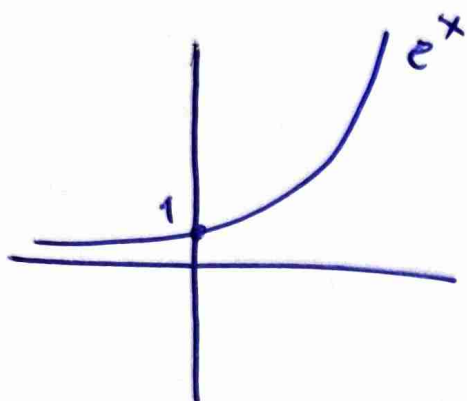


Θεραπεία Ενότητα

Όρα

Τοπολογιο

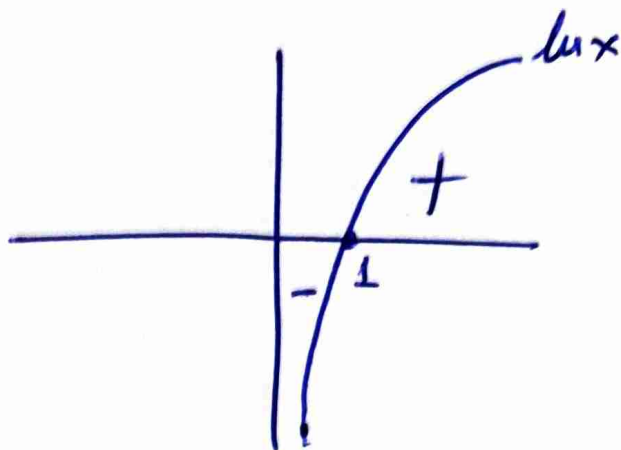


$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$e^{+\infty} = +\infty$$



$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 0 = -\infty$$

$$\ln +\infty = +\infty$$

Κρίσιμη παρατήρηση
για το $\ln x$

Το $\ln x$ δεν είναι
θετική ποσότητα!

Όταν $x > 1$ το $\ln x > 0$

Όταν $0 < x < 1$ το $\ln x < 0$

Τυπολόγιο

$$\left. \begin{array}{l} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array} \right\} \text{DLH}$$

$$0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \cdot \text{DLH}$$

$$+\infty - \infty = +\infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty} \right) \text{DLH}$$

Γενικά έχουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ που είναι $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$

Χωρίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ και αναγνωρίζουμε

τις περιπτώσεις.

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν τα όρια ριτών
συναρτησών.

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2 + 2} \right) = \frac{4 - 5}{4 + 2} = \frac{-1}{6}$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \frac{12 - 1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\textcircled{γ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\textcircled{δ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} =$$

x	-2	2
$x^2 - 4$	+	-

κοντά στο 2 αλλαζει προσημο

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} = 8 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} = 8 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Το όριο δεν υπάρχει,

$$\textcircled{E} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} 2x \frac{1}{x^2 - 4x + 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2x \frac{1}{(x-2)^2} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

⊕

$$\textcircled{J} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{0}{|x-1|} - \overset{\ominus}{|x-3|}}{\overset{0}{|x^2-1|}} = -\infty$$

x	-1	1
x-1	-	- 0 +
x ² -1	+ 0 -	0 +

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1) - (-x+3)}{-(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1+x-3}{-(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{-(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 - (-x+3)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+x-3}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-4) \frac{1}{x^2-1} = -2(+\infty)$$

$= -\infty$

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν τα όρια αρρητων συναρτήσεων.

