

Θεραπεία Ενότητα

Προβλήματα

Ασκηση 1

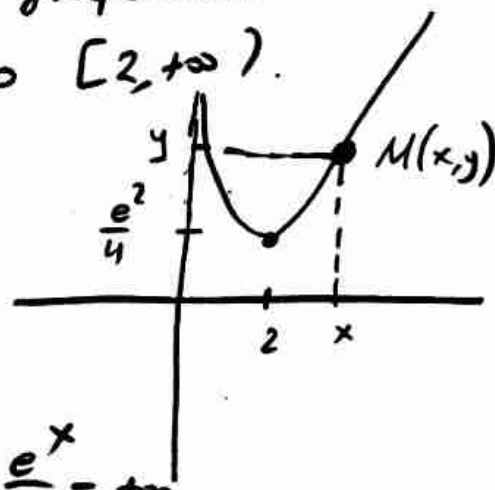
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$

Να βρούς το σημείο της f , από το οποίο, αν
 γέρουμε παράλληλα ευθεία προς τους άξονες
 το σχηματισμένο ορθογώνιο έχει το ελάχιστο
 εμβαδόν

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x - 2e^x}{x^3} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

x	0	2
x-2	-	+
x ³	-	+
f'	+	-
f	↘	↗

Οπώς αφού $x > 0$, η f γν.φθάνει στο
 $(0, 2]$ και γν.αύξεται στο $[2, +\infty)$.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$E_{\text{ορθ.}} = xy \Leftrightarrow E(x) = x \cdot \frac{e^x}{x^2} \Leftrightarrow E(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$E'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

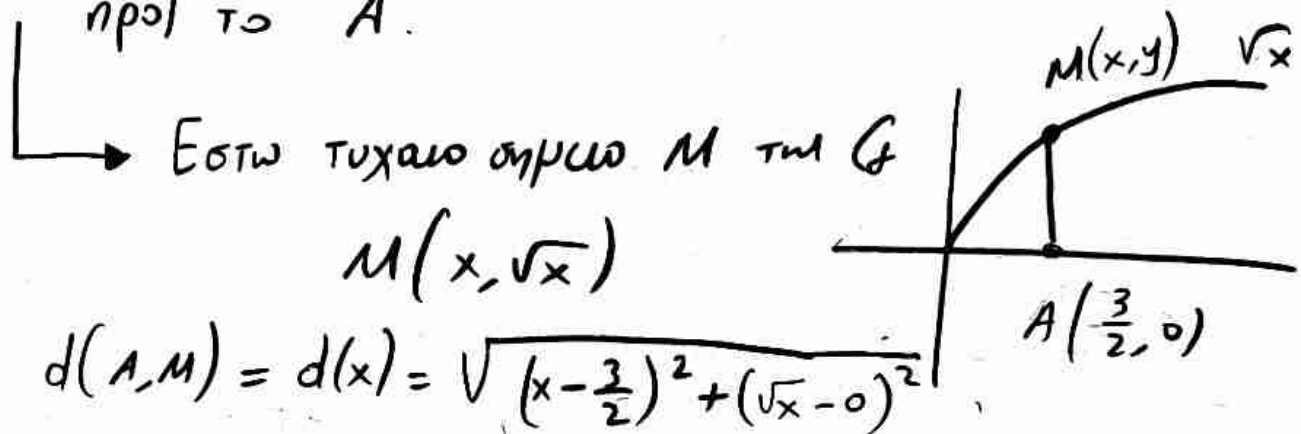
x	0	1
E'	-	+
E	↘	↗

Το εμβαδόν ελαχιστοποιείται για $x=1$.
 άρα το σημείο $M(1, e)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$

Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο M της Γ προς το A .



$$d'(x) = \frac{2(x - \frac{3}{2}) + 1}{2\sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + x}}$$

x	0	1
$d'(x)$	-	+
$d(x)$		

Παρατηρώ ότι η απόσταση ελαχιστοποιείται για $x=1$ δηλαδή το σημείο $M(1, 1)$ έχει την ελάχιστη απόσταση.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να δο η $f(x)$ παίρνει ελάχιστη τιμή

β) Να βρω το a ώστε η ελάχιστη τιμή να γίνεται ελάχιστη.

