1.12: (Ακρότατα συνάρτησης - ολικό ελάχιστο)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) *ελάχιστο*, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Ορισμός 1.13: (Συνάρτηση 1-1)

Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ λέγεται *συνάρτηση 1-1*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ορισμός 1.14: (Αντίστροφη συνάρτηση)

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται;

ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

Απάντηση:

i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι $1-1$ στο A.

ii. Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε *αντίστροφη* συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1}, τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:
$$f^{-1} : f(A) \to A, \ \text{με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

1.15: Κριτήριο παρεμβολής

Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση:
Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$,

τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Ορισμός 1.16: (Ακολουθία)

Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση:
Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.17: (Όριο ακολουθίας)

Πότε λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση:
Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$$

Ορισμός 1.18: (Συνέχεια σε σημείο)

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Απάντηση:
Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι *συνεχής* στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ορισμός 1.19: (Συνεχής συνάρτηση)

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, *συνεχής* συνάρτηση.

Ορισμός 1.20: (Συνέχεια σε ανοικτό διάστημα)

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

Ορισμός 1.21: (Συνέχεια σε κλειστό διάστημα)

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

1.22: Θεώρημα Bolzano

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = 0.$$

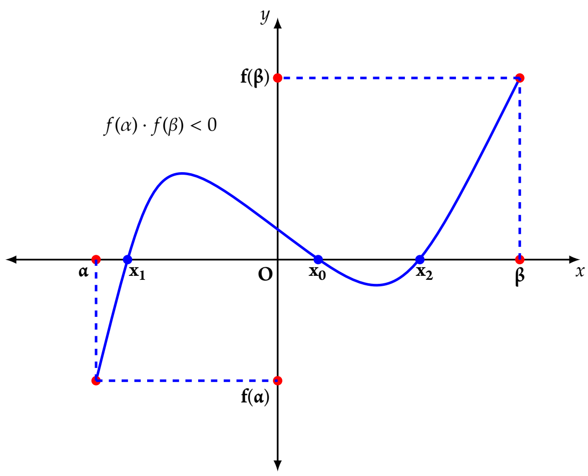
Δηλαδή,
η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.23: Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$



Σχήμα 1: Θ. Bolzano

1.24: Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

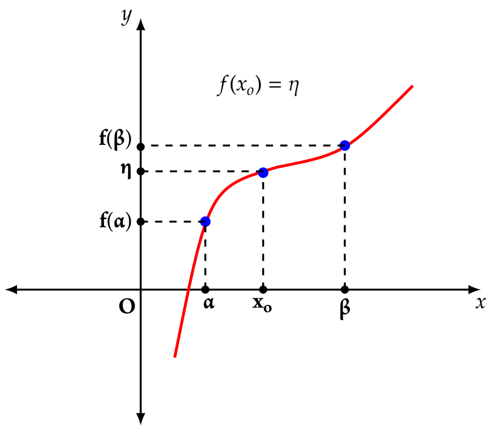
Δηλαδή,
η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.25: Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Ε.Τ.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = \eta$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



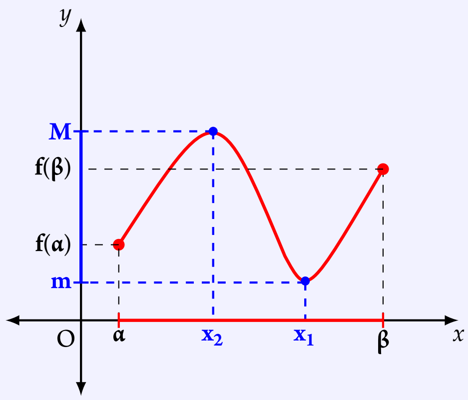
Σχήμα 2: Θ.Ε.Τ.

1.26: Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση:
Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
Δηλαδή,
υπάρχουν δύο, τουλάχιστον, σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\min f(x) = m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = \mathrm{M} = \max f(x), \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$$



Σχήμα 3: Θ.Μ.Ε.Τ.

