

Προετοιμασία

για το

Διαγωνισμό

11/1/25.

Θεωρία

Ορισμοί

1.27	1.35
1.28	1.36
1.31	1.37
1.32	
1.33	
1.34	

Αντιπαράδοξα

2.6
2.7
2.8

Αποδοχή

3.5	3.15
3.6	3.16
3.7	3.17
3.9	3.18
3.10	
3.12	
3.13	
3.14	

1.

Να εξετάσεται αν οι συναρτήσεις,

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1)$$

$$g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$$

είναι ισόσ.

Λύση

D_f

πρέπει $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow \ln e^x > \ln 1$
 $\Rightarrow x > 0.$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1)$$

D_g

πρέπει $\frac{e^x}{e^x - 1} > 0$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$\underline{\underline{x > 0}}$$

και $e^x - 1 \neq 0$

$$e^x \neq 1$$

$$\ln e^x \neq \ln 1$$

$$x \neq 0$$

$$D_g = (0, +\infty).$$

$$g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1} = \ln e^x - \ln(e^x - 1) =$$

$$= x - \ln(e^x - 1) = f(x).$$

Εχουν ιδιο τιπο.

Εχουν ιδιο ποσο ορισμου.

Αρα ανα ιση!

$$(-\infty; +\infty) \quad f(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\text{чи } g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Найдем $f+g, f-g, f \cdot g$

$$\text{чи } \frac{f}{g}.$$

Ответ

$$\bullet (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{e^x - 1} + \frac{x-1}{x-2}$$

$$\bullet (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{e^x - 1} - \frac{x-1}{x-2}$$

$$\bullet (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{e^x - 1} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [0, 2) \cup (2, +\infty).$$

D_f

$$\text{при } e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$x \geq 0$$

$$D_f = [0, +\infty)$$

D_g

$$\text{при } x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sqrt{e^x-1}}{x-1}}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{(x-2)\sqrt{e^x-1}}{x-1}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \text{ with } g(x) \neq 0$$

$$\frac{x-1}{x-2} \neq 0$$

$$x-1 \neq 0$$

$$\underline{\underline{x \neq 1}}$$

$$D_{f/g} = [0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

3.

$\in \text{OTW}$ $f(x) = \sqrt{x-1}$ can $g(x) = \frac{1}{x}$
 $D_f = [1, +\infty)$ $D_g = \mathbb{R}^*$

Nu Bspadow oi $f \circ g$ can got.

Answer

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$x \in D_g$ can $g(x) \in D_f$.

$x \neq 0$

$\frac{1}{x} \geq 1$

$\frac{1}{x} - 1 \geq 0$

$\frac{1-x}{x} \geq 0$

x	0	1
1-x	+	0
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

$x \in (0, 1]$

$D_{f \circ g} = (0, 1]$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$x \in D_f$ can $f(x) \in D_g$

$x \geq 1$

$\sqrt{x-1} \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D_{g \circ f} = (1, +\infty)$

4.

Εστω οι θετικοί νδσ
για συνάρτηση είναι 1-1.

(a) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$

Εστω $f(x_1) = f(x_2)$

$$\ln\left(\frac{x_1-2}{x_1-1}\right) = \ln\left(\frac{x_2-2}{x_2-1}\right)$$

$$\frac{x_1-2}{x_1-1} = \frac{x_2-2}{x_2-1}$$

$$(x_1-2)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2-2)$$

$$\cancel{x_1}x_2 - x_1 - 2x_2 + 2 = \cancel{x_1}x_2 - 2x_1 - x_2 + 2$$

$$-x_1 = -x_2$$

(b) $f(x) = e^x + x - 1$

$x_1 = x_2$

$f(1) = 1$

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

f αυξ. $f(1) = 1$.

5.

Νδο n $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \neq 0$

αντιστρέφεται και να βρω
την αντιστροφή $f^{-1}(x)$.

Λύση

Εστω $f(x_1) = f(x_2) \quad (\Rightarrow) \quad \frac{e^{x_1} + 1}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 1}{e^{x_2} - 1}$

$$(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 1)(e^{x_1} - 1)$$

$$\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_1} + e^{x_2} - \cancel{1} = \cancel{e^{x_2} e^{x_1}} - e^{x_2} + e^{x_1} - \cancel{1}$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

αρα f 1-1
αρα αντιστ.

$$f(x) = y$$

$$y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

1o checkpoint

$$y(e^x - 1) = e^x + 1$$

$$ye^x - y = e^x + 1$$

$$ye^x - e^x = 1 + y$$

$$e^x(y - 1) = 1 + y$$

$$e^x = \frac{1+y}{1-y}$$

$$x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2o checkpoint

para $y \neq 1$

3o checkpoint

$$\frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$y \in (-1, 1)$$

y	-1	1
$\frac{1+y}{1-y}$	-	+
$1-y$	+	-
$\frac{1+y}{1-y}$	-	+

Te 2o / 4o checkpoint

Para $x \neq 0$

$$\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} \neq 1 \Rightarrow$$

Te 2o

$$D_{f^{-1}} = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$1+y \neq 1-y \Rightarrow 2y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

6.

Επιλυση Βασικων οριων.

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{8 - 8 - 1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x}{2x} = \frac{12 - 8}{4} = 1$$

$$\textcircled{\gamma} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2}$$

x	2
x-2	-0+

$$= \frac{-1}{4} \cdot \infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4} (-\infty) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4} (+\infty) = -\infty$$

Το οριον δεν υπαρχει ,

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x - 1} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{1}{\sin x - 1} =$$

