Θεματικη Ενοτητα

Το Θεωρημα

του

Rolle

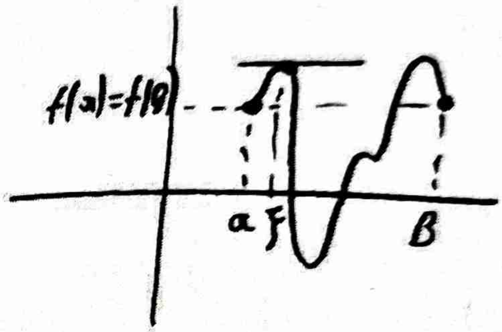
Θεωρημα Rolle

Εστω $f(x)$ ορισμενη στο $[\alpha,\beta]$.

1. Αν η $f(x)$ συνεχης στο $[\alpha,\beta]$
2. Αν η $f(x)$ παραγωγισιμη στο (α,β)
3. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$

Τοτε υπαρχει τουλαχιστον ενα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f'(\xi)=0$

Γεωμετρικη ερμηνεια Rolle



Η υπαρξη ενος $\xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f'(\xi)=0$ γεωμετρικα σημαινει οτι υπαρχει τουλαχιστον ενα σημειο $M(\xi, f(\xi))$ $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποιο η εφαπτομενη ειναι παραλληλη στον $x'x$

Ασκηση 1

Δινεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Νδο η $f(x)$ ικανοποιει τις προυποθεσεις του Rolle στο $[0,3]$ και επειτα να βρει ενα ξ που να επαληθευει το συμπερασμα του Rolle.

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[0,3]$ ως πολυωνυμο και παραγωγισιμη στο $(0,3)$ ως πολυωνυμο.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \text{Αρα } f(0)=f(3) \text{ απο Rolle } \exists\, \xi \in (0,3) \text{ τ.ω } f'(\xi)=0$$

Επαληθευση

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1$ Δεκτη.

$x = 3$ Απορριπτεται γιατι το $3 \notin (0,3)$

Ασκηση 2

Δινεται $f(x)=(x-2)\eta\mu x$

ⓐ Νδο η εξισωση $f'(x)=0$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(2,\pi)$.

Η $f(x)$ συνεχης στο $[2,\pi]$ ως πραξεις συνεχων και παραγωγισιμη στο $(2,\pi)$ συναρτησεων ως πραξεις παραγωγισιμων συναρτησεων.

$f(2)=f(\pi)=0$ αρα απο Rolle $\exists \xi \in (2,\pi)$ τ.ω $f'(\xi)=0$.

ⓑ Νδο η εξισωση $\varepsilon\varphi x = 2-x$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(2,\pi)$.

Απο πριν $\exists \xi \in (2,\pi)$ τ.ω $f'(\xi)=0$

$$f'(x)=\eta\mu x+(x-2)\sigma\upsilon\nu x$$

αρα $f'(\xi)=\eta\mu\xi+(\xi-2)\sigma\upsilon\nu\xi=0$

$$(\xi-2)\sigma\upsilon\nu\xi=-\eta\mu\xi.$$

$$\Rightarrow (\xi-2)=-\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} \Leftrightarrow 2-\xi=\varepsilon\varphi\xi.$$

Ασκηση 3

Εστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισιμη και $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Νδο η f ειναι 1-1.

Εστω οτι η f δεν ειναι 1-1.

Αρα $\exists x_1, x_2$ με $x_1 \neq x_2$ ωστε $f(x_1) = f(x_2)$

τοτε απο Rolle $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$

ομως αυτο ειναι ατοπο αφου $f'(x) \neq 0$

Αρα η $f(x)$ ειναι 1-1.

Σχολιο

Εδω δεν μπορω να ισχυριστω οτι

$f'(x) \neq 0$ και f' συνεχης αρα $f'(x) > 0$

ή $f'(x) < 0$ γιατι δεν γνωριζω αν

η $f'(x)$ ειναι συνεχης.