Ορισμός 1.27: (Εφαπτομένη)

Έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Να διατυπώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A.

Απάντηση:
Έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ τότε ορίζουμε ως *εφαπτομένη* της C_f στο σημείο της A, την ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Ορισμός 1.28: (Παραγωγισιμότητα σε σημείο)

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα σημείο x_0, αν και μόνο αν, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.
Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ορισμός 1.29: (Παραγωγίσιμη συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο A;

Απάντηση:
Η f είναι *παραγωγίσιμη στο* Α ή, απλά, *παραγωγίσιμη*, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

Ορισμός 1.30: (Παραγωγισιμότητα σε ανοικτό διάστημα)

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Ορισμός 1.31: (Παραγωγισιμότητα σε κλειστό διάστημα)

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 1.32: (Παράγωγος συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f;

Απάντηση:
Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται *πρώτη παράγωγος* της f ή απλά *παράγωγος* της f.

Ορισμός 1.33: (Ρυθμός μεταβολής)

Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

Απάντηση:
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε *ρυθμό μεταβολής* του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

1.34: Θεώρημα Rolle

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Απάντηση:
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0.$$

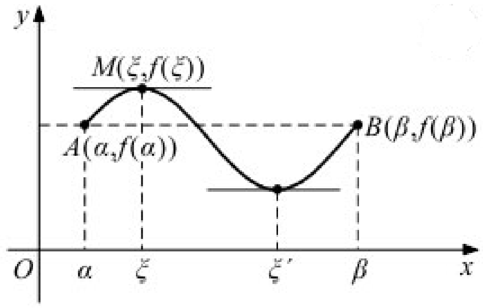
Δηλαδή,
η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.35: Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Rolle

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle.

Απάντηση:

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Σχήμα 4: Θ. Rolle

1.36: Θ.Μ.Τ.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.).

Απάντηση:
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

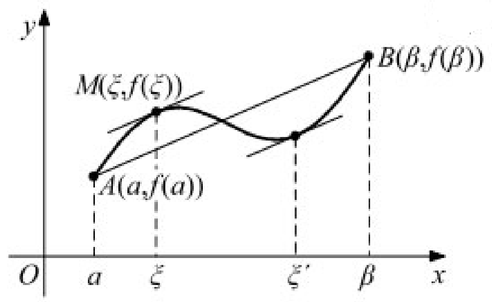
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

1.37: Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού..

Απάντηση:

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Σχήμα 5: Θ.Μ.Τ.

Ορισμός 1.38: (Τοπικό μέγιστο)

Έστω μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ *τοπικό μέγιστο*, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται *θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου*, ενώ το $f(x_0)$ *τοπικό μέγιστο* της f.

Ορισμός 1.39: (Τοπικό ελάχιστο)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ *τοπικό ελάχιστο*, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται *θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου*, ενώ το $f(x_0)$ *τοπικό ελάχιστο* της f.

1.40: Θεώρημα Fermat

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Απάντηση:
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα *εσωτερικό* σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει *τοπικό ακρότατο* στο x_0 και είναι *παραγωγίσιμη* στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

1.41: Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο Δ;

Απάντηση:
Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ΄ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Ορισμός 1.42: (Κρίσιμα σημεία)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Απάντηση:
Κρίσιμα σημεία της f στο διάσημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

Ορισμός 1.43: (Κυρτή συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Απάντηση:
Η συνάρτηση f στρέφει τα *κοίλα προς τα άνω* ή είναι *κυρτή* στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Ορισμός 1.44: (Κοίλη συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Απάντηση:
Η συνάρτηση f στρέφει τα *κοίλα προς τα κάτω* ή είναι *κοίλη* στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Ορισμός 1.45: (Σημείο καμπής)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Απάντηση:
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται *σημείο καμπής* της γραφικής παράστασης της f.