$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

opt $\sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x - 1 \leq 0$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{\sqrt{x^2 + 5}} - 3^2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}$$

$$= \frac{4}{6}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) =$$

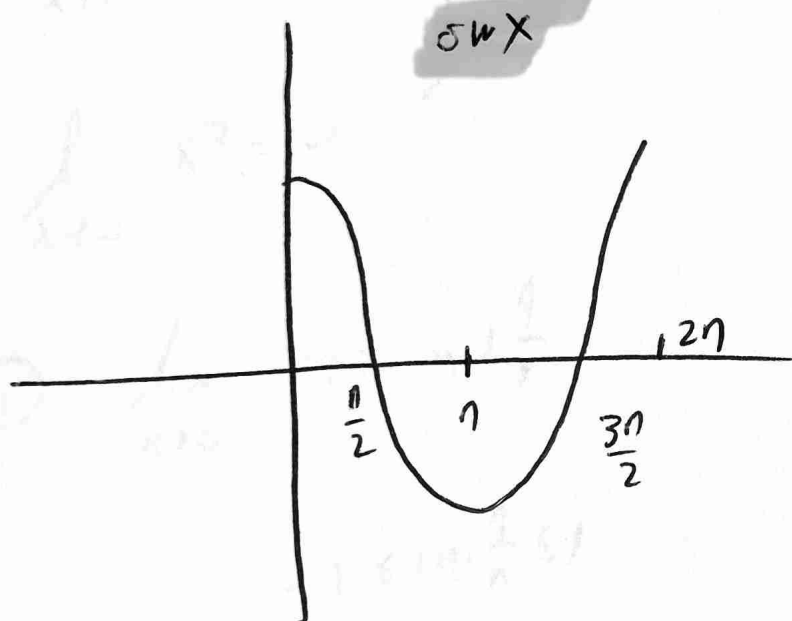
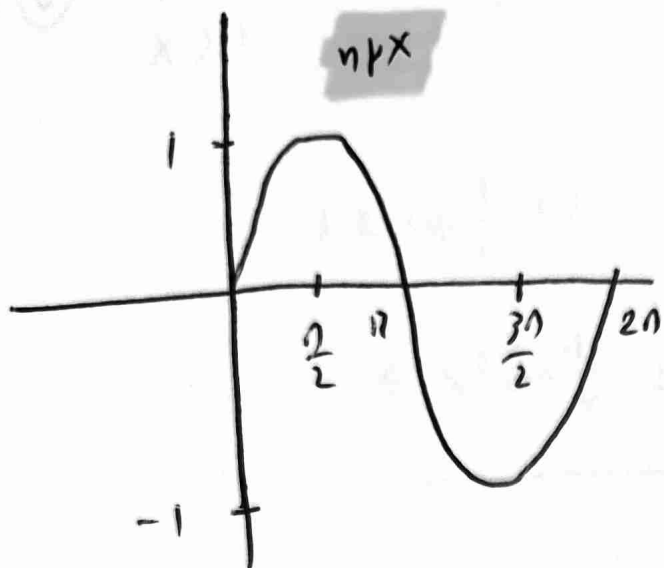
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} =$$

$$= \frac{2}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1$$



$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \delta w \frac{1}{x} = 0.$$

$$-1 \leq \delta w \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \delta w \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{Αν κ.π.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \delta w \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta r x \quad \eta r \frac{1}{x}$$

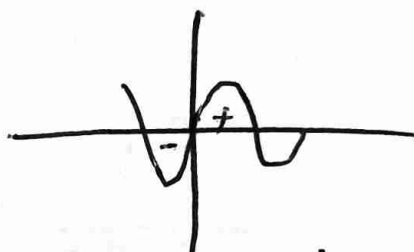
$$-1 \leq \eta r \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \eta r \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$\left| \eta r x \right| \left| \eta r \frac{1}{x} \right| \leq \left| \eta r x \right|$$

$$\left| \eta r x \eta r \frac{1}{x} \right| \leq \left| \eta r x \right|$$

$$\boxed{-\left| \eta r x \right| \leq \eta r x \eta r \frac{1}{x} \leq \left| \eta r x \right|}$$



Δεν χρειάζεται το
πρόσημο του
 $\eta r x$ κοντά στο 0

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} -\ln|x| &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Ans K, D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \ln \frac{1}{x} = 0.$$

$$(K) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{x^2 + x + 1} \quad \frac{\frac{\infty}{\infty}}{DLH} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \frac{1}{x}}{2x+1}$$

$$\frac{\frac{\infty}{\infty}}{DLH} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{x^2}}{2} = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\ln(x+1) - x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \frac{DLH}{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - (\sin x + x(-\cos x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - \sin x + x \cos x}$$

$$\frac{\left(\frac{0}{0} \right)}{DLH} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{-\frac{1}{(x+1)^2} + \cos x + x \sin x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\textcircled{p} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} \right)$$

$$= +\infty / (1 - 0) = +\infty$$

$+\infty - \infty$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = e^{(-\infty)^2} = e^{+\infty} = +\infty.$$

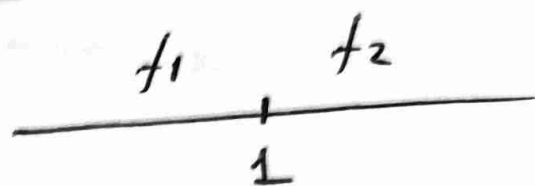
7.

Δύο σκαρπύ.

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

Είναι σκαρπύ η $f(x)$;

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{x-1} - 1) = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$



$$f(1) = 1 \cdot e^{1-1} - 1 = 0 \quad \text{αρα} \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Αρα σκαρπύ στο 1!

Η f σκαρπύ $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

ως Π.Ο.Ο.

Είναι παραγωγισίμη η $f(x)$;

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x e^{x-1} - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + x e^{x-1}}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - 0}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 1$$

Η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

και παραλ. αν η f παραλ.

$(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ αλ π.π.σ

εν τέλει δεν είναι παραγωγίσιμη.

Σχολιο

Αν η f είναι συνεχής $\delta\omega$ σημαίνει
οτι είναι παραγωγισιμή.

Αν η f $\delta\omega$ είναι συνεχής $\delta\omega$ είναι
ουτε παραγωγισιμή.

Κριτική σημεία

Αφου η f $\delta\omega$ παραγωγίζεται στο 1
Το 1 είναι κριτικό σημείο.

$$\underline{x < 1}$$

$$f_1(x) = x e^{x-1} - 1$$

$$f_1'(x) = e^{x-1} + x e^{x-1}$$

$$f_1'(x) = e^{x-1} (1+x)$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0 \Rightarrow x+1=0$$

$$x = -1$$

κριτικό σημείο

$$\underline{x > 1}$$

$$f_2(x) = x \ln x$$

$$f_2'(x) = \ln x + 1$$

$$\rightarrow \ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Εφαρμογή στο 1

Μεγάλη προσοχή εδώ!

Το $x_0=1$ είναι το σημείο αλλαγής
τύπου.

Η εφαπτομένη στο 1 είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\text{Το } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Εδώ αφού η f δεν είναι
πάρ/μ στο 1 δω ορίζεται
εφαπτομένη στο 1.