Ασκηση 4

Εστω $f: R \to R$ παραγωγισιμη και η C_f

τεμνει τον $x'x$ στα σημεια $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

α) νδο για την $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμοζεται

ο Rolle στο $[1,2]$

Η $G(x)$ ειναι συνεχης στο $[1,2]$ ως

πραξης συνεχων συναρτησεων και παραγωγισιμη

στο $(1,2)$ ως πραξης παραγωγισιμων συναρτησεων

$$\left.\begin{aligned} G(1) &= \frac{f(1)}{-2} = 0 \\ G(2) &= \frac{f(2)}{-1} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &G(1) = G(2) \text{ αρα απο Rolle} \\ &\exists \xi \in (1,2) \text{ τ.ω } G'(\xi) = 0. \end{aligned}$$

β) νδο $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω η εφαπτομενη της C_f

στο $M(\xi, f(\xi))$ να διερχεται απο το $A(3,0)$.

Αρκει νδο $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \to A(3,0)$

$\Leftrightarrow 0 - f(\xi) = f'(\xi)(3 - \xi) \Leftrightarrow (\xi - 3) f'(\xi) - f(\xi) = 0.$

Απο θρολ $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $G'(\xi)=0$

$G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$

$G'(x) = \frac{f'(x)(x-3) - f(x)}{(x-3)^2}$

Αρα $G'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi)}{(\xi-3)^2} = 0$

$\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi) = 0.$

Άσκηση 5

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2)=2$ και $f(1)=1$

ⓐ ΝΔΟ $\exists\, \xi_1 \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x \iff f'(x) - 3x^2 + 4x = 0$

$\iff \left[f(x) - x^3 + 2x^2\right]' = 0$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - x^3 + 2x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= f(1) - 1 + 2 = 1+1 = 2 \\ g(2) &= f(2) - 8 + 8 = 2 \end{aligned}\right\} g(1) = g(2) \text{ άρα}$$

από Rolle $\exists\, \xi_1 \in (1,2)$ τ.ω $g'(\xi_1) = 0$

$\iff f'(\xi_1) - 3\xi_1^2 + 4\xi_1 = 0 \iff f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1$

$\xi_1 \in (1,2)$.

β) ΝΔΟ $\exists \xi_2 \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi)(\xi-3) = f'(\xi)$

$f'(x)(x-3) = -f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-3) + f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[f(x)(x-3)\right]' = 0$

Θεωρω $g(x) = f(x)(x-3)$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,2]$ και παραγωγισιμη στο $(1,2)$.

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= -2f(1) = -2 \\ g(2) &= -f(2) = -2 \end{aligned}\right\} g(1) = g(2) \text{ αρα απο}$$

Rolle $\exists \xi_2 \in (1,2)$ τ.ω $g'(\xi_2) = 0$

$\Leftrightarrow f'(\xi_2)(\xi_2-3) + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2)(\xi_2-3) = -f(\xi_2)$.

γ) ΝΔΟ $\exists \xi_3 \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi_3) = \dfrac{f(\xi_3)}{\xi_3}$

$f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x)x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Θεωρω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,2]$ και παραγωγισιμη στο $(1,2)$.

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= f(1) = 1 \\ g(2) &= \frac{f(2)}{2} = 1 \end{aligned}\right\} g(1) = g(2) \text{ αρα απο Rolle}$$

$\exists \xi_3 \in (1,2)$ τ.ω $g'(\xi_3) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_3) = \dfrac{f(\xi_3)}{\xi_3}$.

Ασκηση 6

Νδο η εξισωση $4x^3+3\lambda x^2+2(\lambda-2)x-2\lambda+1=0$ εχει τουλαχιστον μια λυση στο $(0,1)$.

Θεωρω $f(x)=4x^3+3\lambda x^2+2(\lambda-2)x-2\lambda+1$.

Η $f(x)$ συνεχης στο $[0,1]$ και παραγωγισιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμο.

