

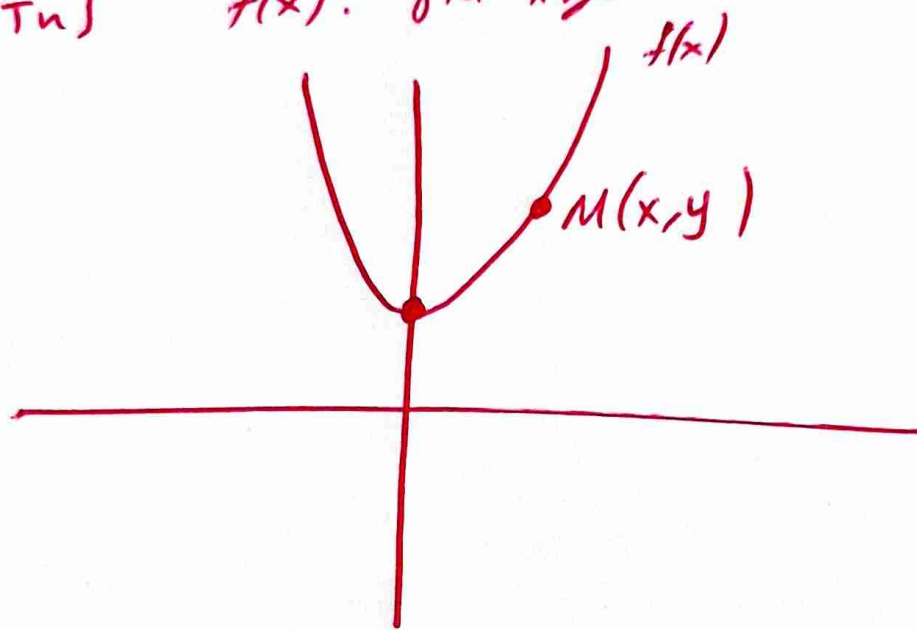
Θεραπευτική Ευεστία

Ρυθμός

Μεταβολή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$

Ένα υλικό σωμα M κινείται κατά
μήκος της γραφικής παράστασης
της $f(x)$, για $x \geq 0$



Η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό
 1 μονάδα/sec.

Τη χρονική στιγμή που το υλικό σωμα
 M διέρχεται από το $A(1, 2)$
να υπολογιστεί ο ρυθμός μετα-
βολής.

1.

του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ
όπου Κ η προβολή του Μ στον άξονα
και Ο η αρχή των αξόνων.

Εστω t_0 η τυχούσα
χρονική στιγμή.

Αναγκαία Ενέργεια

Πρέπει να βρω το $y'(t_0)$

$$y = x^2 + 1$$

$$y(t) = x^2(t) + 1$$

$$y'(t) = 2x(t) x'(t)$$

$$\underline{t = t_0}$$

$$y'(t_0) = 2x(t_0) x'(t_0)$$

$$y'(t_0) = 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\boxed{y'(t_0) = 2}$$

