Θεματικη Ενοτητα

Θεωρητικη

υπαρξη

1. ριζα,
2. Ακροτατου
3. Σημειου καμπης,
4. κρισιμου σημειου.

1. Νδο η $f(x)=e^x+x^2-2x+3$ εχει μοναδικο ακροτατο

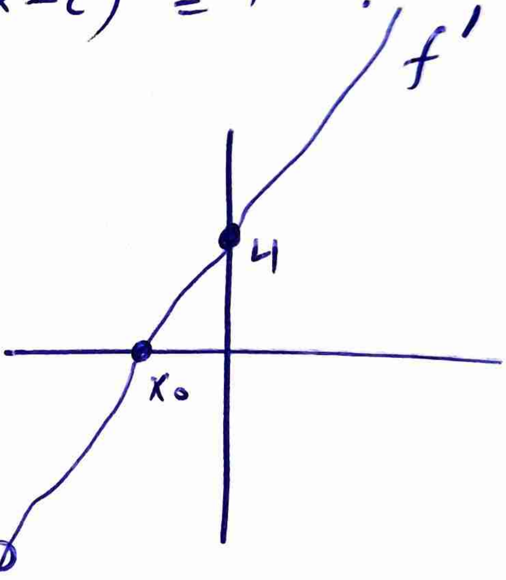
$f'(x)=e^x+2x-2$

$f''(x)=e^x+2>0 \Rightarrow \boxed{f' \nearrow}$

$\Sigma T_{f'}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2x-2)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+2x-2)=+\infty$.

$\Sigma T_{f'}=\mathbb{R}$.



- f' συνεχης
- $f' \nearrow$
- $\Sigma T_{f'}=\mathbb{R}$

$\Big\}$ Το $0\in\Sigma T_{f'}$ αρα $\exists!\, x_0$ τ.ω $f'(x_0)=0$

x		x_0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0) \Rightarrow f'(x)<0$

$x>x_0 \Rightarrow f'(x)>f'(x_0) \Rightarrow f'(x)>0$.

2. Νδο η $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$ εχει μοναδικο κρισιμο σημειο.

Κανω τα ιδια ακριβως εως το συμπερασμα οτι $f'(x_0) = 0$.

Δηλαδη αποδεικνυω οτι η $f'(x)$ εχει μοναδικη ριζα και τελος.

3. Νδο η $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ εχει μοναδικο ακροτατο στο $x_0 \in (0,1)$

$f'(x) = e^x + 2x - e$

$f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow$.

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$

Bolzano $\exists!\, x_0 \in (0,1)$ τ.ω $f'(x_0) = 0$

x		x_0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

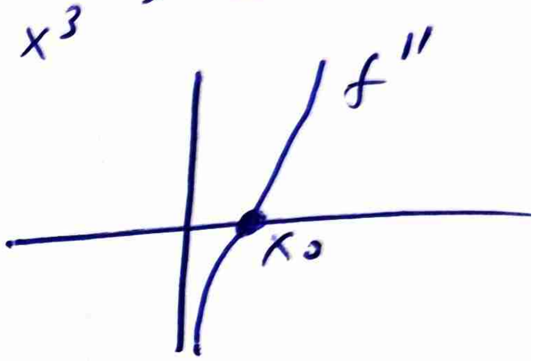
4. Νδο η $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x + \ln x$ εχει μοναδικο σημειο καμπης

$$f'(x) = e^x - x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = e^x - 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{-2x}{x^4} = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$$

f'' ↗



$\Sigma T_{f''}$

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet \lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^x - 1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \\
&\bullet \lim_{x \to +\infty} f''(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - 1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty
\end{aligned}\right\} \Sigma T_{f''} = \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned}
&f'' \text{ συνεχης} \\
&f'' \nearrow \\
&\Sigma T_{f''} = \mathbb{R}
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&\text{Το } 0 \in \Sigma T_{f''} \\
&\text{αρα } \exists!\, x_0 \text{ τ.ω} \\
&f''(x_0) = 0
\end{aligned}$$

x		x_0	
f'''	+		+
f''	↗ −	0	+ ↗
f	∩		∪

5. Νδο η $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$ όπου $x \in (0,2)$ έχει ακριβώς 2 ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

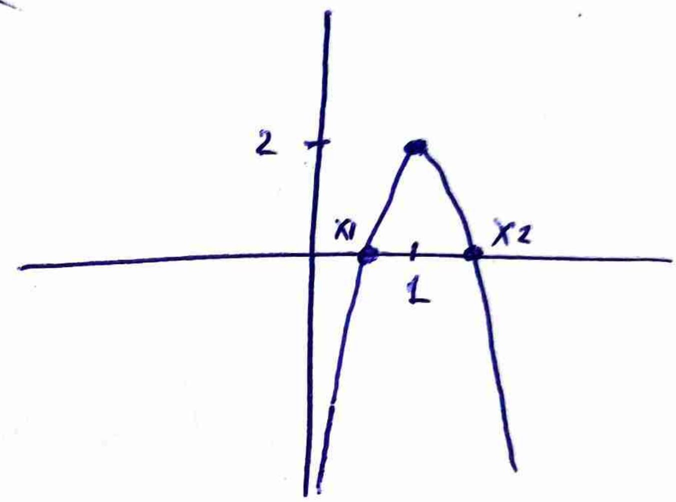
ΣΤf

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+2-x}{(2-x)x^2} = \frac{-x^2-x+2}{(2-x)x^2}$$

$\longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0$

$\cancel{x=-2}$ $\quad$ $x=1$

x	0	1	2
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow -\infty$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2 - \infty = -\infty$

$f(1) = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$0<x<1$

- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (-\infty, 2)$
- $f \nearrow$

το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_1$

τ.ω.

