Θεματικη Ενοτητα

Το Θεωρημα του Bolzano

Θεωρημα Bolzano

Εστω f φραγμενη σε $[α, β]$

1. Αν f συνεχης στο $[α, β]$
2. Αν $f(α) \cdot f(β) < 0$

Τοτε υπαρχει τουλαχιστον ενα $ξ \in (α, β)$

τετοιο ωστε $f(ξ) = 0$

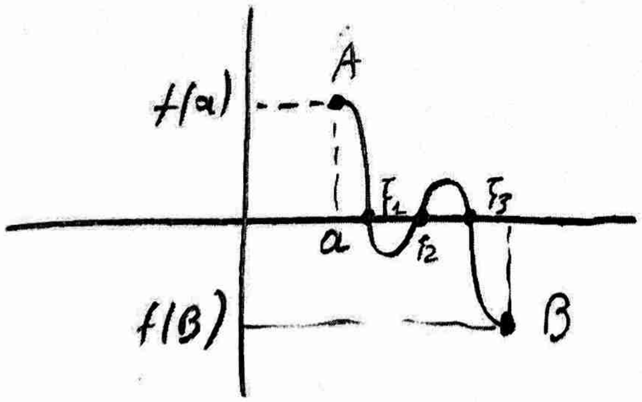
Γεωμετρικη ερμηνεια Bolzano

Εαν τα σημεια $A(α, f(α))$ και $B(β, f(β))$

βρισκονται εκατερωθεν του $x'x$ τοτε

η C_f τεμνει τον $x'x$ τουλαχιστον

μια φορα στο $(α, β)$



$\boxed{\text{Προσοχη}}$

1. Το Θεωρημα Bolzano εξασφαλιζει την υπαρξη τουλαχιστον μιας ριζας της εξισωσης $f(x)=0$
Δεν μας λεει ποια ειναι αυτη η ριζα.
Μπορει να εχει περισσοτερες απο μια ριζα. στο $(α,β)$

2. Το αντιστροφο του Bolzano δεν ισχυει.
Αν υπαρχει $ξ \in (α,β)$ τ.ω $f(ξ)=0$ αυτο δεν σημαινει οτι $f(α)\cdot f(β)<0$

3. Αν η f δεν ικανοποιει τις προυποθεσεις του Bolzano αυτο δεν σημαινει οτι η εξισωση $f(x)=0$ δεν εχει ριζα.

4. Αν η f ορισμενη στο $[α,β]$, συνεχης στο $[α,β]$ και $f(α)\cdot f(β)\leq 0$ τοτε απο Bolzano $\exists ξ \in [α,β]$ τ.ω $f(ξ)=0$.
Δηλαδη εδω το $ξ=α$ ή $ξ=β$ η $ξ\in(α,β)$

Ασκηση 1

Δινεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ημx + x^2 + 3x}{x}, & -π \le x < 0 \\ e^x - x + 3, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Να εξετασεις αν η $f(x)$ ικανοποιει τις προυποθεσεις του Bolzano στο $[-π, 1]$

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[-π, 0)$ και $(0, 1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{ημx + x^2 + 3x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{ημx}{x} + x + 3\right) = 4$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x - x + 3) = 4.$

Αρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$ και $f(0) = 4$ αρα συνεχης

στο 0 αφου $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

Αρα Συνεχης στο $[-π, 1]$

Επισης $f(-π) = \dfrac{π^2 - 3π}{-π} = 3 - π < 0$ και $f(1) = e + 2 > 0$

αρα $f(-π)f(1) < 0$ συνεπως ικανοποιειται ο Bolzano.

Ασκηση 2

ΝΔΟ η εξισωση $3x+\ln x^4=x^2+4$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(1,e)$

$3x+\ln x^4-x^2-4=0$

Θεωρω $f(x)=3x+\ln x^4-x^2-4$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,e]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(1)=-2$

$f(e)=3e+4-e^2-4=3e-e^2=e(3-e)>0$

Αρα $f(1)f(e)<0$

Συνεπως απο Bolzano $\exists\,\xi\in(1,e)$ τ.ω $f(\xi)=0$

$\Leftrightarrow\ 3\xi+\ln\xi^4-\xi^2-4=0$

$\Leftrightarrow\ 3\xi+\ln\xi^4=\xi^2+4,\quad \xi\in(1,e).$

Ασκηση 3

Νδο η εξισωση $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{e^x+1}{x-2} = 0$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(1,2)$

