

Θεραπεία Ενοχλή

Αποδοξία

1.
SOS

Εστω συνάρτηση f ορισμένη σ' μια
κλειστό διαστήμα $[a, b]$.

Αν η f συνεχής στο $[a, b]$

Αν $f(a) \neq f(b)$

Τότε υφάρχει για κάθε αριθμό η

μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$

τ.ω $f(x_0) = \eta$

Απόδειξη

Εστω $f(a) < \eta < f(b)$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως η.δ.σ.

$$\left. \begin{array}{l} g(a) = f(a) - \eta < 0 \\ g(b) = f(b) - \eta > 0 \end{array} \right\} g(a)g(b) < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (a, b)$ τ.ω $g(x_0) = 0$

$$f(x_0) = \eta.$$

2.
SOS

Νόο αν η $f(x)$ είναι παραγωγισιμή
στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \quad x \neq x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Συνεχής στο x_0 .

3.

Εστω $f(x) = c$. Νόο u $f(x)$
 είναι παραγωγώση σε R και
 ότι $(c)' = 0$

Απόδειξη

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = 0$$

4.

Εστω $f(x) = x$. Νόο u f παραγωγή
 σε R και ότι $(x)' = 1$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = 1$$

5.

SOS

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ Νόσ η $f(x)$ είναι παραγωγώσηστο $(0, +\infty)$ και $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Απόδειξη

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_0}^2}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{(\cancel{x - x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

6.
SOS

Αν $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμα
στο x_0 , τότε η $f+g$ είναι
παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

$$\text{Εστω } \varphi(x) = f(x) + g(x)$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

7.

$$\in \sigma \tau \omega \quad f(x) = x^{-v}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

Νόμος η f παρα/μν στο $\mathbb{R}^*$

$$\text{που} \quad f'(x) = -v x^{v-1}$$

Απόδειξη

$$f(x) = x^{-v} = \frac{1}{x^v}$$

$$f'(x) = \frac{(1)' x^v - 1 \cdot (x^v)'}{(x^v)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - v \cdot x^{v-1}}{x^{2v}}$$

$$f'(x) = -v \cdot x^{v-1-2v}$$

$$f'(x) = -v \cdot x^{-v-1}$$

8

$$\text{Εστω } f(x) = \varepsilon \varphi x \text{ . Νόο } n \text{ } f(x)$$

$$\text{Είνοι } \eta \varphi / \mu \eta \text{ } \sigma \omega \text{ } R_1 = R - \{x : \sigma \omega x = 0\}$$

$$\text{και } f'(x) = \frac{1}{\sigma \omega^2 x}$$

Αποδειξη

$$f(x) = \varepsilon \varphi x = \frac{\eta \varphi x}{\sigma \omega x}$$

$$f'(x) = \frac{(\eta \varphi x)' \sigma \omega x - \eta \varphi x \cdot (\sigma \omega x)'}{\sigma \omega^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sigma \omega^2 x + \eta \varphi^2 x}{\sigma \omega^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma \omega^2 x}$$

9.

Εστω $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Νόμο η τ παρ/μν στο $(0, +\infty)$

και οτι $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Απόδειξη

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)'$$

$$f'(x) = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

10

Εστω $f(x) = a^x$, $a > 0$. Νδo η
 $f(x)$ είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και
 $f'(x) = a^x \ln a$

Απόδειξη

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

$$f'(x) = e^{x \ln a} (x \ln a)'$$

$$f'(x) = a^x \ln a$$

11.

Νδo η $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$
 είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}^*$ και

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη

$$\text{Av } x > 0 \text{ τότε } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{Av } x < 0 \text{ τότε } [\ln(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

12.

SOS

Εστω f ορισμένη στο Δ

Αν u f συνεχής στο Δ

Αν $f'(x) = 0$, $\forall x$ εσωτερικού του Δ
τότε vale $f(x)$ σταθερή στο Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \Delta$

• Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 \neq x_2$ u f ικανοποιεί το ΘΜΤ στο $[x_1, x_2]$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Αφού $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta$ το $f'(\xi) = 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$f(x_2) = f(x_1)$$

οπότε f σταθερή.

13.
SOS

Εστω f, g ορισμένες
στο Δ . Αν f, g συνεχώς
στο Δ και $f'(x) = g'(x)$
 $\forall x$ εσωτερικού του Δ τότε
υπό $f(x) = g(x) + c$

Απόδειξη

Γράφω ότι $f'(x) = g'(x)$

$$f'(x) - g'(x) = 0$$

$$(f-g)'(x) = 0$$

$$(f-g)(x) = c$$

$$f(x) - g(x) = c$$

$$f(x) = g(x) + c.$$

14

Εστω συνάρτηση $f(x)$
συνεχής στο Δ .