$f(x_1)=0$

$2>x>1$

- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (-\infty, 2)$
- $f \searrow$

το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_2$

τ.ω.

$f(x_2)=0$.

6. Νδο η $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + xe^x - 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει δύο τοπικά ακρότατα.

Πρέπει να βρω το $\Sigma T_{f'}$ και νδο η f' έχει δύο ρίζες

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + e^x + xe^x - 2e^x = x^2 + xe^x - e^x$$

$$f''(x) = 2x + e^x + xe^x - e^x = 2x + xe^x = x(e^x+2)$$

$\rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$
f			

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2 + xe^x - e^x) = +\infty$$

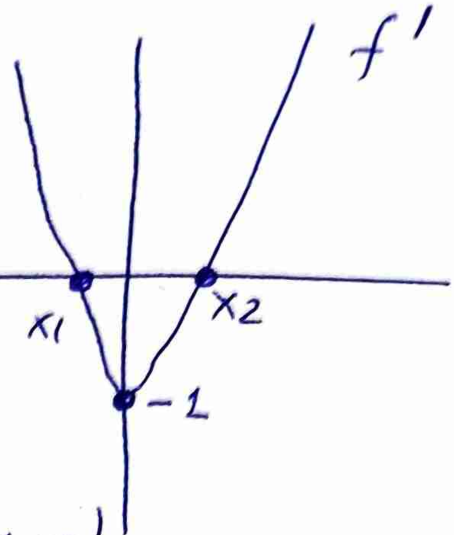
$$\rightarrow \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$$f'(0) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 + xe^x - e^x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{e^x} + x - 1\right) = +\infty(0 + \infty - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$



x < 0

- f' συνεχής
- f' ↓
- $ΣΤ_{f'} = (-1, +\infty)$

το $0 \in ΣΤ_{f'}$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω $f'(x_1)=0$

x ≥ 0

- f' συνεχής
- f' ↑
- $ΣΤ_{f'} = [-1, +\infty)$

το $0 \in ΣΤ_{f'}$

άρα $\exists!\, x_2$ τ.ω $f'(x_2)=0$

x		x_1		0		x_2	
f''	−		−	0	+		+
f'	↘ +	0	− ↘		− ↗	0	↗ +
f	↗		↘		↘		↗

7. Νδο η $f(x) = e^x$ εχει ακριβως δυο εφαπτομενες που διερχονται απο το $A(0,\frac{1}{2})$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Τυχαια εφαπτομενη στο x_0

διερχεται $A(0,1)$

$\frac{1}{2} - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$

$\frac{1}{2} - f(x) = f'(x)(-x)$

$\frac{1}{2} - e^x = -xe^x$

$\underbrace{xe^x - e^x + \frac{1}{2} = 0}_{g(x)=0}$ Αρκει νδο η $g(x)$ εχει 2 ριζες ακριβως.

$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

$\rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\frac{1}{2} \searrow$		$\nearrow$

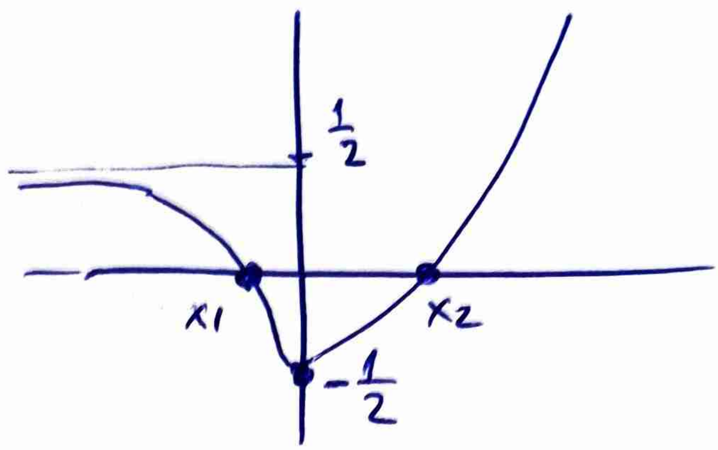
$\underline{\Sigma T_g}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - e^x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

$g(0) = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^x - e^x + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(x - 1 + \frac{1}{2e^x}\right) = +\infty$



x<0

- g συνεχης
- g ↘
- $\Sigma T g = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Το $0 \in \Sigma T g$

αρα $\exists!\, x_1$

τ.ω $g(x_1) = 0$

x≥0

- g συνεχη
- g ↗

$\Sigma T g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Το $0 \in \Sigma T g$

αρα $\exists!\, x_2$ τ.ω

$g(x_2) = 0$.

Αρα η g(x) εχει ακριβως δυο ριζες x_1, x_2 αρα υπαρχουν ακριβως δυο εφαπτομενες της f(x) στα x_1, x_2 που διερχονται απο το A.