Πολ/ζω με το ΕΚΠ των παρονομαστων. και εχω

$$(x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1) = 0$$

Θεωρω $f(x) = (x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1)$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,2]$ ως πραξ/ συνεχων συναρτησεων.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(2) = e^2+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(1)f(2)<0 \quad \text{Bolzano } \exists \xi \in (1,2) \\ \text{τ.ω } f(\xi) = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\xi^2+1)(\xi-2) + (\xi-1)(e^\xi+1) = 0$$

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-1} + \frac{e^\xi+1}{\xi-2} = 0 \quad , \xi \in (1,2).$$

Ασκηση 4

Δινεται συνεχης $f: [\alpha, \beta] \to R$ οπου η C_f διερχεται απο το $A(\alpha, -1)$. ΝΔΟ $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$

Θεωρω την εξισωση $x(f(x) - 1) = \beta f(x) - \alpha$.

$x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha = 0$.

Εστω $g(x) = x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha$ η οποια ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$ ως πραξεις συνεχων αναρτησεων.

$g(\alpha) = \alpha(f(\alpha) - 1) - \beta f(\alpha) + \alpha = \alpha f(\alpha) - \alpha - \beta f(\alpha) + \alpha$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha > 0$

$g(\beta) = \beta(f(\beta) - 1) - \beta f(\beta) + \alpha = \beta f(\beta) - \beta - \beta f(\beta) + \alpha$

$\Leftrightarrow g(\beta) = \alpha - \beta < 0$

Αρα $g(\alpha) g(\beta) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $g(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) - \beta f(x_0) + \alpha = 0$

$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$

Ασκηση 5

Δινονται $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$

ⓐ Νδο η C_f εχει ενα τουλαχιστον κοινο σημειο με τον $x'x$, του οποιου η τετμημενη ανηκει στο $(0,1)$.

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{array}\right\} \text{Bolzano } \exists\, \xi \in (0,1) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0.$$

ⓑ Νδο οι C_f και C_g εχουν τουλαχιστον ενα κοινο σημειου του οποιου η τετμημενη ανηκει στο $(-1,0)$.

Τα κοινα σημεια των C_f, C_g προκυπτουν απο την εξισωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - e^x = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 3x - e^x - x^2 + 4 = 0$

Θεωρω $\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-1,0]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0$

$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0$

Αρα Bolzano $\exists \xi \in (-1,0)$ τ.ω $\varphi(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow 3\xi - e^{\xi} - \xi^2 + 4 = 0$

$3\xi - e^{\xi} = \xi^2 - 4$

$f(\xi) = g(\xi)$.

Ασκηση 6

Δινεται συνεχης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ωστε $f(-1) = 2k$

και $f(2) = -\lambda$. Νδο $\exists \xi \in [-1,2]$ τ.ω $k - f(\xi) = \lambda \xi$

Θεωρω την εξισωση $k - f(x) = \lambda x$

$\Leftrightarrow k - f(x) - \lambda x = 0$

Εστω $\varphi(x) = k - f(x) - \lambda x$ η οποια ειναι

συνεχης στο $[-1,2]$ ως πραξεις συνεχων

συναρτησεων.

$\varphi(-1) = k - f(-1) + \lambda = k - 2k + \lambda = \lambda - k$

$\varphi(2) = k - f(2) - 2\lambda = k + \lambda - 2\lambda = k - \lambda$

Αρα $\varphi(-1)\varphi(2) = -(k-\lambda)^2 \leq 0$ αρα απο Bolzano $\exists \xi \in [-1,2]$

τ.ω $\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow k - f(\xi) - \lambda\xi = 0$

$k - f(\xi) = \lambda \xi$.

Ασκηση 7

Νδο η εξισωση $e^x = 3-2x$ εχει μοναδικη

ριζα η οποια ανηκει στο $(0,1)$

$e^x - 3 + 2x = 0$

Θεωρω $f(x) = e^x - 3 + 2x$ η οποια ειναι συνεχης

στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(1) = e-1 > 0 \end{array}\right\} f(0)f(1) < 0$$

Bolzano $\exists\ \xi \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$f'(x) = e^x + 2 > 0$ αρα $f \nearrow$ συνεπως το ξ

ειναι μοναδικη ριζα της $f(x)$.

Ασκηση 8

Νδο η εξισωση $x^4-2x^3-x^2+4=0$ εχει μια τουλαχιστον λυση στο $(1,2)$.