As υποθέσουμε ότι στην ίδια άσκηση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= 1 \end{aligned} \right\} f'(1) = 1.$$

$$\text{εξ } y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\boxed{y = x - 1}$$

Στο σημείο αυτό η εφαπτομένη
σχηματίζει γωνία 45° με την
α'x γωνία $\epsilon\varphi\omega = f'(1)$

$$\epsilon\varphi 45 = 1$$

$$\epsilon\varphi 135 = -1$$

8.

 $\in \sigma \tau w$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = 4.$$

• Να βρεθεί το $f(1)$ και $f'(1)$.Λύση

$$\text{Από } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = 4$$

$$\text{Θέτω } g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x-1} \quad \text{από } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$$

$$g(x)(x-1) = f(x) - x^2$$

$$g(x)(x-1) + x^2 = f(x)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1) + x^2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$4 \cdot (1-1) + 1^2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

και αφού η f συνεχής $f(1) = 1$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x-1) + x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} + \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + x + 1) = 4 + 2 = 6$$

$$f'(1) = 6.$$

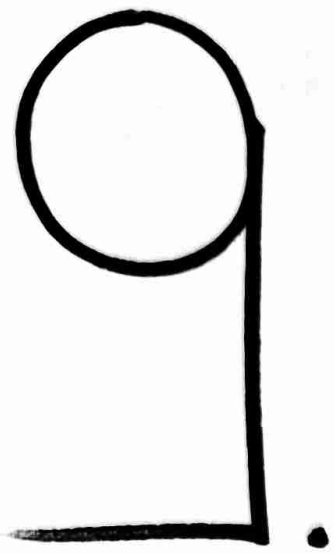
Σχόλιο

Παρατήρηση η άσκηση αυτή να

Για να να $f(1)$ και $f'(1)$

θα μπορούσε να Γίνεται την

εφαρμογή στο 1.



Παραγωγή

συνθετών

συναρτήσεων

$$\textcircled{a} \quad f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)'$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{b} \quad f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$f'(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)'$$

$$f'(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right)$$

$$\textcircled{1} \quad g(x) = f^2(x) - \ln^2 f(x) - f^2(x^2)$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\ln f(x)(\ln f(x))' - \\ - 2f(x^2)(f(x^2))'$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\ln f(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) - \\ - 2f(x^2)f'(x^2) 2x$$

10. Το πιο σημαντικό Θεώρημα
της Γ' Λυκείου είναι η
μονotonία μιας συνάρτησης.

α) $f(x) = e^x + x^3 + x \quad , x \in \mathbb{R}.$

$f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$ άρα $f \nearrow$

β) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad , x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ άρα $f \searrow$

γ) $f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ άρα $f \searrow$

γιατί $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$

δ) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad , x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1$

$f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ άρα $f \nearrow$

$\bullet e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

$$\textcircled{\epsilon} f(x) = 2x \ln x - x^2, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2x$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x$$

$$f'(x) = 2(\ln x + 1 - x) \leq 0 \text{ από } f'$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1$$

$$\ln x - x + 1 \leq 0$$

$\sum \epsilon$ όλα τα παραπάνω

σημείο $\cup$ $f'(x) \leq 0$

σταθερό πρόσημο

αρκετά φυσικά πάντα

να το κοιτάμε αυτό.

$$\textcircled{3} \quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x - 5)$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \textcircled{x = -1} \quad \textcircled{x = 5}$$

x	-1	5	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

Η f γρ. αύξουσα
 $(-\infty, -1]$ και $[5, +\infty)$

Η f γρ. φθίνουσα
 $[-1, 5]$

Το $A(-1, f(-1))$ T.M

Το $B(5, f(5))$ T.E.

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\textcircled{x = 2} \quad \vee \quad \textcircled{x = -2}$$

x	-2	0	2
x^2-4	+	-	+
x^2	+	+	+
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

$$\textcircled{\text{d}} f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = e^x(x-1)^2 \geq 0$$

$f \nearrow$

Αυτές ήταν περιπτώσεις
που βασικών προποζωνίων
που η $f'(x)$ έχη ρίζα.

i) $f(x) = e^x + x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = e^x + 2x - 1$$

Η $f'(x)$ δεν είναι θετική, δεν είναι αρνητική

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν λύνεται.

Αρα παρατηρώ πάλι την $f'(x)$ και πάλι
στη $f''(x)$.

$$f'(x) = e^x + 2x - 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0$$

x	0	
f''	+	+
f'	$\nearrow$ -	$\nearrow$ +
f	$\searrow$	$\nearrow$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\textcircled{\text{K}} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-2}, \quad x \in (0, 2)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2) - \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x \ln x}{x(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x \ln x}{x(x-2)^2}$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός

Το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται
μόνο από τον αριθμητή.

$$\varphi(x) = x-2-x \ln x$$

$$\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\varphi'(x) = -\ln x$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

x	0	1	2
φ'	+	0	-
φ	$\nearrow$	-	$\searrow$
$x(x-2)^2$	+	+	
f'	-	-	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) \leq -1$$

Μεγάλη σημασία σε

προβλήματα κλάσματος συναρτήσεων

$$(1) f(x) = \begin{cases} x e^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ και } f(1) = 0$$

Συνεχώς στο 1.

$x < 1$

$$f_1(x) = x e^{x-1} - 1$$

$$f_1'(x) = e^{x-1}(x+1)$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0$$

$x = -1$

$x > 1$

$$f_2(x) = x \ln x$$

$$f_2'(x) = \ln x + 1$$

$$\rightarrow f_2'(x) = 0$$

$x = \frac{1}{e}$

x	-1	$\frac{1}{e}$	1	
f_1'	-	0	+	+/+/+/+/+/+/+/+/+/
f_2'	/	/	/	+
f'	-	+	+	+
f	↘	↗	↗	↗

Σχολια

Σε κάθε μονοτονία που
καταλήγει σε ένα από τα
δύο παρακάτω σχήματα
τονίστε την ανισότητα.