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{\sqrt{x^2+5}}^2 - 3^2}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$

$$= \frac{4}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Β' Τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x^2+5}}{2x - 2}$$

$$= \frac{4}{6 - 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\textcircled{B} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x-1} - 1} \quad \underline{\underline{\left(\frac{0}{0}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})(\sqrt{2x-1} + 1)}{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}^2 - \sqrt{5-x}^2)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(\sqrt{2x-1}^2 - 1^2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(2x-2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

В' тронд

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x-1} - 1} \quad \underline{\underline{\left(\frac{0}{0}\right)}} \quad \text{DLH}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{2}} = \frac{\frac{2}{4}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 3 \cdot \sqrt[4]{x-2} - 4}{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[6]{x-2}} \quad \textcircled{*}$$

$$\text{DET W} \quad \sqrt[12]{x-2} = t$$

$$\sqrt[4]{x-2} = t^3$$

$$\sqrt[3]{x-2} = t^4$$

$$\sqrt[6]{x-2} = t^2$$

$$\textcircled{*} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + 3t^3 - 4}{t^4 - t^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4t^3 + 9t^2}{4t^3 - 2t}$$

$$= \frac{4+9}{4-2} = \frac{13}{2}$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x \right] = \sqrt{+\infty} + \infty = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\textcircled{\epsilon} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 5} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2 - 3x + 5}} - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 5}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-3 + \frac{5}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-3 + \frac{5}{x} \right)}{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{-3}{2}$$

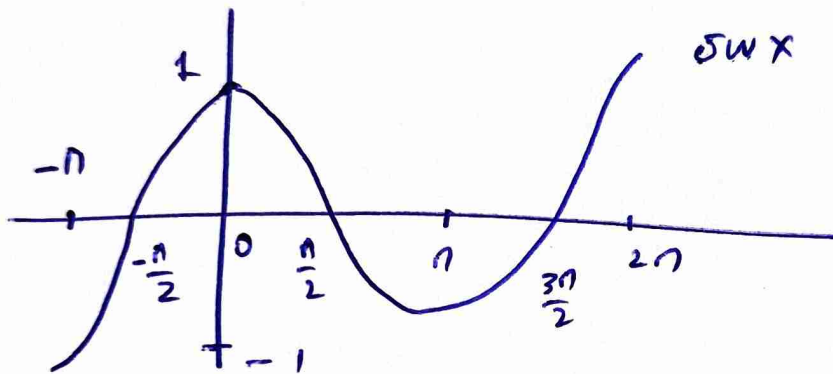
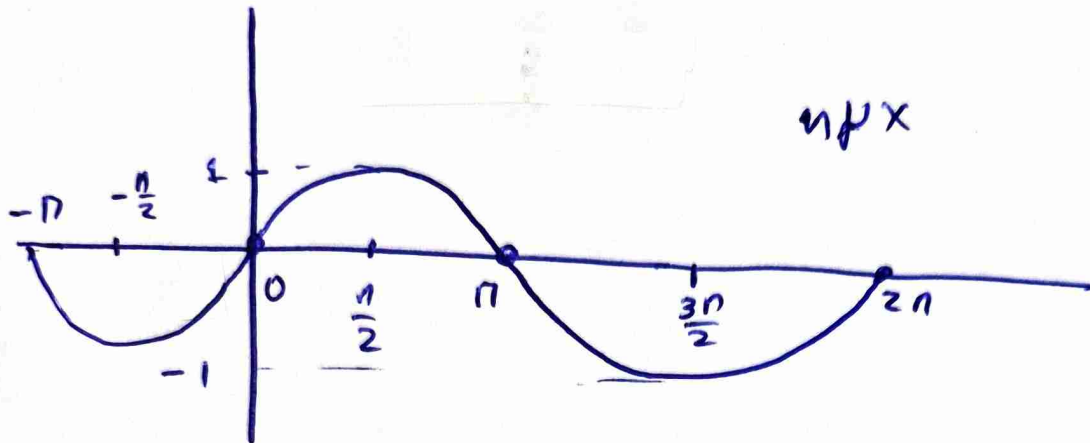
Σε αυτό το όριο αναλύεται

δύο κομμάτια.

1η. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} - x) \xrightarrow{+\infty - \infty}$ έχουμε ούρα.

2η. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 5}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x} \xrightarrow{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$ και παραγοντα πάνω κάτω.