α) $f'(x) = e^{x-a} - 2$ ορα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 2 = 0$

x	$\ln 2 + a$
f'	- 0 +
f	$\searrow$ $\nearrow$

$$e^{x-a} = 2$$

$$x-a = \ln 2$$

$$x = \ln 2 + a$$

Ελάχιστη τιμή : $f(\ln 2 + a) = e^{\ln 2 + a - a} - 2(\ln 2 + a) + e^a =$
 $= 2 - 2(\ln 2 + a) + e^a$

$$\Leftrightarrow f(\ln 2 + a) = 2 - 2\ln 2 - 2a + e^a$$

β). Θαρω συνάρτηση $g(x) = 2 - 2\ln 2 - 2x + e^x$

$$g'(x) = -2 + e^x$$

$$\rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

x	$\ln 2$
g'	- 0 +
g	$\searrow$ $\nearrow$

Η ελάχιστη τιμή γίνεται ελάχιστη για $a = \ln 2$.

Άσκηση 5

Σε ποιο σημείο της καμπύλης της $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

$$\begin{aligned} \hookrightarrow f'(x) &= \ln^2 x + 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad (\Rightarrow) f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x \\ f''(x) &= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \quad (\Rightarrow) f''(x) = 2 \frac{\ln x + 1}{x} \end{aligned}$$

$$\rightarrow f''(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \ln x + 1 = 0 \quad (\Rightarrow) x = e^{-1}$$

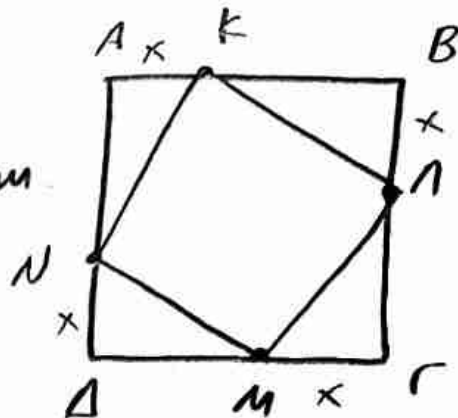
x	e^{-1}
f''	- 0 +
f'	 

Η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο σημείο $M(e^{-1}, e^{-1})$

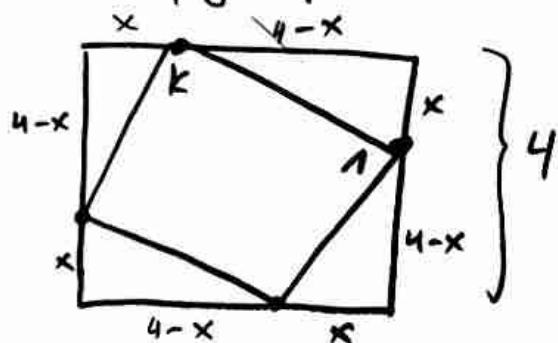
$$\text{αφού } f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (\ln e^{-1})^2 = e^{-1} \cdot (-1)^2 = e^{-1}$$

Άσκηση 4

Δίνεται τετράγωνο $ABCD$ πλευράς 4cm .
 Να βρούμε το x ώστε το τετράγωνο
 $KLMN$ να έχει το ελάχιστο εμβαδόν



↳ Επεξεργαζόμαστε το σχήμα.



$$KL^2 = (4-x)^2 + x^2$$

$$KL^2 = 16 - 8x + x^2 + x^2$$

$$KL^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

Άρα $E_{KLMN} = E(x) = 2x^2 - 8x + 16$.

$$E'(x) = 4x - 8$$

$$\rightarrow E'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 4x - 8 = 0$$

$$4x = 8$$

$$\boxed{x = 2}$$

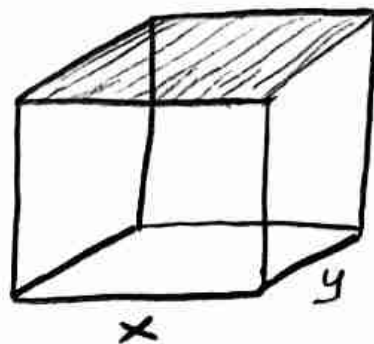
x	2
E'	- 0 +
E	↘ ↗

Το εμβαδόν του $KLMN$ ελαχιστοποιείται
 για $x = 2$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με βάση ορθογωνίων ανοιχτό από πάνω

Η βάση έχει σταθερή περιμετρο 20 όπου $x \in (0, 10)$



Να βρούμε το x ώστε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να έχει τη μέγιστη επιφάνεια.