x	x_0	
$f(x)$		

$$f(x) \leq f(x_0)$$

x	x_0	
$f(x)$		

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Σημαντικά γνωστές

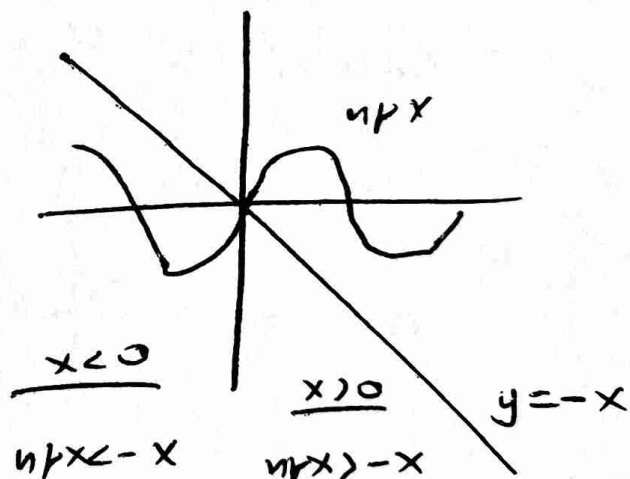
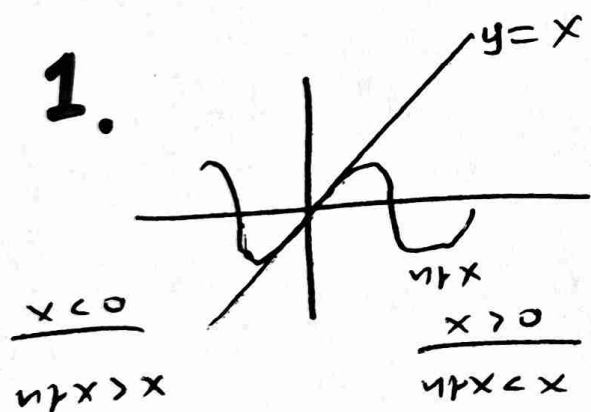
Βασικά ανισότητες.

1. $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

2. $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$. Το "=" για $x=1$

3. $|\ln x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

Σημαντικά πηλοροφούδα.

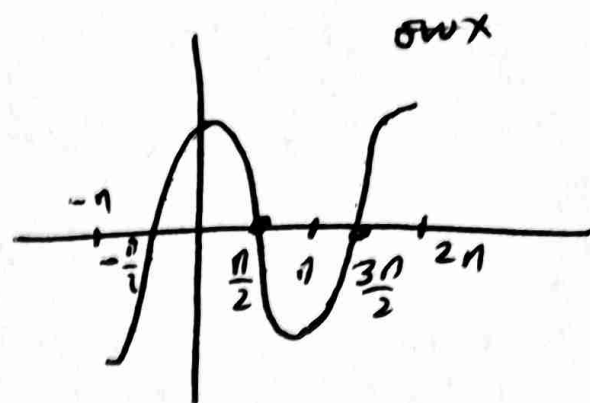
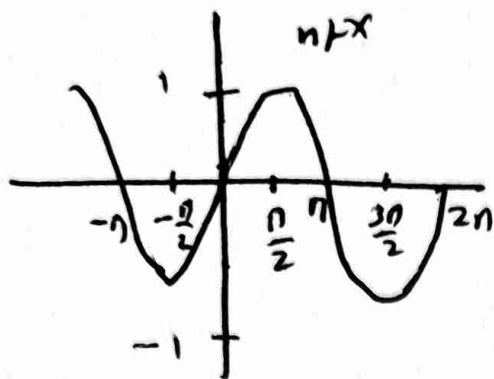


$$\eta(x) = x$$

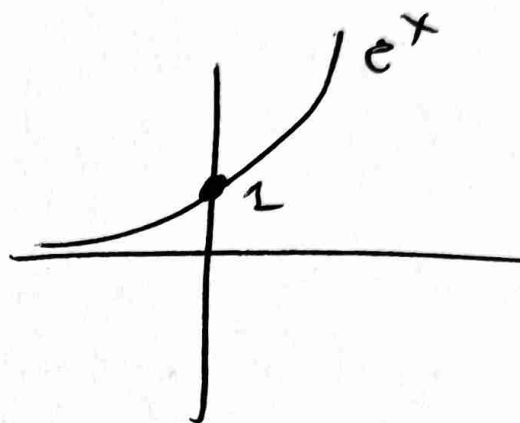
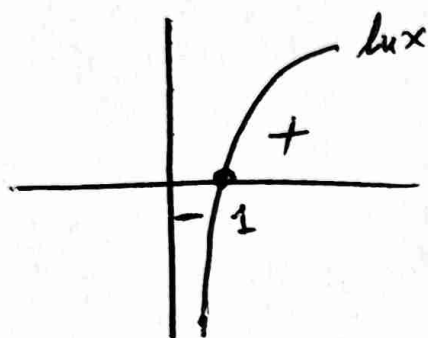
$$(=)$$

$$x=0.$$

2.



3.



4. Μια ανίσωτητα που χρησιμοποιούμε

σωστά είναι:

• αν $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

• αν $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$

11.

Το ενορχαστο Τητομα

είναι το Θεωρημα του

Βολτσανο.

α). Νδο η εξίσωση $e^x + x = 2$

εχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

$$e^x + x - 2 = 0$$

$$\boxed{f(x) = e^x + x - 2}$$

Η $f(x)$ συνεχής $[0,1]$ ως η.δ.σ.

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$$

• $f(0) \cdot f(1) < 0$ Βολτσανο $\exists x_0 \in (0,1)$

$$\text{τ.ω } f(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x_0} + x_0 = 2$$

(B) Nдо $\exists x_0 \in (0, 1)$ т.ч. $e^{x_0} + x_0 = 2$

$$e^{x_0} + x_0 = 2$$

$$e^x + x = 2$$

$$e^x + x - 2 = 0$$

Общепн $f(x) = e^x + x - 2$

Н $f(x)$ свхххх σ $[0, 1]$ н н.д.д.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array} \right\} f(0)f(1) < 0$$

Болzano $\exists x_0 \in (0, 1)$ т.ч. $f(x_0) = 0$

$$e^{x_0} + x_0 = 2.$$

① Νόο η εξίσωση $e^x + x = 2$ έχει
μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

Επιλύεται με τον ίδιο τρόπο
ακριβώς που που πρέπει να
κάνω μονοζωνία για την $f(x)$
ώστε να εξασφαλισω μοναδικότη-
τα της ρίζας.

$$f(x) = e^x + x - 2$$

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

$f \nearrow$

Συνεπώς το x_0 μοναδική ρίζα.