Τυπολόγιο Τριγωνομετρίας



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\eta\mu x$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\sigma\omega x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\epsilon\varphi x$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\sigma\varphi x$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\omega^2 x = 1$$

$$\epsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

Η εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\omega x$ έχει λύσεις

$$\sigma\omega [0, \pi] \quad \tau. \int \quad \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma\omega [0, 2\pi] \quad \tau. \int \quad \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad \frac{5\pi}{4}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστούν τα τριγωνομετρικά όρια.

$$\textcircled{α} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{Από Κ.Π} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{β} \lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$|\eta \mu \frac{1}{x}| \leq 1$$

$$|x| |\eta \mu \frac{1}{x}| \leq 1 \cdot |x|$$

$$|x \eta \mu \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\boxed{-|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{από Κ.Π} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 0.$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{1}{x} = \underline{\underline{\textcircled{*}}}$$

Ερωσας δύο προηγούμενα περιπτώσεις
αναρίθμηση το υριζονο εδω ρυδωίλζα

$$\underline{\underline{\textcircled{*}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \frac{\frac{1}{x} = t}{t \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t} = 1.$$

Προσοχη

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Answer 4

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = +\infty$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{7^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$$

$$\textcircled{y} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x \cdot 2}{3^x \cdot 9 + 2^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{3^x \left(9 + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} = \frac{1}{9}$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5^x \cdot 5 + 2^x \cdot 8}{5^x - 2^x \cdot 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left(\left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5 + 8 \right)}{2^x \left(\left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 \right)} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$\textcircled{E} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \ln^2 x - 5 \ln x + 4}{3 \ln^2 x + 2 \ln x - 1} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{6k^2 - 5k + 4}{3k^2 + 2k - 1} =$$

DET W $\ln x = k$
 Oron $x \rightarrow 0^+$
 TOT C $k \rightarrow -\infty$

$$= \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{6k^2}{3k^2} = 2.$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 - 5x) - 2 \ln(x+2)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 - 5x) - \ln(x+2)^2] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^3 - 5x}{(x+2)^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4}\right)$$

Οτιω $\frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4} = k$

οτιω $x \rightarrow +\infty$ το $k \rightarrow +\infty$

γιατι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 5x}{x^2 + 4x + 4}\right) = +\infty$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln k = +\infty,$$

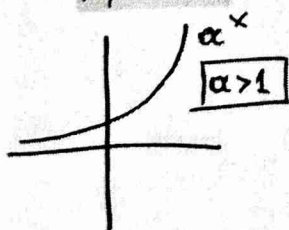
$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - \ln e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = 0.$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^x} = 1.$$

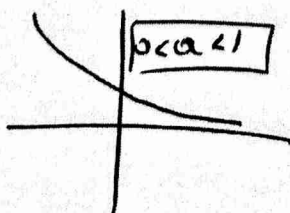
Μεγιστη προσοχη
στο τελειωμο
οριου

Προσοχη



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστούν τα όρια.

$$\textcircled{α} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

$$\textcircled{β} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \text{DLH} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} =$$

$$= \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Χρησιμώ

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\textcircled{r} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e^x - x^2 + x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} \right) = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Абхьби 6

Еоту $f \downarrow$. На улодохоту ∞ $\circ p 1 \circ$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \cdot \frac{1}{f(2x) - f(x)} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

$$\bullet \quad x < 2x \Rightarrow f(x) > f(2x) \Rightarrow f(2x) - f(x) < 0$$

Άσκηση 7

Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη και $f'(1) = 2$ και $f(1) = 0$.

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$

Λαβός προσέγγιση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{DLH} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

↓
Το βήμα αυτό απαιτεί
η $f'(x)$ να είναι συνεχής
γιατί $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = f'(1)$
Αυτό δεν το έχουμε εδώ!

Σωστή προσέγγιση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} \\ &= \frac{f'(1)}{1} = 2. \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 8

Εστω $f(x) \leq x^3 - x$

Να βρω το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Εστω ότι έχω την τιμή $f(x)$
οπότε μπορώ να πάρω στην ανίσωση,

$$f(x) \leq x^3 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Άσκηση 9

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα
και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $G(x)$ παράγουσα

της $f(x)$.