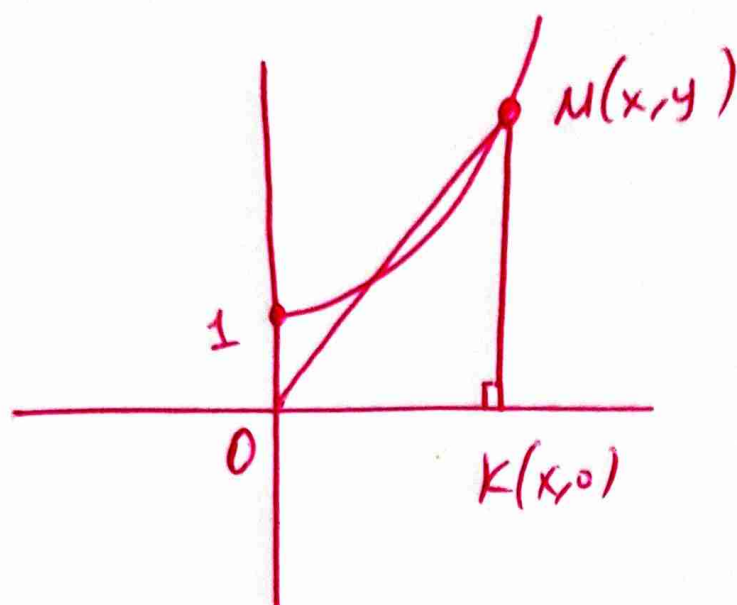
Συμπέρασμα

$$x'(t) = 1$$

$$x(t_0) = 1$$

$$y(t_0) = 2$$

$$y'(t_0) = 2$$



$$E = \frac{B \cdot V}{2}$$

$$E = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t)$$

Ο ρυθμός μεταβολής τας εμβαδών
την τυχαία χρονική στιγμή t είναι

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t)y(t) + x(t)y'(t)]$$

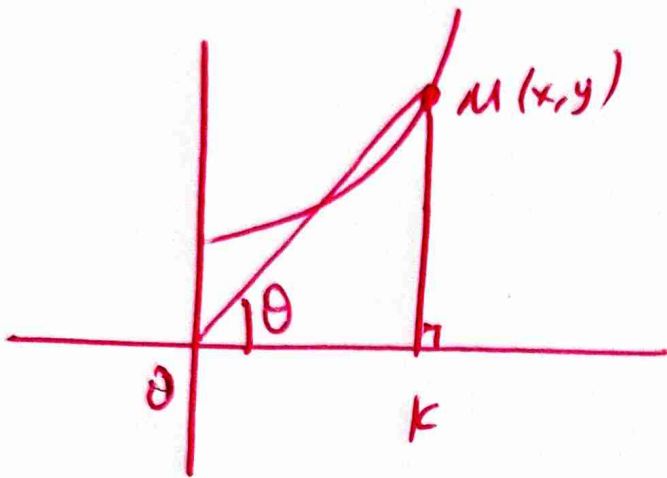
$$\underline{t = t_0}$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0))$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = 2$$

$$\boxed{E'(t_0) = 2}$$

2.

της γωνίας $\hat{\theta} = \hat{MO}k$ 

$$\varepsilon\varphi \hat{\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\varepsilon\varphi \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ των τυχαία χρονικά στιγμή δίνεται ως

$$\frac{1}{\sigma\omega^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

Γνωρίζω ότι $\sigma\omega^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{\sigma\omega^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$

$$\text{αρα } \frac{1}{\sigma\omega^2\theta(t)} = 1 + \varepsilon\varphi^2 \theta(t) = 1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)^2$$

αρα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\left(1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)} \right) \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

$$\Gamma_{\omega} \quad t = t_0 \quad \varepsilon \times \omega$$

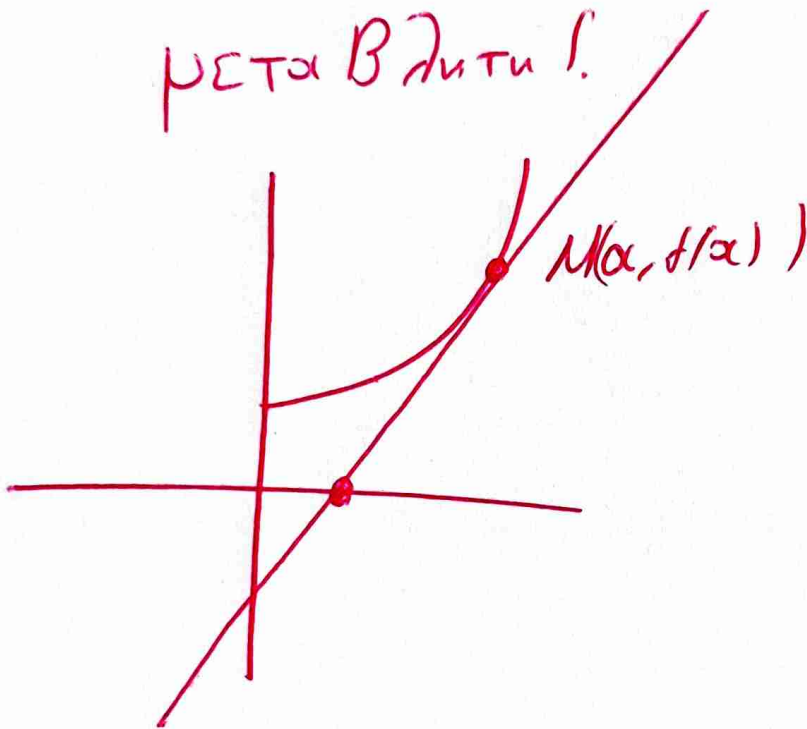
$$\left(1 + \frac{y^2(t_0)}{x^2(t_0)} \right) \theta'(t_0) = \frac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}$$

$$\left(1 + \frac{4}{1} \right) \theta'(t_0) = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{1}$$

$$\frac{5}{4} \theta'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta'(t_0) = 0}$$

3. Την τετρίμωνα του σφαιρού
τομή της εφαπτομένης της γραφικής
παραστάσεως της $f(x)$ με τον $x'x$

Εδω απαιτείται αλλαγή
μεταβλητή!



