

Θεραπεία Ενότητα

Ευαγγελισμός

1.

Δίνεται $f(x) = x^2 - x - 1$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x)$

α) $\sum_{\tau_0} x_0 = 1$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$$

Άρα $y - (-1) = 1 \cdot (x - 1)$

$$f'(1) = 2 - 1 = 1$$

$$y + 1 = x - 1$$

$$y = x - 2$$

β) η οποία διέρχεται από το $M(-1, 0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow M(-1, 0)$$

$$0 - f(x) = f'(x)(-1 - x)$$

$$-(x^2 - x - 1) = (2x - 1)(-1 - x)$$

$$-x^2 + x + 1 = -2x - 2x^2 + 1 + x$$

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -2$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = -(x - 0)$$

$$y + 1 = -x$$

$$\boxed{y = -x - 1}$$

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

$$y - 5 = -5(x + 2)$$

$$y - 5 = -5x - 10$$

$$\boxed{y = -5x - 5}$$

⑧ η οποία είναι παραλληλη στην ευθεία

$$J_3 \ y = 5x + 2$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \parallel y = 5x + 2$$

$$f'(x_0) = 5 \quad \text{έχων ίδια κλίση}$$

$$f'(x) = 5$$

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

$$y - 5 = 5(x - 3)$$

$$\boxed{y = 5x - 10}$$

δ) η οποία είναι παράλληλη στον $x'x$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \parallel x'x$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \left(-\frac{5}{4}\right) = 0\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{y = -\frac{5}{4}}$$

ε) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία
AB όπου $A(1, 2)$ και $B(3, 8)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \perp \epsilon_{AB}$$

$$\text{αρα } f'(x_0) \cdot \lambda_{AB} = -1$$

$$\Delta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

опа $f'(x) \cdot 3 = -1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}$

$$2x - 1 = -\frac{1}{3} \quad (\Rightarrow) \quad 6x - 3 = -1$$

$$6x = 2 \quad \left(x = \frac{1}{3} \right)$$

$$y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$y - \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$y + \frac{7}{9} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}$$

⑦ η οποία σχηματίζει γωνία 135°

με τον x !

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\varepsilon\varphi 135^\circ = f'(x_0)$$

$$-1 = f'(x_0)$$

$$f'(x) = -1 \quad \text{αρα} \quad 2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = 0$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

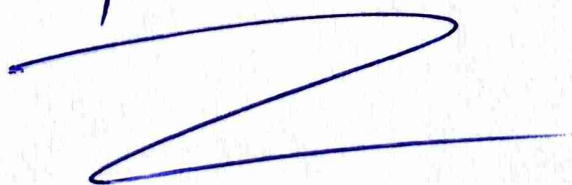
$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = -x$$

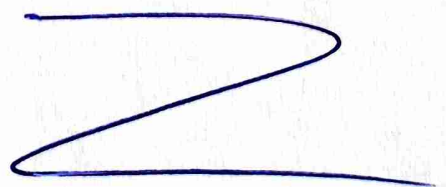
$$y + 1 = -x$$

$$\textcircled{y = -x - 1}$$

$$\varepsilon\varphi 135 = -1$$



$$\varepsilon\varphi 45 = 1$$



2.

Εστω $f(x) = \begin{cases} e^x \ln x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Να βρούμε τη εφαπτομένη στο $x_0 = 0$
καθώς και η γωνία που σχηματίζει
με τον $x'x$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \ln x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$f'(0) = 1$ άρα η f παραγωγώσιμη
στο $x_0 = 0$ συνεπώς ορίζεται η
εφαπτομένη στη f στο $x_0 = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

$$\varepsilon\varphi\omega^1 = 1$$

$$\omega^1 = 45$$

3.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισίμη
και $f^3(x) + f(x) = x + 2$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της

$f(x)$ στο $x_0 = 0$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

για $x=0$

έχω

$$f^3(0) + f(0) = 2$$

$$f^3(0) + f(0) - 2 = 0$$

$$\varphi(x) = x^3 + x - 2$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

$\varphi \uparrow$

$$\varphi(f(0)) = 0$$

$$\varphi(f(0)) = \varphi(1)$$

$$\varphi(1) = 0$$

$$\underline{\underline{f(0) = 1}}$$

Από f παρ/κη

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1$$

$$\underline{x=0}$$

$$3f^2(0)f'(0) + f'(0) = 1$$

$$4f'(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{f'(0) = \frac{1}{4}}}$$

$$y - 1 = \frac{1}{4}x$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + 1}}$$

4.