↳ Ισχύει ότι $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow \boxed{y = 10 - x}$

Συνολικό εμβαδόν $E = x \cdot y + 2 \cdot 4 \cdot y + 2 \cdot 4 \cdot x$

$$E(x) = x(10 - x) + 8(10 - x) + 8x = 10x - x^2 + 80 - 8x + 8x$$

$$\boxed{E(x) = -x^2 + 10x + 80}$$

$$E'(x) = -2x + 10$$

$$\rightarrow E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0	5	10
$E'(x)$		+	-
$E(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = 5$

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

α) Να δο η $f(x)$ είναι ημικύκλιο.

β) Εστω τριαντίο ΑΒΓΔ με μέγιστη βάση ΑΒ όπου $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$. Τε $\Gamma, \Delta \in \zeta$.

Να βρωδει η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριαντίου ΑΒΓΔ

α) Πρέπει $4-x^2 \geq 0$

x	-2	2
$4-x^2$	$-$	$+$

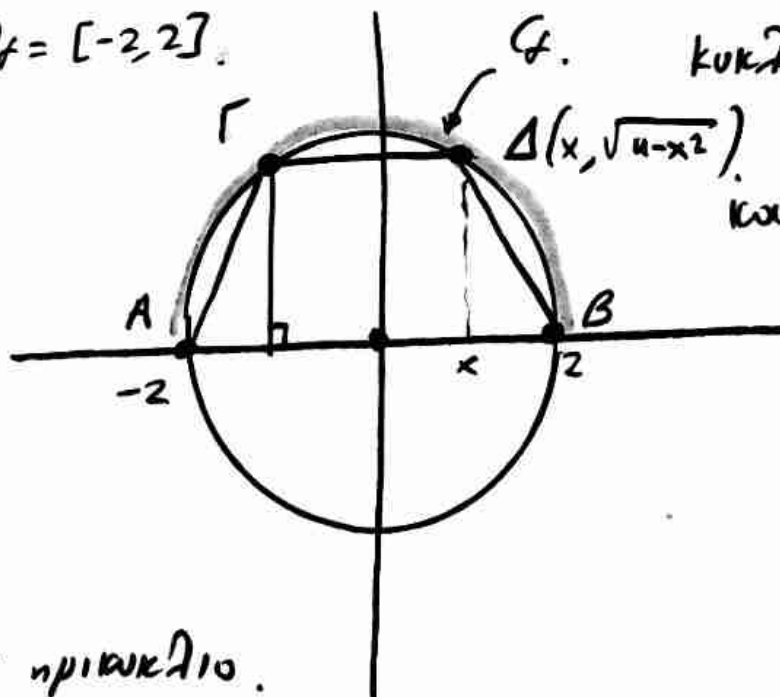
$$D_f = [-2, 2]$$

$$\text{λύνου ότι } y = \sqrt{4-x^2}$$

$$y^2 = 4-x^2$$

$$x^2+y^2=4$$

κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho=2$.



Άρα η ζ ημικύκλιο.

$$\text{β) } E = \frac{(4+2x)\sqrt{4-x^2}}{2} = (2+x)\sqrt{4-x^2}$$

$$E(x) = (2+x) \sqrt{4-x^2}$$

$$E'(x) = \sqrt{4-x^2} + (2+x) \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2+2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$E'(x) = \frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}} = -2 \frac{x^2+x-2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-2} \quad \boxed{x=1}$$

x	-2	1	2
E'(x)	+	0	-
E(x)	↗		↘

Για $x=1$ το εμβαδόν μεγιστοποιείται.