1.46: Πιθανές θέσεις σημείων καμπής

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της f στο Δ;

Απάντηση:
Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ΄ ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Ορισμός 1.47: (Κατακόρυφη ασύμπτωτη)

Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Απάντηση:
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται *κατακόρυφη ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

Ορισμός 1.48: (Οριζόντια ασύμπτωτη)

Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$; (αντίστοιχα στο $-\infty$;)

Απάντηση:
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$), τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ορισμός 1.49: (Ασύμπτωτη)

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (αντίστοιχα στο $-\infty$;)

Απάντηση:
Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται *ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0.$$

2 Ισχυρισμοί - αντιπαραδείγματα

Αντιπαράδειγμα 2.1

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \ln x$, $D_f = (0, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0, +\infty)$, τότε

$$(f \circ g)(x) = \ln \sqrt{x},\ x \in (0, +\infty) \quad \text{ενώ} \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x},\ x \in [1, +\infty),$$

δηλαδή:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Αντιπαράδειγμα 2.2

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ολικό μέγιστο, έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = ημ\, x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο, το $y = 1$ σε καθένα από τα σημεία $2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$, αφού

$$f(x) \leq f\left(2κπ + \frac{π}{2}\right) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αντιπαράδειγμα 2.3

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

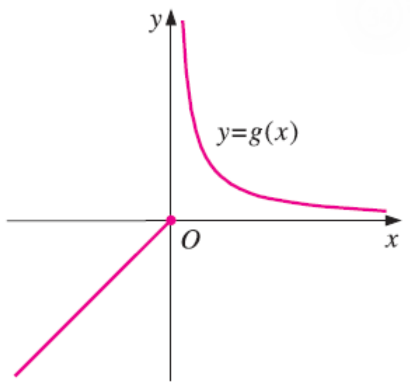
Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1/x, & x > 0 \end{cases}$$

η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η f είναι 1-1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σ΄ένα σημείο, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.



Σχήμα 6: C_g

Αντιπαράδειγμα 2.4

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Τότε, το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα άκρα α, β των παραπάνω διαστημάτων.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης

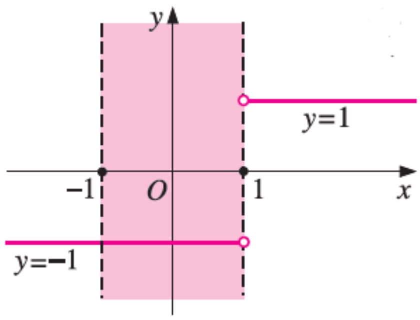
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο η f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -1.$$



Σχήμα 7: C_f

Αντιπαράδειγμα 2.5

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \ \ \textbf{\textit{και}} \ \ \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty,$$

τότε

$$\lim_{x\to 0} (f(x) + g(x)) = 0.$$

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$
τότε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Αντιπαράδειγμα 2.6

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

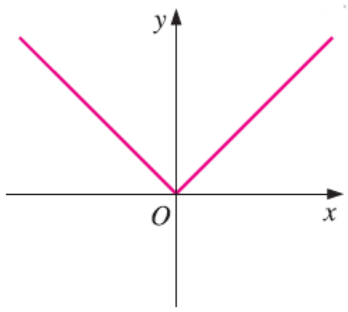
$$f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό. Πράγματι,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



Σχήμα 8: $f(x) = |x|$

Αντιπαράδειγμα 2.7

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ένα σύνολο A που είναι ένωση διαστημάτων και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$
Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $\mathrm{A} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αντιπαράδειγμα 2.8

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

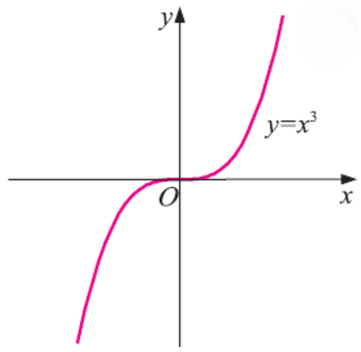
α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία **δεν** είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 9: $f(x) = x^3$

Αντιπαράδειγμα 2.9

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

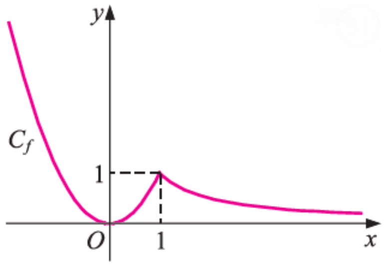
α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$, εντούτοις δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο αφού

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$



Σχήμα 10: C_f

Αντιπαράδειγμα 2.10

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f.