$f(0)=-2\lambda+1$ και $f(1)=3\lambda+1$.

Επειδη το $f(0)\cdot f(1)$ δεν ειναι γνωστο ως προς το προσημο του ο Bolzano δεν δουλευει.

Θεωρω παραγουσα $F(x)=x^4+\lambda x^3+(\lambda-2)x^2+(1-2\lambda)x$

η οποια ειναι συνεχης στο $[0,1]$ και παραγωγισιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμο.

$F(0)=0$ και $F(1)=0$ αρα $F(0)=F(1)$

αρα απο Rolle $\exists \xi\in(0,1)$ τ.ω $F'(\xi)=0$

$\Leftrightarrow f(\xi)=0 \Leftrightarrow 4\xi^3+3\lambda\xi^2+2(\lambda-2)\xi-2\lambda+1=0$

$\xi\in(0,1)$.

Ασκηση 7

Δινεται συναρτηση $f(x) = x^2(\lambda+1+\ln x) - 3(\lambda+1)x - 4\ln x$

Νδο $\forall \lambda \in R$, $\exists \xi \in (1,2)$ ωστε η εφαπτομενη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να ειναι παραλληλη στον $x'x$.

Η εφαπτομενη στο $M(\xi, f(\xi))$ ειναι

$$\varepsilon : y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$$

Αρκει νδο $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

1. Η $f(x)$ συνεχης στο $[1,2]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

2. Η $f(x)$ παραγωγισιμη στο $(1,2)$ ως πραξεις παραγωγισιμων συναρτησεων

3. $f(1) = -2\lambda-2$ και $f(2) = -2\lambda-2$

Αρα απο Rolle $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

Ασκηση 8

Δινεται παραγωγισιμη $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ωστε $f(0) = e^{6}$

και $f(3) = e^{-3}$

ⓐ ΝΔΟ $\exists x_1 \in (0,3)$ τ.ω $f'(x_1) = -3f(x_1)$

$f'(x) = -3f(x) \Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = 0$

$$e^{3x} f'(x) + 3e^{3x} f(x) = 0$$

$$\left[e^{3x} f(x)\right]' = 0$$

Θετω $g(x) = 3$
$\Rightarrow G(x) = 3x$
αρα
$e^{G(x)} = e^{3x}$

Θεωρω $\varphi(x) = e^{3x} f(x)$ η

οποια ειναι συνεχης στο $[0,3]$ και

παραγωγισιμη στο $(0,3)$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= f(0) = e^{6} \\ \varphi(3) &= e^{9} f(3) = e^{9} e^{-3} = e^{6} \end{aligned}\right\} \varphi(0) = \varphi(3) \text{ αρα}$$

απο Rolle $\exists x_1 \in (0,3)$ τ.ω $\varphi'(x_1) = 0$

$$\Leftrightarrow e^{3x_1} f'(x_1) + 3e^{3x_1} f(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) + 3f(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) = -3f(x_1)$$

Ⓑ Νδο $\exists x_2 \in (0,3)$ τ.ω $f'(x_2) + 2x_2 f(x_2) = 0$

$f'(x) + 2x f(x) = 0 \iff e^{+x^2} f'(x) + 2x e^{+x^2} f(x) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = +2x \text{ αρα} \\ G(x) = +x^2 \text{ συνεπω} \\ e^{G(x)} = e^{+x^2} \end{array}}$$

$\left[e^{+x^2} f(x) \right]' = 0$

Θεωρω $\varphi(x) = e^{+x^2} f(x)$ η

οποια ειναι συνεχης στο $[0,3]$ και παραγωγισιμη

στο $(0,3)$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = f(0) = e^6 \\ \varphi(3) = e^9 \cdot f(3) = e^9 e^{-3} = e^6 \end{array}\right\} \varphi(0) = \varphi(3) \text{ αρα}$$

απο Rolle $\exists x_2 \in (0,3)$ τ.ω $\varphi'(x_2) = 0$

$\iff e^{x_2^2} f'(x_2) + 2x_2 e^{x_2^2} f(x_2) = 0$

$f'(x_2) + 2x_2 f(x_2) = 0$

Ασκηση 9

Νδο οι $f(x) = e^x + x^2$ και $g(x) = \alpha x + \beta$ εχουν το πολυ δυο κοινα σημεια.