⑧ Νδο η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$

Τερνι των $x'x$ ακριβώς μια ρίζα

σε σύμβολο με τετρήρση $x_0 \in (0, 1)$

Η $f(x) = e^x + x - 2$ είναι συνεχής

στο $[0, 1]$ w/ n.σ.δ

$f(0)f(1) < 0$ Βολτανο $\exists x_0 \in (0, 1)$

τ.ω $f(x_0) = 0$

Επίση $h \neq 0$ αρα

Τερνι των $x'x$ σε μοναδικό σύμβολο

$M(x_0, 0)$ τ.ω $x_0 \in (0, 1)$,

③. Νόσ η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$

$$(x-1)e^x + (x-2)(x^2+1) = 0$$

$$f(x) = (x-1)e^x + (x-2)(x^2+1)$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ κ.ν.σ.σ.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = e^2 > 0 \end{array} \right\} f(1)f(2) < 0$$

Βολτσα $\exists \xi \in (1, 2) \text{ π.ω } f(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^\xi}{\xi-2} + \frac{\xi^2+1}{\xi-1} = 0.$$

(7) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$

Νόσο η επίσυνση $f(x) = x - 1$ έχω

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$

$$f(x) = x - 1$$

$$f(x) - x + 1 = 0$$

$$\boxed{g(x) = f(x) - x + 1}$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ με π.δ.σ

$$\begin{cases} g(1) = f(1) > 0 \\ g(2) = f(2) - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f(\mathbb{R}) = (0, 1)$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{T_f = (0, 1)\}$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) < 1$$

$$\text{Είπω } 0 < f(1) < 1$$

$$0 < f(2) < 1$$

$$f(2) - 1 < 0$$

$$g(1)g(2) < 0$$

Βολζαννο $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ο

$$g(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow f(\xi) = \xi - 1$$

(η) Δίνονται $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

Νόο C_f και C_g έχουν αψευδ

ενα κοινω σημειω $M(x_0, y_0)$ οπου

$$x_0 \in (1, e).$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\boxed{h(x) = \ln x - \frac{1}{x}}$$

H $h(x)$ συνεχη $[1, e]$ με π.δ.ν

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = -1 < 0 \\ h(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \end{array} \right\} h(1)h(e) < 0$$

Βολζω $\exists x_0 \in (1, e)$ τ.ω $h(x_0) = 0$

$$f(x_0) = g(x_0)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad h \nearrow \text{αρα το } x_0 \text{ μοναδικω}$$

12

Σημαντικό: Το άνω
είναι η εφαπτομένη
μιας συνάρτησης.

Περίπτωση 1

α) Ψάχνω την εφαπτομένη μιας συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

στο σημείο της $A(2, f(2))$

$$\Leftrightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - 2 = 3(x - 2)$$

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

Τύπος

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

β) Ψάχνω την εφαπτομένη της $f(x) = x^2 - x$

η οποία διέρχεται από το $A(1, -1)$

$$\Leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow A(1, -1)$$

$$-1 - f(x) = f'(x)(1 - x)$$

$$-1 - (x^2 - x) = (2x - 1)(1 - x)$$

$$\cancel{-1 - x^2 + x} = \cancel{2x - 2x^2 - 1 + x}$$

$$-x^2 + 2x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = -x$$

$$\underline{\underline{y = -x}}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$\underline{\underline{y = 3x - 4}}$$

⑦ Να βρείς την εφαπτομένη της $f(x) = x^2 - x$
 η οποία σχηματίζει γωνία 135°
 με τον x

$$\varepsilon \circ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

αρα $\varepsilon \phi 135 = f'(x_0)$

$$-1 = 2x_0 - 1$$

$$\underline{\underline{x_0 = 0}}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y = -x$$

Συνοψίζω λοιπόν ότι

1^η: εφ'αυτοί που στο $A(x_0, H(x_0))$

2^η: εφ'αυτοί που διαρρέει από
σημείο $A(x_0, y_0)$.

3^η: εφ'αυτοί που ομοιάζει

χρησιμοποιεί με κάποιο τρόπο

των κλίση δηλαδή $f'(x_0) = \lambda$

Αντί να είναι τα minimum

Βασικά στοιχεία που πρέπει

να χρησιμοποιήσει

Προδοχή

1η. Συνδυαστικά ώστε να εφό $y = ax + b$

να επαληθεύεται στην $f(x)$ στο x_0

$$\begin{cases} f'(x_0) = a \\ f(x_0) = ax_0 + b. \end{cases}$$

2η: Συνδυαστικά ώστε να έχω κοινή
επαληθεύεται των (f, g) στο

κοινό τους σημείο με τετμήριον x_0

$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$$

3η: Συνδυαστικά ώστε να έχω κοινή
επαληθεύεται των (f, g)

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - a f'(a) = g(b) - b g'(b). \end{cases}$$

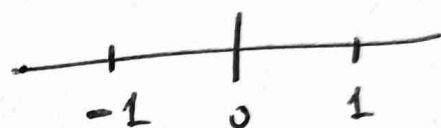
13.

Το Θέμα του
Rolle.

α) Έστω $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0 \\ x^2 + 3x, & x > 0 \end{cases}$

Να ελέγξω αν η $f(x)$ ικανοποιεί
τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 3x = 0$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(0) = 0$

αρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Επίσης η $f(x)$ είναι συνεχής $[-1, 0)$

και $(0, 1]$ ως π.σ.σ. αρα συνεχής

$[-1, 1]$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 - 3}{1} = -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 3}{1} = 3$$

H $f(x)$ δαρ είναι παρ/μη σω 0.
αρε δαρ ικανοποιάται 0. Πάλε

$$\text{Αποφασίζω ότι } f(-1) = f(1) = 4.$$

f συνεχής σω $[-1, 1]$ ✓

f παρ/μη σω $(-1, 1)$ ✗

$$f(-1) = f(1) \quad \checkmark$$

(B) Έστω $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής
 στο $[0, n]$ και παράγωγος στο $(0, n)$
 Νόμος $g(x) = f(x) \eta \mu x$ ^{ικανοποιεί τον}
 Rolle στο $[0, n]$ και στα ^{συνεχώς} $ω$ δο
 η εξίσωση $f'(x) = -f(x) \sigma \varphi x$
 έχει ταλαντισμών μία ρίζα στο $(0, n)$.