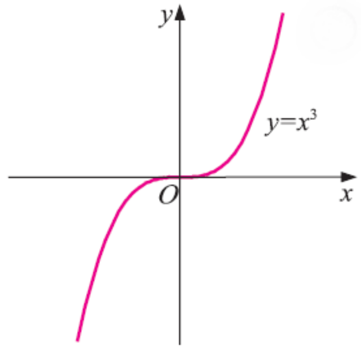
α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν και ισχύει $f'(0) = 0$ η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



Σχήμα 11: $f(x) = x^3$

Αντιπαράδειγμα 2.11

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

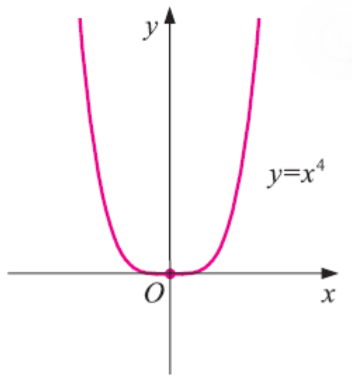
α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, αν και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$ η οποία **δεν** είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$. Ισχύει όμως $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 12: $f(x) = x^4$

Αντιπαράδειγμα 2.12

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f.

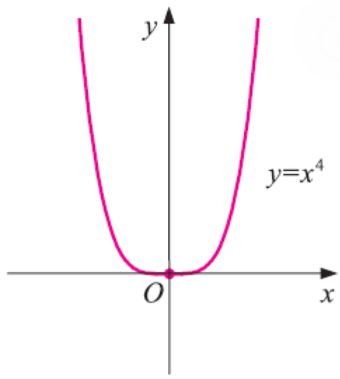
α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f''(0) = 0$. Ωστόσο, το $x_0 = 0$ δεν είναι θέση σημείου καμπής, αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η f είναι κυρτή.

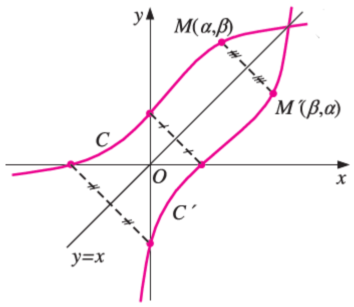


Σχήμα 13: $f(x) = x^4$

3 Αποδείξεις

Θεώρημα 3.1

Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Σχήμα 14: C_f, $C_{f^{-1}}$

Απόδειξη. Επειδή,

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. **ő.έ.δ.**

Θεώρημα 3.2 (Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης)

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, *όπου* $\nu \in \mathbb{N}^*$ *και* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Να αποδείξετε ότι:*

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.3 (Όριο ρητής συνάρτησης)

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *όπου* $P(x), Q(x)$ *πολυώνυμα του* x *και* $x_0 \in \mathbb{R}$ *με* $Q(x_0) \neq 0$. *Να αποδείξετε ότι:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Απόδειξη. Είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x0)}{Q(x_0)}.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.4 (Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών)

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- *η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και*
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$, οπότε $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = \eta$. **ὅ.ἔ.δ.**

Θεώρημα 3.5 (Παράγωγος & συνέχεια)

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. **ὅ.ἔ.δ.**

Θεώρημα 3.6

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 0$$

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή:

$$(c)' = 0$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 1$$

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

δηλαδή:

$$(x)' = 1$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.8

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}$$

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} &= \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\cdot x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1})}{x-x_0}\\ &= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\cdot x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\cdot x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1})\\ &= x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \cdots + x_0^{\nu-1}\\ &= \nu\cdot x_0^{\nu-1},\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.9

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

δηλαδή:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.10 (Παράγωγος αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.11