Τα κοινα σημεια των C_f, C_g προκυπτουν απο την εξισωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^x + x^2 - \alpha x - \beta = 0$

Θεωρω $\varphi(x) = e^x + x^2 - \alpha x + \beta$.

Εστω οτι η $\varphi(x)$ εχει τρεις ριζες x_1, x_2, x_3. $(x_1 < x_2 < x_3)$

Προφανως $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ αρα απο Rolle $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$ τ.ω $\varphi'(\xi_1) = 0$

$\varphi(x_2) = \varphi(x_3)$ αρα απο Rolle $\exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τ.ω $\varphi'(\xi_2) = 0$

$\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2)$ αρα απο Rolle $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω $\varphi''(\xi) = 0$

ομως $\varphi'(x) = e^x + 2x - \alpha$ και $\varphi''(x) = e^x + 2$

και $\varphi''(\xi) = e^\xi + 2 = 0$ Ατοπο! Αρα η $\varphi(x)$ δεν μπορει να εχει τρεις ριζες συνεπως εχει το πολυ δυο.

Ασκηση 10

Δινεται $f: R \longrightarrow R$ δυο φορες παραγωγισιμη ωστε $f(0) = f(1) = f(2)$. Ν.δ.ο $\exists\, \xi \in (0,2)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$

Η $f(x)$ ικανοποιει τις προυποθεσεις του Rolle

στο $[0,1]$ και $[1,2]$

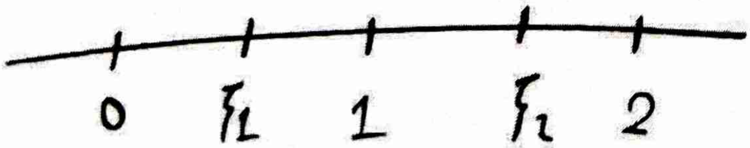
αρα $\exists\, \xi_1 \in (0,1)$ τ.ω $f'(\xi_1)=0$

αρα $\exists\, \xi_2 \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi_2)=0$

ομως τωρα η $f'(x)$ ικανοποιει τον Rolle

στο $[\xi_1, \xi_2]$ αφου $f'(\xi_1)= f'(\xi_2)$ αρα

$\exists\, \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω $f''(\xi)=0$

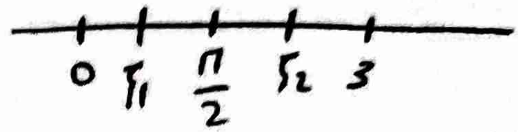


Ασκηση 11

Νδο η εξισωση $x^2+συνx=2x$ εχει ακριβως δυο ριζες οι οποιες ανηκουν στο $(0,3)$

$x^2+συνx=2x \Leftrightarrow x^2+συνx-2x=0$

Θεωρω $f(x)=x^2+συνx-2x$



• $f(0)=1$

• $f(\frac{π}{2})=\frac{π^2}{4}-π=\frac{π^2-4π}{4}=\frac{π(π-4)}{4}<0$

αρα $f(0)f(\frac{π}{2})<0$ αρα απο Bolzano

$\exists ξ_1 \in (0,\frac{π}{2})$ τ.ω $f(ξ_1)=0$

• $f(3)=9+συν3-6=3+συν3>0$

αρα $f(\frac{π}{2})f(3)<0$ αρα απο Bolzano

$\exists ξ_2 \in (\frac{π}{2},3)$ τ.ω $f(ξ_2)=0$.