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [G(x+1) - G(x)]$

$$G'(\xi) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1 - x}$$



$$G'(\xi) = G(x+1) - G(x)$$

οπότε

$$x < \xi < x+1$$

$$G' \downarrow \text{ γιατί } G'(x) = f(x)$$

$$G'(x) > G'(\xi) > G'(x+1)$$

$$\boxed{f(x) > G(x+1) - G(x) > f(x+1)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=t}{\underset{t \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

$$\text{Άρα Ε.Π.} \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x+1) - G(x) = 0.$$

Άσκηση 10

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ συνεχής,
Αν F παράγουσα της f και $F(0)=0$

Να υπολογιστούν τα όρια

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) \cdot (e^x - 1)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 0$$

$$\textcircled{\gamma} \lim_{x \rightarrow 0} F(x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} \times \ln x = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln \frac{1}{x} - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x \ln \frac{1}{x} - 1 \right) =$$

Θέτω $\frac{1}{x} = t$, οπότε $x = \frac{1}{t}$
 $x \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow 0$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} \ln t - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\ln t}{t} - 1 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\ln t - t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} - 1}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{t^2} - 1}{2} = 0.$$

Άσκηση 12

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής $x f(x) \leq nx + x^2 - 4x$

Βρίλ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Για $x < 0$ $\varepsilon x < 0$ $f(x) \geq \frac{nx}{x} + x - 4$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{nx}{x} + x - 4 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq -3}$$

Για $x > 0$ $\varepsilon x > 0$ $f(x) \leq \frac{nx}{x} + x - 4$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{nx}{x} + x - 4 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq -3}$$

Άρα f συνεχής $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3}$$

Άσκηση 13

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$x^2 + 3x \leq f(x) \leq 2x^2 - x + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογιστεί το $f'(2)$

Για $x=2$ έχω ότι $10 \leq f(2) \leq 10 \Rightarrow f(2)=10$

$$x^2 + 3x - 10 \leq f(x) - 10 \leq 2x^2 - x - 6$$

$$x^2 + 3x - 10 \leq f(x) - f(2) \leq 2x^2 - x - 6$$

Για $x > 2$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \leq \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 3 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x - 1 = 7$$

Από κριτήριο παρεμβολών

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 7$$

Για $x < 2$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 7$

Αρα αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

τότε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 7$

αρα $f'(2) = 7$

Άσκηση 14

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $f'(0) = 2$

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$

Η πληροφορία $f'(0) = 2$ κρύβει όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

Θεωρώ $g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (\Rightarrow) \quad f(x) = xg(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[xg(x) - \eta\mu x](\sqrt{x+4} + 2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) - \frac{\eta\mu x}{x} \right) (\sqrt{x+4} + 2) = (2 - 1) \cdot 4 = 4$$

Άσκηση 8

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + 2x \leq 2xf(x) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Να ο $f(x)$ είναι συνεχής στο 1.

$$f^2(x) - 2xf(x) \leq -2x + 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \leq x^2 - 2x + 1$$

$$[f(x) - x]^2 \leq (x-1)^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad |f(x) - x| \leq |x-1|$$

$$-|x-1| \leq f(x) - x \leq |x-1| \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{x - |x-1| \leq f(x) \leq x + |x-1|}$$

Για $x=1$ έχω ότι $1 \leq f(1) \leq 1$ άρα $f(1)=1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x - |x-1| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x + |x-1| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Από κριτήριο παρεμβολής} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1. \end{array}$$

Επομένως $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ είναι

συνεχής στο 1.

Άσκηση 18

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x^2-4} = 3$

Να υπολογιστούν

α) το $f(2)$

Θεωρώ βοηθητική συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-2}{x^2-4}$

$$\text{Παραγωγώ } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

$$\text{οπώ } g(x)(x^2-4) = f(x)-2 \quad (\Rightarrow) \boxed{f(x) = g(x)(x^2-4) + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)(x^2-4) + 2 = 2$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