Εδω αν θεσω $f(x)=x^4-2x^3-x^2+4$ τοτε θα δω οτι $f(2)=0$ συνεπως ο Bolzano δεν δουλευει στο $(1,2)$. Το 2 ομως ειναι ριζα συνεπως θα κανω Horner.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ \downarrow & 2 & 0 & -2 & -4 & \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Αρα η εξισωση γινεται $(x-2)(x^3-x-2)=0$.

$\Leftrightarrow x=2$ ή $x^3-x-2=0$.

Θεωρω $g(x)=x^3-x-2$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,2]$ ως πολυωνυμικη.

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=-2 \\ g(2)=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g(1)g(2)<0 \text{ αρα απο Bolzano} \\ \exists\, \xi\in(1,2) \text{ τ.ω } g(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^3-\xi-2=0. \end{array}$$

Ασκηση 9

Εστω συνεχης $f: [0,1] \to R$ με $-1 < f(x) < 0$ $\forall x \in [0,1]$. Νδο $\exists$ $x_0 \in (0,1)$ τ.ω

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

$f^2(x) = 2f(x) + 3x \iff f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$

Θεωρω συναρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[0,1]$ ως πραξη συνεχων συναρτησεων.

$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = f(0)\,(f(0) - 2) > 0$

- $-1 < f(0) < 0 \iff -3 < f(0) - 2 < -2$

$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (f(1) - 3)(f(1) + 1) < 0$

- $-1 < f(1) < 0 \iff -4 < f(1) - 3 < -3$
- $-1 < f(1) < 0 \iff 0 < f(1) + 1 < 1$

Αρα $g(0)g(1) < 0$ απο Bolzano $\exists$ $x_0 \in (0,1)$ τ.ω $g(x_0) = 0 \iff f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$.

Ασκηση 10

Νδο η εξισωση $x^4+\beta x^2+\gamma x-2022=0$ εχει μια τουλαχιστον θετικη ριζα.

Θεωρω $f(x)=x^4+\beta x^2+\gamma x-2022$ η οποια ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικη.

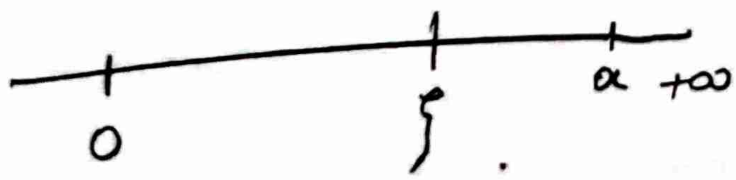
$f(0)=-2022$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ αρα $\exists\, \alpha$ κοντα στο $+\infty$

τ.ω $f(\alpha)>0$

$f(0)f(\alpha)<0$ αρα απο Bolzano $\exists\, \xi\in(0,\alpha)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Αρα $\exists\, \xi>0$ τ.ω $\xi^4+\beta\xi^2+\gamma\xi-2022=0$.



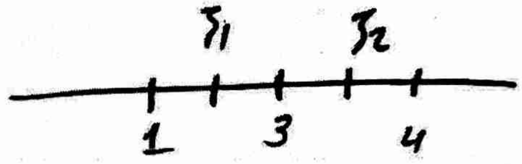
Ασκηση 11

Νδο η εξισωση $(3-x)\ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ εχει δυο τουλαχιστον ριζες στο $(1,4)$

$(3-x)\ln x - x^3 + 5x^2 - 5x = 0$

Θεωρω $f(x) = (3-x)\ln x - x^3 + 5x^2 - 5x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[1,4]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$f(1) = -1 < 0$



$f(3) = 3 > 0$

$f(4) = -\ln 4 - 4 < 0$

Αφου $f(1)f(3) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (1,3)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφου $f(3)f(4) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (3,4)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

Αρα η συναρτηση $f(x)$ εχει δυο τουλαχιστων ριζες στο $(1,4)$. Συνεπως η εξισωση $(3-x)\ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ εχει δυο τουλαχιστων ριζες στο $(1,4)$.

Ασκηση 12

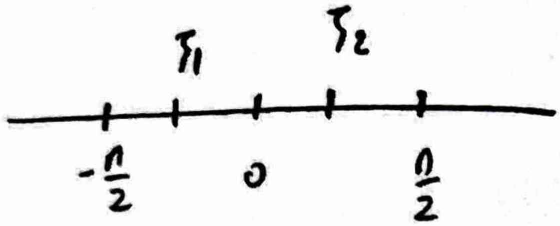
Νδο η εξισωση $x^2 = \sigma\upsilon\nu x$ εχει ακριβως δυο ριζες στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Θεωρω $f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων.