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0, n]$ ως η.δ.δ.

Η $g(x)$ παράγωγος στο $(0, n)$ ως η.π.δ

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) \eta \mu 0 = 0 \\ g(n) &= f(n) \eta \mu n = 0 \end{aligned} \right\} g(0) = g(n)$$

Rolle $\exists x_0 \in (0, n)$ τ.ω $g'(x_0) = 0$.

Αφού ισχύει ο Rolle για την $g(x)$

$$g'(x) = f'(x) \eta \mu x + f(x) \sigma \varphi x$$

$$\text{οπώ } g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \eta \mu x_0 + f(x_0) \sigma \varphi x_0 = 0$$

$$f'(x_0) + f(x_0) \frac{\sigma \varphi x_0}{\eta \mu x_0} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f'(x_0) = -\sigma \varphi x_0 / \eta \mu x_0}}$$

⑧ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραμ. με $f'(x) \neq -1$
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι f και $y = -x$ έχουν
το πολύ ένα κοινό σημείο.

$$f(x) = -x \quad \Rightarrow \quad f(x) + x = 0$$

$$\boxed{g(x) = f(x) + x}$$

Έστω ότι η $g(x)$ έχει 2 ρίζες.
 $g(x_1) = g(x_2) = 0$

$$\text{Ρolle} \quad g'(\xi) = 0.$$

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

$$g'(\xi) = f'(\xi) + 1 = 0$$

$$f'(\xi) = -1 \quad \text{Αυτό}$$

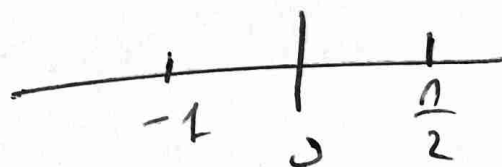
Αρα υπάρχει το πολύ ένα
 κοινό σημείο.

14. Το ΘΜΤ

Θέλει προσοχή για
κλαστική διατύπωση και
προσδοκώμενη συνέπεια και
παράχρησιν.

① Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

Κατανοούμε ότι προσδοκώμενη
ΘΜΤ στο $[-1, \frac{1}{2}]$;



• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
 • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ } $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$ από συνέπεια στο 0!

Είνα σωστό στο $[-1, 0)$ και
 $(0, \frac{1}{2}]$ με η.δ.δ.

Αρα σωστό $[-1, \frac{1}{2}]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x} = 1$$

Αρα όχι συμ/κη στο 0

αρα δεν ικανοποιούνται οι
προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο

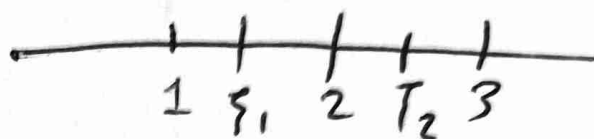
$$[-1, \frac{1}{2}]$$

(B) $\exists \sigma \tau w \quad f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ swcxnd.

ku $f(1) = 2$ ku $f(3) = 0$.

ND $\exists \tau_1, \tau_2 \in (1, 3)$ r.w $f'(\tau_1) + f'(\tau_2) = -2$.

$$f'(\tau_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{f(2) - 2}{1}$$



$$f'(\tau_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{0 - f(2)}{1}.$$

Apr $f'(\tau_1) + f'(\tau_2) = f(2) - 2 - f(2) = -2.$

⑧ Έστω $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ απόλυτα συνεχής με $f(1)=2$ και $f(2)=4$.

i) Να δο $\exists x_0 \in (1,2)$ τέω $f(x_0) = 2(3-x_0)$

$$f(x) = 2(3-x)$$

$$\underbrace{f(x) - 2(3-x)}_{g(x)} = 0$$

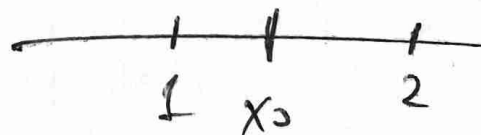
$$\left. \begin{aligned} g(1) &= f(1) - 4 = 2 - 4 = -2 \\ g(2) &= f(2) - 2 = 2 \end{aligned} \right\} g(1)g(2) < 0$$

Βολω $\exists x_0 \in (1,2)$ τέω $g(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow \underline{f(x_0) = 2(3-x_0)}$$

ii) Να δο $\exists \beta_1, \beta_2 \in (1,2)$ τέω $f'(\beta_1)f'(\beta_2) = 4$

$$f'(\beta_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{2(3-x_0) - 2}{x_0 - 1}$$



$$f'(\beta_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{4 - 2(3-x_0)}{2 - x_0}$$

$$f'(\beta_1) \cdot f'(\beta_2) = \frac{4-2x_0}{x_0-1} \cdot \frac{2x_0-2}{2-x_0} = \frac{-2(\cancel{x_0-2})}{\cancel{x_0-1}} \cdot \frac{2(\cancel{x_0-1})}{\cancel{x_0-2}} = 4$$

15

Το Θεώρημα του
Fermat.

α. Έστω $f(x) = 2\alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + 3\alpha$

η οποία παρουσιάζει ακρότατο
στο 1 το 5. Βρίτ α, β .

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1
το 1 είναι εσωτερικό του $(0, \infty)$
και η f παρ/κη στο 1

τότε $f'(1) = 0$. και $f(1) = 5$

$$f'(x) = 2\alpha \cdot \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

$$f'(1) = 2\alpha + \beta = 0$$

$$f(1) = -\beta + 3\alpha = 5$$

⊕

$$5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -2$$

(B) Έστω ότι $f(x) = e^x - \alpha x$

και $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Νόο $\alpha = 1$.

• $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

Ακροαίτιο
στο 0

Fermat

$f'(0) = 0$

$f'(x) = e^x - \alpha$

$f'(0) = 1 - \alpha = 0$

$\alpha = 1$

Ans

ανισότητα

σε

ισότητα

γ) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nap / μ $f'(0) = 1$

$$f^3(x) + e^x = f(H(x)) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Νόο n f δεν έχει ακρότατο.