$$E(1) = 3\sqrt{3}.$$

Άσκηση 8

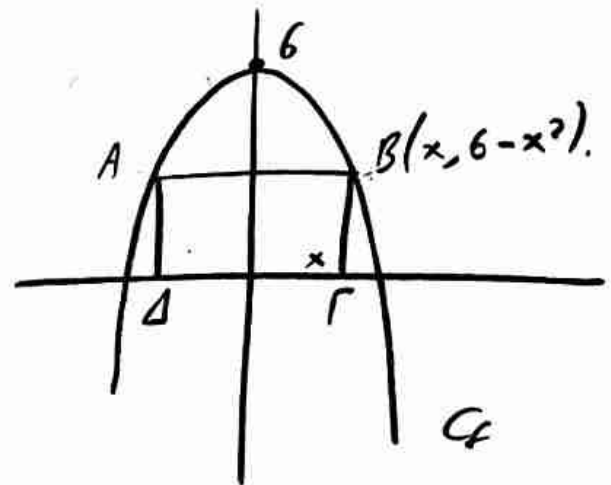
Δίνεται η $f(x) = 6 - x^2$ και το ορθόγωνιο $AB\Gamma\Delta$ όπου $A, B \in C$ και $\Gamma, \Delta \in x'x$ όπου $\Gamma(x, 0)$ και $x \in (0, \sqrt{6})$.

Να βρω τις συντεταγμένες των κορυφών ώστε το ορθόγωνιο να έχει το μέγιστο εμβαδόν

$$\hookrightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$$

$$\Rightarrow E(x) = 2x \cdot (6 - x^2)$$

$$E(x) = -2x^3 + 12x$$



$$E'(x) = -6x^2 + 12 = -6(x^2 - 2)$$

$$\rightarrow E'(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \sqrt{2}$$

Αρα

x	$\sqrt{2}$
$E'(x)$	$+$ 0 $-$
$E(x)$	$\nearrow$ $\searrow$

$$A(-\sqrt{2}, 4)$$

$$B(\sqrt{2}, 4)$$

$$\Delta(-\sqrt{2}, 0)$$

$$\Gamma(\sqrt{2}, 0)$$

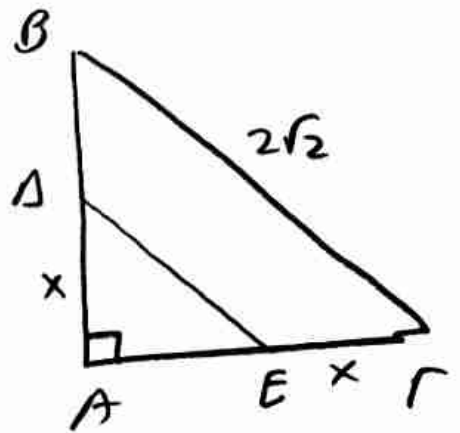
Άσκηση 10

Δίνεται ορθόγωνο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτινύουσα $B\Gamma = 2\sqrt{2}$

Νόσο το $E_{B\Delta E\Gamma}$ είναι

$$E(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2, \quad x \in (0, 2)$$

και στη συνέχεια να βρούμε το x ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνει ελάχιστο.



$$\text{Λοιπόν, } E_{B\Delta E\Gamma} = E_{AB\Gamma} - E_{A\Delta B} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} - \frac{AD \cdot AB}{2}$$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \quad (\Rightarrow) \quad AB^2 + AB^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad (\Rightarrow) \quad 2AB^2 = 8$$

$$AB^2 = 4 \quad (\Rightarrow) \quad AB = 2 \quad (\Rightarrow) \quad A\Gamma = 2$$

$$\text{Άρα } B\Delta = 2 - x = AE$$

$$\text{Άρα } E(x) = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot x(2-x) = 2 - \frac{x(2-x)}{2}$$

$$E(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2, \quad x \in (0, 2)$$

$$E'(x) = x - 1$$

x	0	1	2
E'		-	+
E	↘		↗

Για $x=1$

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- α) Να βρείς το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 1$.
- β) Να βρείς τις τιμές του x που ο ρυθμός μεταβολής ως προς x είναι αρνητικός.
- γ) Να βρείς το ρυθμό μεταβολής της συντελεστής διαόδου της εφαπτομένης της f στο σημείο $M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 2$.