$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$

$f(0) = -1 < 0$

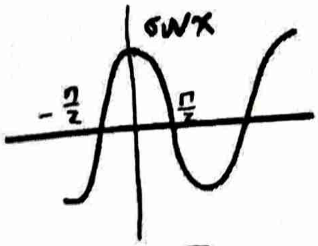
$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$



Αφου $f(-\frac{\pi}{2})f(0) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφου $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$



$+$

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 > -\sigma\upsilon\nu x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \downarrow$ αρα ξ_1 μοναδικη στο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$+$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \uparrow$ αρα ξ_2 μοναδικη στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ασκηση 13

Νδο η εξισωση $\ln x = x^2-4x+2$ εχει μια τουλαχιστον λυση στο $(0,1)$.

Θεωρω $f(x)= \ln x - x^2+4x-2$

Ειναι προφανες οτι το $f(0)$ δεν οριζεται.

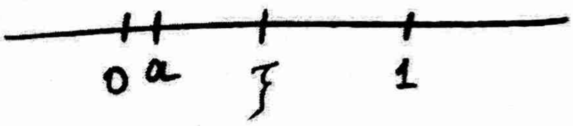
ομως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ αρα $\exists\, \alpha$ κοντα στο 0^+

τ.ω $f(\alpha)<0$. Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[\alpha,1]$

ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(\alpha)<0$

$f(1)=1>0$



Αφου $f(\alpha)f(1)<0$ απο Balzano $\exists\, \xi \in (\alpha,1)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Δηλαδη $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $\ln \xi = \xi^2-4\xi+2$.

Ασκηση 14

Νδο η εξισωση $4x^3-6x^2+1=0$ εχει ακριβως τρεις ριζες στο $(-1,2)$

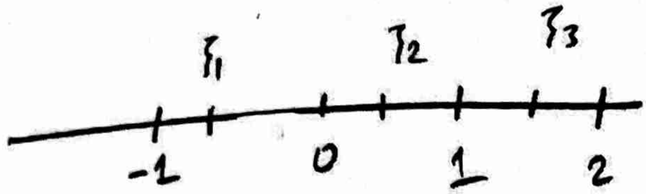
Θεωρω $f(x)=4x^3-6x^2+1$ η οποια ειναι συνεχης στο $[-1,2]$ ως πραξεις συνεχων συναρτησεων

$f(-1)=-9<0$

$f(0)=1>0$

$f(1)=-1<0$

$f(2)=9>0$



Αφου $f(-1)f(0)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_1 \in (-1,0)$ τ.ω $f(\xi_1)=0$

Αφου $f(0)f(1)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_2 \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi_2)=0$

Αφου $f(1)f(2)<0$ απο Bolzano $\exists \xi_3 \in (1,2)$ τ.ω $f(\xi_3)=0$

Η $f(x)$ ειναι πολυωνυμο 3ου βαθμου αρα εχει το πολυ τρεις ριζες.

Συνεπως εχει ακριβως τρεις.

Ασκηση 15

Εστω $f: R \to R$ με $f(0)=0$ κυρτη
και $f(x) \leq 3x \quad \forall x \in [0,1]$

Νδο η εξισωση $x\int_0^1 f(t^2)\,dt = 2x-1$

εχει μοναδικη ριζα στο $(0,1)$.

$$\underbrace{x\int_0^1 f(t^2)\,dt - 2x+1}_{g(x)} = 0$$

Το $\int_0^1 f(t^2)\,dt$ ειναι πραγματικος αριθμος

Η $g(x)$ ειναι συνεχης στο $[0,1]$ ως π.σ.σ

$$g(0) = 1 > 0$$

$$g(1) = \int_0^1 f(t^2)\,dt - 1$$

Αρκει νδο $\int_0^1 f(t^2)\,dt - 1 < 0$

$$\int_0^1 f(t^2)\,dt < 1.$$

Γνωρίζω ότι $f(x) \leq 3x$

$$f(x^2) \leq 3x^2$$

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx \leq \int_0^1 3x^2\,dx$$

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx \leq (x^3)_0^1$$

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx \leq 1$$

ή $\int_0^1 f(t^2)\,dt \leq 1$.

Άρα $g(0)g(1) < 0$ άρα Bolzano

$\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$.

Η $g(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού

άρα το ξ μοναδική ρίζα.