$$\text{Έστω ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = 1$$

και η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Να βρεθεί η εφαπτομένη της f
στο $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = 1$$

$$\frac{f(x)}{x^2+x} = g(x)$$

$$f(x) = g(x)(x^2+x)$$

$$\text{Γνωρίζω ότι } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)(x^2+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

f συνεχής

$$\underline{\underline{f(0) = 0}}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} g(x)(x+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f'(0) = 1}}$$

$$\text{Άρα } y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\underline{y = x}}$$

5.

$$\text{Έστω } f(x) = x^3 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f^{-1}(x)$

$$\text{στο } A(1, f^{-1}(1))$$

$$y - f^{-1}(1) = f^{-1}'(1)(x - 1)$$

$$\text{αφού } f(0) = 1 \quad \text{τότε } \underline{\underline{f^{-1}(1) = 0}}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1}'(x) = 1$$

$$\underline{x = 1}$$

$$f'(f^{-1}(1)) \cdot f^{-1}'(1) = 1$$

$$f'(0) \cdot f^{-1}'(1) = 1$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2}$$

$$2 \cdot f^{-1}'(1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}'(1) = \frac{1}{2}}}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}}$$

6.

Νόο η ευθεία $y = x - 2$ εφάπτεται τῇ $f(x) = x^2 - x - 1$.Αρκὺ τὸ σύστημα
να ἔχῃ λύση

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ f(x) = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 1 & \Rightarrow 2x = 2 & \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}} \\ x^2 - x - 1 = x - 2 & \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

7.

Να βρούμε το λ ώστε ηεξ $y = \lambda x + 1$ να είναι εφαπτομένητης $f(x) = x^2 + x + 2$

Ανατw το σύστημα να έχu λuη

$$\begin{cases} f'(x) = \lambda \Rightarrow \boxed{2x + 1 = \lambda} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \lambda x + 1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = \lambda x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + x + 2 = (2x + 1)x + 1$$

$$x^2 + \cancel{x} + 2 = 2x^2 + \cancel{x} + 1$$

$$1 = x^2$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$\lambda = 3$$

$$\lambda = -1$$

8. Η $f(x) = x^2 + 2\alpha x + \beta$ είναι τέτοια

όπου $x'x$ στο $x_0 = 1$.

Να βρεθούν τα α, β

Απαιτώ $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

$f'(x) = 2x + 2\alpha$

$\begin{cases} 2 + 2\alpha = 0 \\ 1 + 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}$

$1 - 2 + \beta = 0$

$\beta = 1$

9

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$g(x) = -\frac{1}{x}$$

Να βρεθούν η κοινή εφαπτομένη στα
κοινά τους σημεία.

$$\begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x + 3 = \frac{1}{x^2} \\ x^2 + 3x + 3 = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow (x+1)(2x^2 + x - 1) = 0$$

$$2 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad (-1)$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad (-1)$$

$$\downarrow \quad -1 \quad -2 \quad -1$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$(x+1)(x^2+2x+1) = 0$$

$$\underline{\underline{x = -1}} \quad (x+1)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

Το σύστημα επιλύεται για
για $x = -2$

$$\text{Πρα} \quad y - f(-2) = f'(-2)(x+1)$$

$$y - 1 = 1(x+1)$$

$$\boxed{y = x + 2}$$

10

Ο₄ $f(x) = ax + bx^2$ και
 η $g(x) = x^2 + bx + a$ έχουν
 κοινή εφαπτομένη στο κοινό
 τους σημείο με τετμήνη $x_0 = 1$

Βρες α, β .

Αναιτω $\begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 + \beta \\ \beta = 1 + \alpha \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$$

$$g'(x) = 2x + \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \boxed{\alpha = -1} \\ \boxed{\beta = 3} \end{cases}$$

11

Να βρεθεί η κοινή

εφαπτομένη των

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$g(x) = x^2 + x + 4$$

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - a f'(a) = g(b) - b g'(b) \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$\begin{cases} 2a - 3 = 2b + 1 \\ a^2 - 3a + 4 - a(2a - 3) = b^2 + b + 4 - b(2b + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 2b = 4 \\ a^2 - 3a - 2a^2 + 6a = b^2 + b - 2b^2 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 2 \Rightarrow \boxed{b = a - 2} \\ -a^2 + 3a = -b^2 \end{cases}$$

$$-a^2 + 3a = -(a - 2)^2$$

$$-a^2 + 3a = -(a^2 - 4a + 4)$$

$$\cancel{-a^2} + 3a = -\cancel{a^2} + 4a - 4$$

$$3a - 4a = -4$$

$$-a = -4$$

$$\underline{\underline{a = 4}}$$

$$\underline{\underline{B = 2}}$$

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2)$$

$$y - 10 = 5(x - 2)$$

$$\boxed{y = 5x}$$