$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

$$\frac{x'x}{y=0}$$

$$-a^2 - 1 = 2ax - 2a^2$$

$$a^2 - 1 = 2ax$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a}, \quad a \neq 0$$

$$x(t) = \frac{a^2(t) - 1}{2a(t)}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετριμάνης του σιφασυ τούρης της εφαιτορικής με τον $x'x$ δίνεται ως,

$$x'(t) = \frac{1}{2} \frac{2a(t)a'(t) \cdot a(t) - (a^2(t) - 1)a'(t)}{a^2(t)}$$

Για $t = t_0$

$$x'(t_0) = \frac{1}{2} \frac{2a(t_0)a'(t_0) \cdot a(t_0) - (a^2(t_0) - 1)a'(t_0)}{a^2(t_0)}$$

Προσέγγ

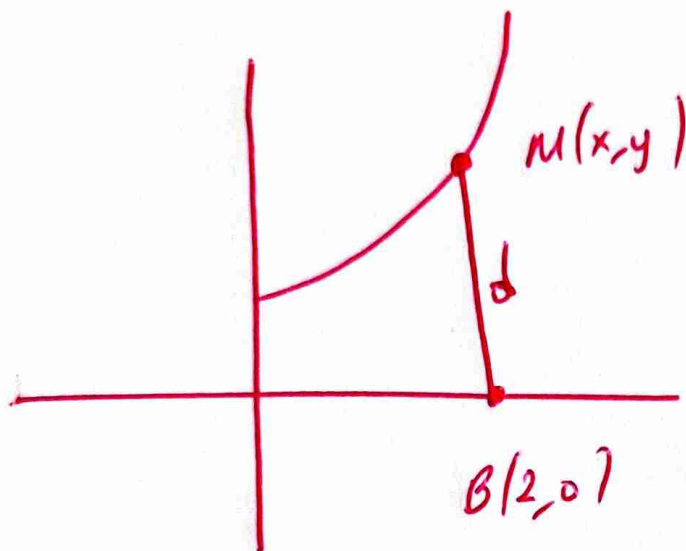
$$\begin{aligned} a(t_0) &= 1 \\ a'(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

$$x'(t_0) = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 - (1 - 1) \cdot 1}{1^2}$$

$$x'(t_0) = 1$$

4.

Της απόστασης του Μ από
το B(2,0)



$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{(x(t)-2)^2 + y^2(t)}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης

είναι
$$d'(t) = \frac{2(x(t)-2)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{(x(t)-2)^2 + y^2(t)}}$$

Για $t=t_0$

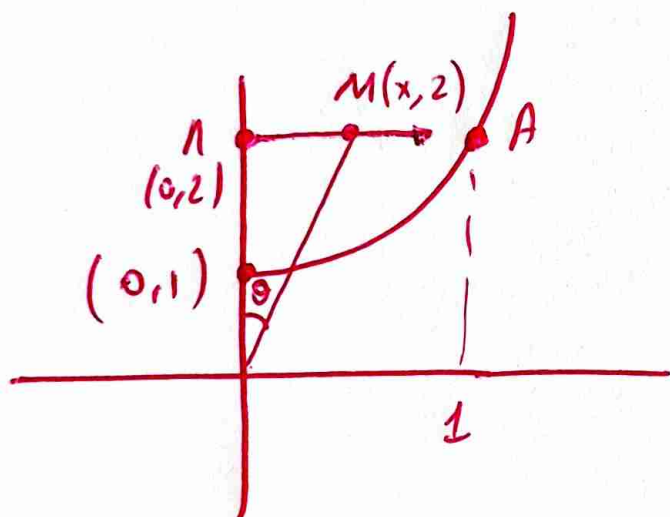
$$d'(t_0) = \frac{(x(t_0)-2)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{(x(t_0)-2)^2 + y^2(t_0)}}$$

$$d'(t_0) = \frac{(1-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2}{(1-2)^2 + 2^2} = \frac{3}{5}$$

$$d'(t_0) = \frac{3}{5}$$

5.

Μια πυξά ξεκινά από τη θέση $\lambda(0,2)$ και κινείται οριζόντια με ταχύτητα 1 m/sec . Να βρεθεί το ρυθμικό μεταβολών της γωνίας $\theta = \angle OMA$ τη χρονική στιγμή που η πυξά έρχεται σε επαφή με τη γραφική παράσταση της $f(x)$



Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η γνωστή με το

$$\tan \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \tan \theta(t) = \frac{1}{2} x(t)$$

$$\frac{1}{\sec^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{1}{2} x'(t)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \sec^2 \theta(t)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t)}$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x'(t)}{1 + \frac{1}{4} x^2(t)}$$

$$\underline{t = t_0}$$

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} x^2(t_0)}$$

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot 1}$$

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\boxed{\theta'(t_0) = \frac{2}{5}}$$

Προσοχή

Η ταχύτητα
της μάζας
είναι ο ρυθμός
μεταβολής
του $x(t)$

$$\underline{\underline{x'(t) = 1}}$$

6. Να ελεγχθεί αν υπάρχει σημείο
 της γραμμικής παραστάσεως της
 $f(x)$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής
 της τεταγμένης να είναι 100/μς
 το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης
 αν $x'(t) > 0$

$$y(t) = x^2(t) + 1.$$

$$y'(t) = 2x(t) x'(t)$$

~~$$x'(t) = 2x(t) x'(t)$$~~

$$1 = 2x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{5}{4}$$

$$K \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right)$$