Συνεπως η $f(x)$ εχει τουλαχιστον δυο ριζες στο $(0,3)$

Εστω οτι η $f(x)$ εχει τρεις ριζες στο $(0,3)$

οπου $ρ_1<ρ_2<ρ_3$

τοτε $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ Rolle $\exists\, k_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τ.ω $f'(k_1) = 0$

$f(\rho_2) = f(\rho_3)$ Rolle $\exists\, k_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τ.ω $f'(k_2) = 0$

$f'(k_1) = f'(k_2)$ Rolle $\exists\, k \in (k_1, k_2)$ τ.ω $f''(k) = 0$

ομως $f'(x) = 2x - ημx - 2$ και $f''(x) = 2 - συνx > 0$

αρα $f''(k) = 0$ Ατοπο!

Συνεπως η $f(x)$ δεν μπορει να εχει τρεις ριζες αρα θα εχει το πολυ δυο.

Ασκηση 12

Δινεται $f: R \to R$ δυο φορες παραγωγισιμη

ωστε $f(1)-f(0)=2$ και $f''(x)<2 \quad \forall x \in R$

Νδο υπαρχει μοναδικο $\xi \in (0,1)$ ωστε $f'(\xi)=4\xi^3+2\xi$

$f'(x)=4x^3+2x \iff f'(x)-4x^3-2x=0 \iff \left(f(x)-x^4-x^2\right)'=0$

Θεωρω $g(x)=f(x)-x^4-x^2$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=f(0) \\ g(1)=f(1)-2=f(0) \end{array}\right\} g(0)=g(1) \text{ απο Rolle}$$

$\exists \xi \in (0,1)$ τ.ω $g'(\xi)=0 \iff f'(\xi)-4\xi^3-2\xi=0$

$f'(\xi)=4\xi^3+2\xi$

Τωρα θα δειξω οτι η εξισωση $f'(x)-4x^3-2x=0$

εχει το πολυ μια λυση.

Θεωρω $\varphi(x)=f'(x)-4x^3-2x$. Εστω οτι η $\varphi(x)$

εχει δυο ριζες $x_1<x_2$

$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ απο Rolle $\exists k \in (x_1,x_2)$ τ.ω $\varphi'(k)=0$

$\varphi'(x)=f''(x)-12x^2-2=f''(x)-2-12x^2<0$ αρα $\varphi'(k)=0$!
Ατοπο

αρα η $\varphi(x)$ δεν μπορει να εχει δυο ριζες αρα εχει μια.

Άσκηση 13

Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $f(1)=4$, $f(2)=3$

α) Ν.δ.ο $\exists x_0 \in (1,2)$ τ.ω $f(x_0)=x_0^2$

$f(x)=x^2 \Leftrightarrow f(x)-x^2=0$

Έστω $\varphi(x)=f(x)-x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1)=f(1)-1=4-1=3 \\ \varphi(2)=f(2)-4=3-4=-1 \end{array}\right\} \varphi(1)\varphi(2)<0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (1,2)$ τ.ω $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0^2=0$

$f(x_0)=x_0^2$

β) ν.δ.ο $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $f(\xi)+\xi f'(\xi)=f'(\xi)+3\xi^2-2\xi$

$f(x)+xf'(x)-f'(x)-3x^2+2x=0$

$(xf(x)-f(x)-x^3+x^2)'=0$ Θεωρώ $h(x)=(x-1)f(x)-x^3+x^2$

$((x-1)f(x)-x^3+x^2)'=0$

$h(x_0)=(x_0-1)f(x_0)-x_0^3+x_0^2=(x_0-1)x_0^2-x_0^3+x_0^2=$

$=x_0^3-x_0^2-x_0^3+x_0^2=0$

$h(1)=0$. Επειδή $h(x_0)=h(1)$ Rolle $\exists \xi \in (1,x_0)$

τ.ω $h'(\xi)=0$

$\Leftrightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)-f'(\xi)-3\xi^2+2\xi=0$