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'\cdot x^\nu - 1\cdot(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu\cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu\cdot x^{-\nu-1}$$

δηλαδή:

$$(x^{-\nu})' = -\nu\cdot x^{-\nu-1}$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.12

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}\, x$. *Να αποδείξετε ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x\colon\ \text{συν}\, x = 0\}$ *και ισχύει:*

$$f'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}\, x)' = \left(\frac{\text{ημ}\, x}{\text{συν}\, x}\right)' = \frac{(\text{ημ}\, x)' \cdot \text{συν}\, x - \text{ημ}\, x \cdot (\text{συν}\, x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

δηλαδή:

$$(\text{εφ}\, x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. *Να αποδείξετε ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0, +\infty)$ *και ισχύει:*

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Απόδειξη. Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.
Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

δηλαδή:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.14

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$. *Να αποδείξετε ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ισχύει:*

$$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$$

Απόδειξη. Αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$.
Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \cdot \ln \alpha.$$

δηλαδή:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.15

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη.

- Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- Αν $x < 0$, τότε $(\ln|x|) = (\ln(-x))$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.16 (Σταθερή συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- *η f είναι συνεχής στο Δ και*
- *$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,*

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι,

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος

μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε κάθε, λοιπόν, περίπτωση είναι $f(x_1) = f(x_2)$. **ὅ.ἔ.δ.**

Πόρισμα 3.17

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- *οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και*
- *$f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,*

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.18 (Κριτήριο μονοτονίας)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- *Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.*
- *Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.*

Απόδειξη.

- Έστω ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
  Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
  Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
  $$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$
  Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε:
  $$f(x_1) < f(x_2).$$
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, εργαζόμαστε αναλόγως.

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.19 (Θεώρημα Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.
Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και} \quad f(x) \leq f(x_0) \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{2}$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (2), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{3}$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (2), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{4}$$

Έτσι, από τις (3) και (4) έχουμε

$$f'(x_0) = 0.$$

ὅ.ἔ.δ.

Θεώρημα 3.20 (1ο κριτήριο ακροτάτων)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Απόδειξη. Επειδή $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$.
Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \tag{5}$$

Επειδή $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.
Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in [x_0, \beta) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

οπότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα **τοπικό μέγιστο** αυτής. **ὅ.ἔ.δ.**

Θεώρημα 3.21 (2ο κριτήριο ακροτάτων)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Απόδειξη. Επειδή $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$.
Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \tag{7}$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$.
Τότε,

$$\text{για κάθε } x \in [x_0, \beta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \tag{8}$$

Από τις (7) και (8) ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

οπότε το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α, β) και άρα **τοπικό ελάχιστο** αυτής. **ὅ.ἔ.δ.**

Θεώρημα 3.22 (3ο κριτήριο ακροτάτων)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$. Επομένως, για

$$x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2).$$

Άρα, το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.
Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ και f γν. αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ και f γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
Στην περίπτωση που ισχύει $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, εργαζόμαστε αναλόγως. **ὅ.ἔ.δ.**

4 Βασικές Προτάσεις (δεν απαιτείται απόδειξη)

Πρόταση 4.1 (Μονοτονία Συνάρτησης)[2]

Έστω μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

- *Αν η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* Δ, *τότε για κάθε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *ισχύει η ισοδυναμία:*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *Αν η* f *είναι γνησίως φθίνουσα στο* Δ, *τότε για κάθε* $x_1, x_2 \in \Delta$ *ισχύει η ισοδυναμία:*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Πρόταση 4.2

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ *είναι αντιστρέψιμη, τότε:*

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

δηλαδή οι εξισώσεις $f(x) = x$ *και* $f^{-1}(x) = x$ *είναι ισοδύναμες.*

Πρόταση 4.3 (Γενίκευση Κριτηρίου Παρεμβολής)[2]

Έστω δύο συναρτήσεις f, g *με* $f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* x *κοντά στο* x_0, *όπου* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Πρόταση 4.4 (Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης)[2]