αν $f'(x) > 0 \quad \forall x$ εσωτερικά του Δ
τότε η f γρ. αυξάνει στο Δ .

SOS

Απόδειξη

Η $f(x)$ ικανοποιεί το ΘΜΤ στο $[x_1, x_2]$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπw $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta$

αρα $f'(\xi) > 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

f γρ. αυξάνει.

15

SOS

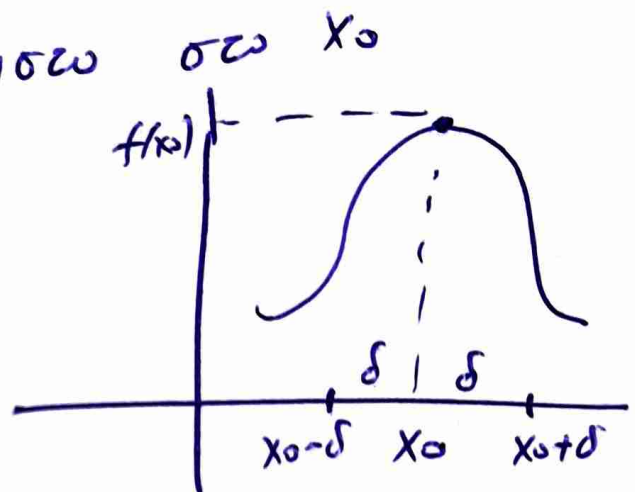
Εστω f ορισμένη στο Δ
 και x_0 εσωτερικό του Δ
 Αν η f παρουσιάζει τοπικά
 ακρότατο στο x_0 και
 είναι παραγωγισμένη στο x_0
 τότε $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Εστω ότι έχω μέγιστο στο x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$



$$f(x) \leq f(x_0)$$

Άρα η f παραγωγική στο x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

16

SOS

Εστω συνάρτηση $f(x)$
 παραγωγίσιμη στο (α, β)

με ελάχιστη τιμή στα

σημείο x_0 στο οποίο ορίζεται
 η $f(x)$ είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και

$f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε

η $f(x_0)$ είναι τοπικό
 μέγιστο της $f(x)$

Απόδειξη

x	α	x_0	β
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	↗	↘	

$$x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$\text{Άρα } f(x) \leq f(x_0)$$

17

SOS

Εστω συνάρτηση f παραγωγισίμη
στο (a, b) με ελάχιστη ίσως
ενα σημείο x_0 στο οποίο
η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και
 $f'(x) > 0$ στο (x_0, b) τότε
νός το $f(x_0)$ είναι τοπικά
ελάχιστο της f .

Ανάλυση

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

$$x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

$$\text{Άρα } f(x) \geq f(x_0)$$

18

505

Εστω f παραγωγισμένη στο (a, b) με ελάχιστη ιδιότητα στο οποίο είναι συνεχής.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ τότε το $f(x_0)$ θα είναι ακρότατο και ότι η f γν. μονοτονία στο (a, b)

Απόδειξη

	x_1	x_2
x	a	b
f'	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

Εστω $f'(x) > 0$

$$x_1 < x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$$

$$x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_0) < f(x_2)$$

$$\text{αρα } f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

αρα το $f(x_0)$ θα είναι ακρότατο

Αν $x \in (a, x_0)$ αφού $f'(x) > 0$ η $f \nearrow$

Αν $x \in (x_0, b)$ αφού $f'(x) > 0$ η $f \nearrow$

$$\text{ενεκα } f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

η $f \nearrow$ στο (a, b) .

19

SOS

Εστω συνάρτηση f ορισμένη
 στο Δ . Αν η F παράγουσα
 της f στο Δ τότε
 όλα οι συναρτήσεις της
 μορφής $G(x) = F(x) + C$
 είναι παράγουσα της f
 στο Δ και κάθε άλλη
 παράγουσα G της f
 στο Δ είναι της μορφής
 $G(x) = F(x) + C$

Απόδειξη

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

αρα η $G(x)$ παράγουσα της $f(x)$

Αρα $G(x)$ και $F(x)$ παράγουσα τότε

$$\left. \begin{array}{l} G'(x) = f(x) \\ F'(x) = f(x) \end{array} \right\} G'(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + C.$$

20

505

Εστω f συνεχής στο $[a, B]$. Αν η G παράγουσατης f στο $[a, B]$ τότε

$$\text{vdo } \int_a^B f(t) dt = G(B) - G(a)$$

ΑπόδειξηΑγού $G(x)$ και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ παράγουσα της $f(x)$

$$G'(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + C$$

$x = a$

$$G(a) = F(a) + C$$

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt + C$$

$$\boxed{G(a) = C}$$

$x = B$

$$G(B) = F(B) + C$$

$$G(B) = \int_a^B f(t) dt + G(a)$$

$$G(B) - G(a) = \int_a^B f(t) dt.$$