Άρα η $f(x)$ συνεχής
 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

$$\textcircled{\beta} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 - 3x}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(x^2-4) + 2 + x^2 - 3x}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(x-2)(x+2) + (x-2)(x-1)}{\sqrt{x+2}^2 - 2^2} (\sqrt{x+2} + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) [g(x)(x+2) + x-1]}{x-2} (\sqrt{x+2} + 2) = [3 \cdot 4 + 1] \cdot 4 = 52$$

$$\textcircled{d} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - 2}{x - 1} = \lim_{k \rightarrow 2} \frac{f(k) - 2}{\frac{k}{2} - 1} =$$

$$2x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$k \rightarrow 2$$

$$= \lim_{k \rightarrow 2} 2 \frac{f(k) - 2}{k - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2 \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \frac{g(x)(x^2 - 4) + 2 - 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2 \frac{g(x) \cancel{(x-2)} (x+2)}{\cancel{x-2}} = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$$

Άσκηση 20

Δίνεται περλιτη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+3) = 5$

Να υπολογισω τα ορια

(α) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Γνωρίζω ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+3) = 5 \quad (\Rightarrow) \quad \lim_{t \rightarrow 4} f(t) = 5$

Θετω $x+3 = t$
 $x \rightarrow 1$
 $t \rightarrow 4$

$(\Rightarrow) \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$

(β) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

Λοιπov, $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{t \rightarrow 4} f(-t) = \lim_{t \rightarrow 4} -f(t) =$

Θετω $x = -t$
 $x \rightarrow -4$
 $t \rightarrow 4$

$= - \lim_{t \rightarrow 4} f(t) =$
 $= -5$

Άσκηση 21

Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x} = 3$
να βρεθούν οι αριθμοί a, b .

$$\text{Θέτω } f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x} \quad (\Rightarrow) f(x)(x^2 + 2x) = x^2 + ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)(x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + ax + b)$$

$$0 = 4 - 2a + b \quad (\Rightarrow) \boxed{b = 2a - 4}$$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x^2 + 2x} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x+2)}{x(x+2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2+a)}{x(x+2)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2+a}{x} = 3$$

$$\frac{-2-2+a}{-2} = 3$$

$$-4+a = -6$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\boxed{b = -8}$$

Άσκηση 22

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda x + \lambda + 5}{x^2 - 4x + 4}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Λοιπόν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda x + \lambda + 5}{(x-2)^2} = (9 + 3\lambda) \cdot +\infty$

1. Αν $9 + 3\lambda > 0 \Leftrightarrow 9 > -3\lambda \Leftrightarrow -3 < \lambda$ τότε

το όριο είναι $+\infty$

2. Αν $9 + 3\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ τότε $-\infty$

3. Αν $\lambda = -3$ τότε το όριο δίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2}$$

Το όριο δεν υπάρχει.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) \frac{1}{x-2} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) \frac{1}{x-2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άσκηση 23

Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2+\lambda x-\lambda+3} = -\infty$ να βρούμε το λ

Θέτουμε $f(x) = \frac{x-5}{x^2+\lambda x-\lambda+3}$ $(\Rightarrow) f(x)(x^2+\lambda x-\lambda+3) = x-5$

$$x^2+\lambda x-\lambda+3 = \frac{x-5}{f(x)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+\lambda x-\lambda+3) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-5) \cdot \frac{1}{f(x)}$

$$9+3\lambda-\lambda+3 = -2 \cdot 0$$

$$2\lambda+12 = 0$$

$$\boxed{\lambda = -6}$$

Άσκηση 24

Να υπολογιστεί το όριο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^4 + 4\lambda x^3 + (\lambda - 5)x^2 + 7x - 6]$$

Το οποίο είναι ωο με $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda^2 - 3\lambda)x^4$

λ		0	3
$\lambda^2 - 3\lambda$	+	-	+

1. Όταν $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ τότε $\oplus \cdot (+\infty) = +\infty$

2. Όταν $\lambda \in (0, 3)$ τότε $\ominus (+\infty) = -\infty$

3. Όταν $\lambda = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-5x^2 + 7x - 6] =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2) = -\infty$$

4. Όταν $\lambda = 3$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (12x^3 - 2x^2 + 7x - 6) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 12x^3 = -\infty.$$

Άσκηση 25

Να υπολογιστεί το όριο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 4)x^4 + (\lambda - 2)x^3 + \lambda x + 3}{(\lambda^2 + 2\lambda)x^3 + (1 - \lambda)x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 4)x^4}{(\lambda^2 + 2\lambda)x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 2)x}{\lambda(\lambda + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda}$$