→ α) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 \quad (\Rightarrow f'(1) = -3)$

β) Απαιτώ $f'(x) < 0 \quad (\Rightarrow) 3x^2 - 6x < 0 \quad (\Rightarrow) 3x(x-2) < 0$

x		0	2	
$f'(x)$	+	0	0	+

$$x \in (0, 2)$$

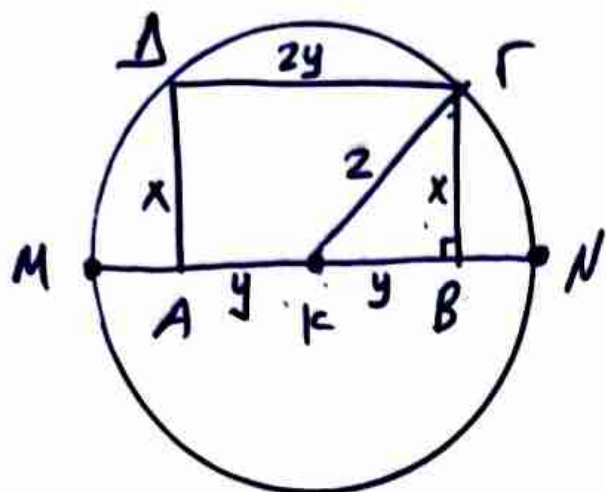
- γ) Ο συντελεστής διαόδου της εφαπτομένης είναι η $f'(x)$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διαόδου είναι η $f''(x)$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\text{Συνεπώς } f''(2) = 6.$$

Άσκηση 14

$$MN = 4$$



α) Να το $\in_{\Delta O \Gamma \Delta}$ ορθογώνιου $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$
 $x \in (0, 2)$

β) Βρείτε x, y ώστε το εμβαδόν να γίνει μέγιστο

γ) Βρείτε το x ώστε $E(x) = 2\sqrt{3}$

δ) Να το $h(x) = (E(x) - 2\sqrt{3})e^x$, $x \in (0, 2)$

έχει ένα ταχίσια κριτικό

σημείο στο $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

$$\textcircled{a} \quad \epsilon_{ABGN} = x \cdot 2y = 2x \sqrt{4-x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$\epsilon(x) = 2x \sqrt{4-x^2}$$

$$\epsilon(x) = 2 \sqrt{x^2} \sqrt{4-x^2} = 2 \sqrt{x^2(4-x^2)}$$

$$\epsilon(x) = 2 \sqrt{4x^2 - x^4} \quad x \in (0, 2)$$

$$\textcircled{b} \quad \epsilon'(x) = \cancel{2} \frac{4x - 4x^3}{\cancel{2} \sqrt{4x^2 - x^4}} = 4 \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

$$\epsilon'(x) = 0 \Rightarrow x(1-x^2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

x	0	1	2
ϵ'	+	0	-
ϵ	$\nearrow$		$\searrow$

Για $x=1$ έχουμε
 περιοχή (μΒαση
 $y=\sqrt{3}$,

$$(1) \quad E(x) = 2\sqrt{3}$$

$$\cancel{2}\sqrt{4x^2 - x^4} = \cancel{2}\sqrt{3}$$

$$4x^2 - x^4 = 3$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$\boxed{\text{Let } x^2 = t}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 3$$

$$x^2 = 3$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{3}}}$$

$$t = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$E(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$E(1) = 2\sqrt{3}$$

⑧ Σω λει. νδσ η δ' εχ4

ταλχιςζωσεν μια ρίλ.

$$f(\sqrt{3}) = (\underbrace{e(\sqrt{3})}_{2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}) e^{\sqrt{3}} = 0$$

$$f(1) = (\underbrace{e(1)}_{2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}) e^1 = 0$$