Έστω ότι n f έχει ακρότατο
στο x_0 από από Fermat

$$f'(x_0) = 0.$$

$$3f^2(x)f'(x) + e^x = f'(H(x))f'(x) + 1$$

$$\underbrace{x = x_0}_{\text{substitution}} \quad 3f^2(x_0)f'(x_0) + e^{x_0} = f'(H(x_0))f'(x_0) + 1$$

$$e^{x_0} = 1$$

$$\underline{\underline{x_0 = 0}}$$

από $f'(0) = 0$ Απορ γιατί $f'(0) = 1$

από δεν έχει ακρότατο.

16

Ενδεύου

Εξίσωση.

(α) . Έστω $f(x) = x^2 + \ln x - 1$, $x > 0$

Να λύσει η εξίσωση $(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) = 1$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$$

$$f'(x) > 0$$

↗

$$(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) - 1 = 0$$

$$f(x^2+1) = 0$$

$$f(x^2+1) = f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$x^2+1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

③ Να λυθού η εξίσωση $x^2 = 1 - \ln x$

$$\underbrace{x^2 - 1 + \ln x}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

$$f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{για } x > 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$f \nearrow \Rightarrow f(1) = 0$$

④ Έστω $f' \nearrow$. Να λυθού η εξίσωση
 $f(\ln|x| + 3) - f(\ln|x|) = f(x+3) - f(x)$

$$\left(\begin{array}{l} g(x) = f(x+3) - f(x) \\ \downarrow \\ g(\ln|x|) = g(x) \end{array} \right)$$

$$\ln|x| = x$$

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad g \nearrow$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

$$\bullet \quad x < x+3 \quad \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x+3)$$

$$f'(x+3) - f'(x) > 0$$

⑧ Έστω $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) = f(x^3)$

σε $(-\infty, \infty)$.

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

• $x > 0$

$f \nearrow$

$-x < 0$

$$e^{-x} < e^0$$

$$e^{-x} < 1$$

$$-e^{-x} > -1$$

$$1 - e^{-x} > 0$$

$$f'(x) > 0$$

$$f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) - f(x^3) = 0$$

προφανώς ρίχνει $x = 1$.

• $x > 1$

$$\rightarrow x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow e^{x-1} > e^0 \Rightarrow e^{x-1} > 1 \Rightarrow e^{x-1} - 1 > 0$$

$$\rightarrow x^3 < x^5 \Rightarrow f(x^3) < f(x^5) \Rightarrow f(x^5) - f(x^3) > 0 \quad (+)$$

$$f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) - f(x^3) > 0$$

$$\bullet \underline{x < 1}$$

$$\rightarrow x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow e^{x-1} < e^0 \Rightarrow e^{x-1} < 1$$

$$e^{x-1} - 1 < 0$$

$$f(e^{x-1} - 1) < f(1)$$

$$f(e^{x-1} - 1) < 0$$

(+)

$$\rightarrow x^5 < x^3 \Rightarrow f(x^5) < f(x^3) \Rightarrow f(x^5) - f(x^3) < 0$$

$$f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) - f(x^3) < 0$$

Apakah mungkin jika $x=1$.

$$\textcircled{\varepsilon} . 2x \eta \rho x + 2\sigma \omega x = \eta$$

$$\left[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right]$$

$$\underbrace{2x \eta \rho x + 2\sigma \omega x - \eta}_{f(x)} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-\frac{\eta}{2}) = 000 = 0 \\ f(\frac{\eta}{2}) = 000 = 0 \end{array} \right\} \text{προφανώς πηλ.}$$

$$x = -\frac{\eta}{2} \quad x = \frac{\eta}{2}.$$

$$f'(x) = 2 \cancel{\eta \rho x} + 2\sigma \omega x - 2\cancel{\eta \rho x}$$

$$f'(x) = 2\sigma \omega x \quad \textcircled{+}$$

x	$-\frac{\eta}{2}$	0	$\frac{\eta}{2}$
f'	-	+	
f	↘	↗	

Εχω δύο διαστήματα

μονωτικά από η f(x)

Εχει το πηλ. στο πηλ.

Εχω βρω πηλ. στο, από έχω στο.

3

$$x^2 = 2^x$$

σε $(0, +\infty)$

προφανώς π.π. $x=2, x=4$

$$\ln x^2 = \ln 2^x$$

$$2 \ln x = x \ln 2$$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{\ln 2}{2}$$

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

x	e	
g'	+	-
g	↗	↘

Η $g(x)$ έχει 2 διαστροφές ποσοτικής

αφ' η επίδωξη $g(x) = \frac{\ln 2}{2}$ έχει το π.π. 2 π.π.
 έχει βρα η δ. 2 π.π. αφού το 1

⑦. $x \ln x = 2x - e$

$$\underbrace{x \ln x - 2x + e}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow f(x) = 0$$

Σ TO $x = e$
EXW OXOXOXOX

$x = e$

$$f'(x) = \ln x + 1 - 2$$

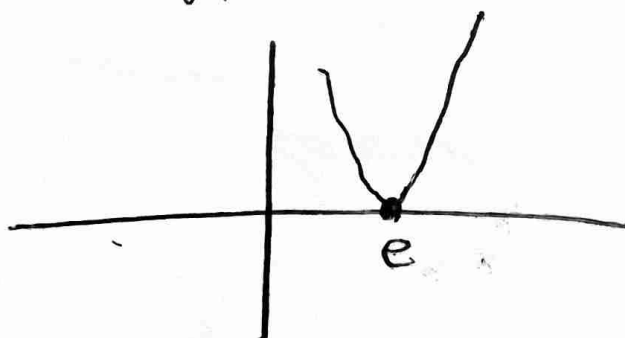
$$f'(x) = \ln x - 1$$

$$\rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = e}}$$

x	e	
f'	-	+
f	↘	↗

$$f(x) \geq f(e)$$

$$f(x) \geq 0$$



$$\textcircled{9} \quad 3^x + 4^x = 5^x$$

$$\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(1) &= f(2) \\ f(0) &= 1 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet x_1 < x_2 &\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \\ \bullet x_1 < x_2 &\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \end{aligned} \right\} \textcircled{+}$$

$f \downarrow$

$$(i) \quad x^2 + 4x + 5 = 5e^x$$

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{e^x} = 5$$

$$\underbrace{(x^2 + 4x + 5)}_{f(x)} e^{-x} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

$$f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 1$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

$$f'(x) = (2x + 4)e^{-x} - (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x + 4 - x^2 - 4x - 5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

$$\boxed{f'(x) = -(x+1)^2 e^{-x}} \leq 0$$

$f!$

17

Απόδειξη
ανισότητας.