λ	0	2
$\lambda - 2$	-	+
λ	-	+
$\frac{\lambda - 2}{\lambda}$	+	-

1. Αν $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ τότε $\oplus(+\infty) = +\infty$

2. Αν $\lambda \in (0, 2)$ τότε $\ominus(+\infty) = -\infty$

3. Αν $\lambda = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4 - 2x^3 + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4}{x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 = -\infty$$

4. Αν $\lambda = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{8x^3 - x^2 + x - 2} = 0$

5. Αν $\lambda = -2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3 - 2x + 3}{3x^2 + x - 2} = +\infty$

Άσκηση 26

Να υπολογιστεί το όριο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 8x - 1} + \lambda x \right] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(9 - \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} + \lambda x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{9 - \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} + \lambda x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{9 - \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} + \lambda \right] = \\ &= +\infty (3 + \lambda). \end{aligned}$$

1. Αν $\lambda + 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -3$ τότε $\textcircled{+\infty}$

2. Αν $\lambda + 3 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ τότε $\textcircled{-\infty}$

3. Αν $\lambda = -3$ τότε το όριο γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 8x - 1} - 3x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 8x - 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 - 8x - 1} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-8 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{9 - \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) + 3} = \frac{-8}{6} \end{aligned}$$

Άσκηση 27

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} + \alpha x + \beta \right) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 + (\alpha x + \beta)(x - 1)}{x - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 + \alpha x^2 - \alpha x + \beta x - \beta}{x - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + 1)x^2 + (\beta - \alpha)x - 4 - \beta}{x - 1} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + 1)x^2}{x} = 4 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\alpha + 1)x = 4$$

Προφανώς πρέπει $\alpha = -1$ αλλιώς ατρώω!.

$$\text{Αρα. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\beta + 1)x - 4 - \beta}{x - 1} = 4 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\beta + 1)x}{x} = 4$$

$$\Rightarrow \beta + 1 = 4$$

$$\boxed{\beta = 3}.$$

Άσκηση 13

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{7}{8}$$

Να υπολογιστεί το $f(1)$ και το $f'(1)$.

Θαполо $g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$ οπου $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{8}$

οπω $f(x) = g(x)(x^2 - 1) + \sqrt{x+3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x^2 - 1) + \sqrt{x+3}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. και απον f συνεχής

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \boxed{f(1) = 2}$$

Εποιν $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x^2 - 1) + \sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x-1)(x+1) + \sqrt{x+3} - 2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x+1) - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x+1) - \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x+1) - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\boxed{f'(1) = \frac{3}{2}}$$

Άσκηση 16

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(2) = 6$

Να υπολογισουν τα όρια

$$\textcircled{a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} \quad \textcircled{+}$$

$$\text{Θέτω } h = -x$$

$$\Leftrightarrow x = -h$$

$$h \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\text{κατ'αρχάς } f'(2) = 6$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$$

$$\textcircled{+} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{-x} = -6$$

$$\textcircled{b} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{\frac{t-2}{3}} =$$

$$2+3h = t$$

$$3h = t-2$$

$$h = \frac{t-2}{3}$$

$$h \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow 2$$

$$= 3 f'(2) = 3 \cdot 6 = 18.$$

Άσκηση 14

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'(0) = 5$

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

Συντηρώ αν η f είναι γενικά παραγωγισμένη
απο συν προχωρώ χρησιμοποιώντας κανόνα DLH

$$\text{οπώ } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 5$$

$$\text{Απο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0) - f(x) + f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3f'(0) - f'(0) = 2f'(0) = 10$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{\frac{t}{3}} = 3 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$$

$$\text{Θέτω } 3x = t \quad x \rightarrow 0$$

$$x = \frac{t}{3} \quad t \rightarrow 0$$

$$= 3f'(0)$$

$$\textcircled{8} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2+3h)}{h}$$

$$\text{Esw, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2) - f(2+3h) + f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} - \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} =$$

$$= -6 - 18 = -24.$$