Αρ $f(\sqrt{3}) = f(1)$

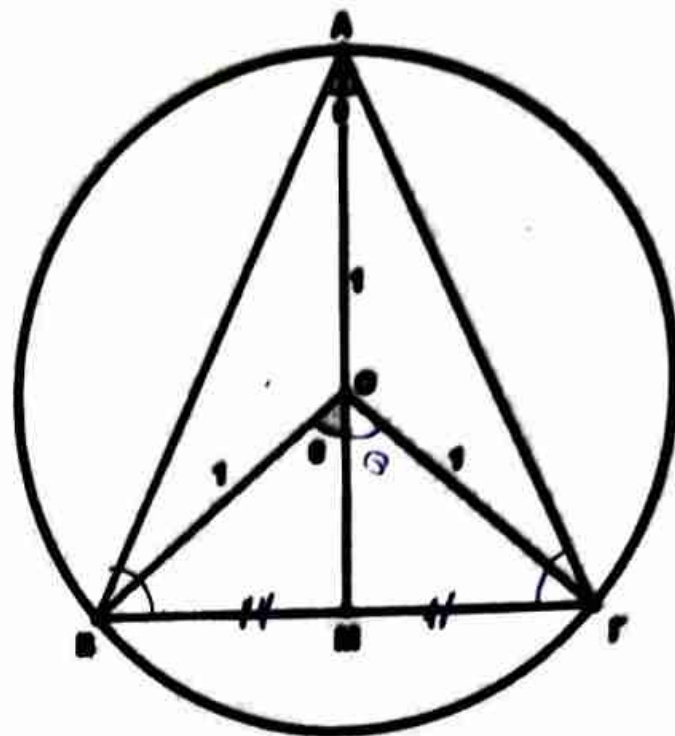
Βλλε

$$\exists \xi \in (1, \sqrt{3}) \text{ τ.ω}$$

$$f'(\xi) = 0$$

Άσκηση 15

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\angle BOM = \theta$, τότε:



- Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

$$E(\theta) = (1 + \cos\theta)\eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi).$$

Μονάδες 6

- Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

- Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 , με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

- Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2 , του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

$$\epsilon'(\theta) = 0$$

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = t$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right) \quad (-1)$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

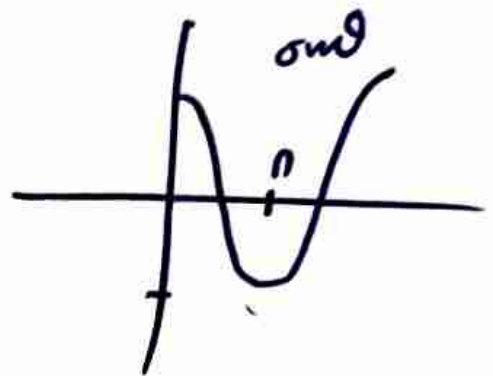
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = -1$$

$$\sin\theta = -1$$

$$\underline{\underline{\theta = \pi}}$$



θ	0	$\pi/3$	π
ϵ'	+	0	-
ϵ	0	↗	↘

Για $x = \frac{\pi}{3}$ έχουμε

εμβαδόν.

$$\underline{\Gamma_1} \quad \epsilon_{AB\Gamma} = \frac{B \cdot U}{2} \approx \frac{B\Gamma \cdot AM}{2}$$

$$\bullet \quad n\mu\hat{\theta} = \frac{BM}{1} \Rightarrow n\mu\hat{\theta} = BM$$

$$\text{аpa } B\Gamma = 2BM = 2n\mu\theta$$

$$B\Gamma = 2n\mu\theta$$

$$\bullet \quad \sigma\omega\theta \rightarrow \frac{OM}{1} \Leftrightarrow OM = \sigma\omega\theta$$

$$\text{опw } AM = OM + 1 = \sigma\omega\theta + 1$$

$$AM = \sigma\omega\theta + 1$$

$$\epsilon_{AB\Gamma} = \frac{2n\mu\theta(\sigma\omega\theta + 1)}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{\epsilon = n\mu\theta(\sigma\omega\theta + 1)}}$$

$$\underline{\Gamma_2} \quad \epsilon'(\theta) = \sigma\omega\theta(\sigma\omega\theta + 1) - n\mu\theta \cdot n\mu\theta$$

$$\epsilon'(\theta) = \sigma\omega^2\theta + \sigma\omega\theta - n\mu^2\theta$$

$$\epsilon'(\theta) = \sigma\omega^2\theta + \sigma\omega\theta - (1 - \sigma\omega^2\theta)$$