①, Να δειχθεί $e^x \geq 1 - \sqrt{x}$

$\forall x \geq 0$

$$\underbrace{e^x - 1 + \sqrt{x}}_{f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$f \nearrow$

Αρα

$\forall x \geq 0$

$f \nearrow \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x - 1 + \sqrt{x} \geq 0$$

$$\underline{e^x \geq 1 - \sqrt{x}}$$

③ No $e^x \geq x+1$. $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$\rightarrow e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

x	0	
f'	-	+
f	↘	↗

$$f(x) \geq f(0)$$

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq x+1$$

8

Сотв $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

x	1
f'	-0+
f	↘ ↗

$$f(x) \geq f(1)$$

$$\underline{\underline{f(x) \geq 2}}$$

i) $\forall x > 2 \quad \forall \delta > 0 \quad f(x) > 13$.

$\rightarrow \forall x > 2 \quad \overset{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(2) \quad \Rightarrow f(x) > 13$.

ii) $\forall x > 1 \quad \forall \delta > 0 \quad f(\sqrt{x}) > 2$

$\rightarrow x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \quad \overset{f \uparrow}{\Rightarrow} f(\sqrt{x}) > f(1)$

iii) $\forall x > 1 \quad \forall \delta > 0 \quad f(f(x)) > 13$. $f(\sqrt{x}) > 2$

$\rightarrow \forall x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 2$

$$f(f(x)) > f(2)$$

$$f(f(x)) > 13$$

$$\text{iv) Av } 1 < \alpha < \beta \quad \text{to be vld } (\alpha + \beta) (\alpha^2 + \beta^2) > 4$$

$$\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha + 1 < \beta^4 - 4\beta + 1$$

$$\alpha^4 - \beta^4 < 4\alpha - 4\beta$$

$$\alpha^4 - \beta^4 < 4(\alpha - \beta)$$

$$\frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta} > 4 \quad (\Rightarrow) \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha - \beta} > 4$$

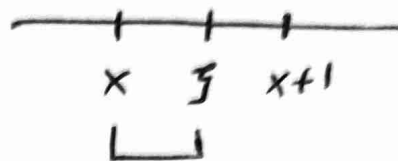
$$\frac{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)}{\cancel{\alpha - \beta}} > 4$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) > 4$$

⑧ $\in \sigma \tau \omega$ f'

i) Nđo $f'(x) + f(x) < f(x+1)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$$



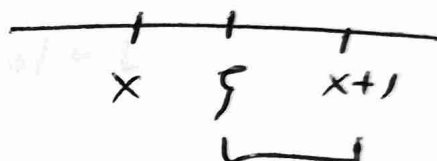
$$x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

$$\boxed{f'(x) + f(x) < f(x+1)}$$

ii) Nđo $f(x+1) - f'(x+1) < f(x)$

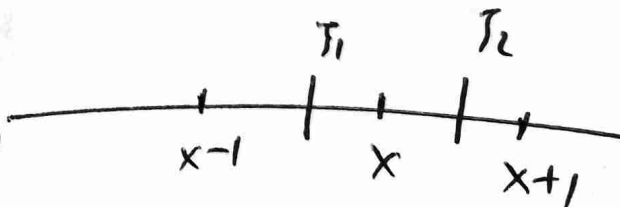
$$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$$



$$\boxed{f(x+1) - f(x) < f'(x+1)}$$

iii) Nđo $2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1)$$

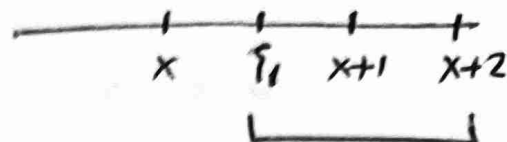


$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x)$$

$$\boxed{2f(x) < f(x+1) + f(x-1)}$$

iv) Νδσ $f(x+1) < f'(x+2) + f(x)$



$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\xi_1 < x+2 \rightarrow f'(\xi_1) < f'(x+2)$$

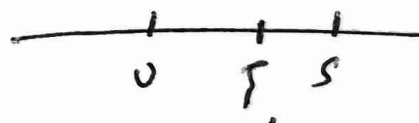
$$f(x+1) - f(x) < f'(x+2)$$

$$f(x+1) < f'(x+2) + f(x)$$

v) Εστω ότι $2 \leq f'(x) \leq 4$ και

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $f(0) = 1$

Νδσ $11 \leq f(5) \leq 21$.



$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{f(5) - 1}{5}$$

οπω $2 \leq f'(x) \leq 4$

$$2 \leq f'(\xi) \leq 4$$

$$2 \leq \frac{f(5) - 1}{5} \leq 4$$

$$10 \leq f(5) - 1 \leq 20$$

$$\underline{\underline{11 \leq f(5) \leq 21}}$$

$$\textcircled{\varepsilon} \quad \text{EOTU} \quad f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu \quad f(1) = 1$$

$$x f'(x) + 1 < x e^{x-1} \quad \forall x > 0.$$

$$\text{NDO} \quad f(x) < e^{x-1} - \ln x, \quad \forall x > 1$$

$$\underbrace{f(x) - e^{x-1} + \ln x}_{g(x)} < 0$$

$$g'(x) = f'(x) - e^{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{x f'(x) - x e^{x-1} + 1}{x}$$

$$g'(x) < 0$$

$$g \downarrow.$$

Apv

$$\forall x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$$

$$f(x) - e^{x-1} + \ln x < 0$$

$$f(x) < e^{x-1} - \ln x$$

(5) $f \in C^1 \quad f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu \in H(1) = 0.$

$$\text{Au} \quad \forall x > 0 \quad x f'(x) < f(x) + x^2 \sigma \omega x$$

$$\text{vdo} \quad f(x) < x \mu x, \quad \forall x > n$$

$$\text{Einw} \quad x f'(x) - f(x) < x^2 \sigma \omega x$$

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} < \sigma \omega x$$

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} - \sigma \omega x < 0$$

$$\left(\underbrace{\frac{f(x)}{x} - \mu x}_{g(x)} \right)' < 0$$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow$$

$$\forall x > n \Rightarrow g(x) < g(n)$$

$$\frac{f(x)}{x} - \mu x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) < x \mu x}}$$