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα Δ *και*

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$$

ή

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = -\infty$$

τότε:

$$f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$$

$\Delta = (\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ ή $(-\infty, +\infty)$

Πρόταση 4.5 (Βασικές ανισότητες)

- *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει:* $|\eta\mu\, x| \leq |x|$
  Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, *δηλαδή:* $|\eta\mu\, x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$.
- *Για κάθε* $x > 0$ *ισχύει:* $\ln x \leq x - 1$
  Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x = 1$, *δηλαδή:* $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει:* $e^x \geq x + 1$.
  Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, *δηλαδή:* $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- *Για κάθε* $x > 0$ *ισχύει:* $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x$

Πρόταση 4.6

Ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$, $(c \in \mathbb{R}$, *σταθερός αριθμός*$)$.

5 Βασικές Προτάσεις (απαιτείται απόδειξη)

Πρόταση 5.1

Αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο $f(A)$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.
Τότε, υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια ώστε:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \xrightarrow[f \nearrow A]{f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A} f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 \geq y_2,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $y_1 < y_2$.
Συνεπώς, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$. **ὅ.ἔ.δ.**

Πρόταση 5.2 (Σημεία τομής των C_f, $C_{f^{-1}}$, με f γν. αύξουσα)

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Απόδειξη.

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f^{-1}(x_0) = f(x_0)$.
  Τότε:
  $$f\left(f^{-1}(x_0)\right) = f\left(f(x_0)\right) \Rightarrow f\left(f(x_0)\right) = x_0. \tag{9}$$
  - Αν $f(x_0) < x_0 \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f\left(f(x_0)\right) < f(x_0) \overset{(1)}{\Longrightarrow} x_0 < f(x_0)$, άτοπο.
  - Αν $f(x_0) > x_0 \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \overset{(1)}{\Longrightarrow} x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

  Συνεπώς, ισχύει: $f(x_0) = x_0$.
- Αντιστρόφως, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = x_0$.
  Τότε:
  $$x_0 = f^{-1}(x_0),$$
  οπότε:
  $$f(x_0) = f^{-1}(x_0)$$

Άρα τελικά:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

δηλαδή οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες. **ὅ.ἔ.δ.**

Πρόταση 5.3

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

Απόδειξη.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right| = |0| = 0.$
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε για κάθε $x \in D_f$ ισχύει: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

  Όμως, έχουμε: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-|f(x)|\right) = \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 5.4

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Απόδειξη.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^2 = 0^2 = 0.$
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = 0$, τότε για κάθε $x \in D_f$ ισχύει:

  $$-\sqrt{f^2(x)} = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}.$$

  Όμως, έχουμε: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-\sqrt{f^2(x)}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0$, συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 5.5

Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και "1 – 1", τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχουν:

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ με: } f(x_1) > f(x_2) \text{ και } f(x_2) < f(x_3)$$

Από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, αν $\gamma \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_2) < \gamma < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$$

τότε υπάρχει $\alpha \in (x_1, x_2)$ και $\beta \in (x_2, x_3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\alpha) = \gamma = f(\beta)$$

Όμως η f είναι "1 – 1", οπότε $\alpha = \beta$, άτοπο, διότι $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$. **ὅ.ἔ.δ.**

Πρόταση 5.6 (ανισότητα Jensen)

Έστω συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \Delta$.

- *Αν f κυρτή στο Δ, τότε:* $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.
- *Αν f κοίλη στο Δ, τότε:* $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ.

- Αν $\alpha = \beta$, τότε ισχύει ως ισότητα.
- Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.
  Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
  Τότε, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \tag{10}$$

  Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$.

Τότε, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{11}$$

Είναι:

$$\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \overset{f'\nearrow}{\Longrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$
$$\overset{(10),(11)}{\Longrightarrow} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

- Αν $\alpha > \beta$ εργαζόμαστε ανάλογα.

ὅ.ἔ.δ.

Κατάλογος σχημάτων

Αναφορές

[1] ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Β' Μέρος
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

[2] Ι.Ε.Π. (πράξη 44/10-09-20)