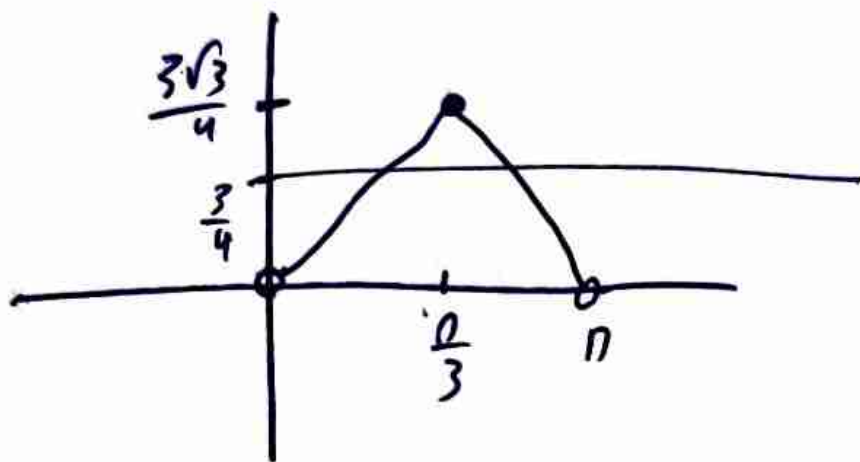
$$\epsilon'(\theta) = \sigma\omega^2\theta + \sigma\omega\theta - 1 + \sigma\omega^2\theta$$

$$\boxed{\epsilon'(\theta) = 2\sigma\omega^2\theta + \sigma\omega\theta - 1}$$

$$\Gamma_3 \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta) = 0$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta) = 0$$



$$x < \frac{\pi}{3}$$

$$E \text{ strictly increasing}$$

$$E \uparrow$$

$$\Sigma T_E = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4})$$

$$\text{To } \frac{3}{4} \in \Sigma T_E$$

$$\text{and } \exists! \theta_1$$

$$\text{t.u. } E(\theta_1) = \frac{3}{4}$$

$$x > \frac{\pi}{3}$$

$$E \text{ strictly decreasing}$$

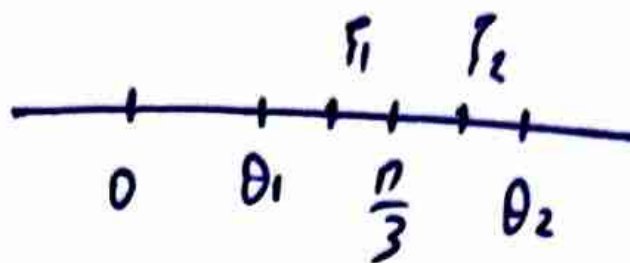
$$E \downarrow$$

$$\Sigma T_E = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$$

$$\text{To } \frac{3}{4} \in \Sigma T_E$$

$$\text{and } \exists! \theta_2$$

$$\text{t.u. } E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$

Lu

$$E'(T_1) = \frac{E(\frac{1}{3}) - E(0,1)}{\frac{1}{3} - 0,1} = \frac{E(\frac{1}{3}) - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} - 0,1}$$

$$E'(f_2) = \frac{E(\theta_2) - E(\frac{\eta}{3})}{\theta_2 - \frac{\eta}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - E(\frac{\eta}{3})}{\theta_2 - \frac{\eta}{3}}$$

$$E'(\tau_2) \left(\theta_2 - \frac{n}{3} \right) = \frac{3}{4} - E\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$\epsilon'(\xi_1) \left(\frac{1}{3} - \theta_1 \right) = \epsilon' \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{3}{4}$$

$$E'(1,1) \left(9, -\frac{1}{3} \right) = \frac{3}{4} - E\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\epsilon'(\tau_2) \left(\theta_2 - \frac{\eta}{3} \right) = \epsilon'(\tau_1) \left(\theta_1 - \frac{\eta}{3} \right)$$