

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 6)

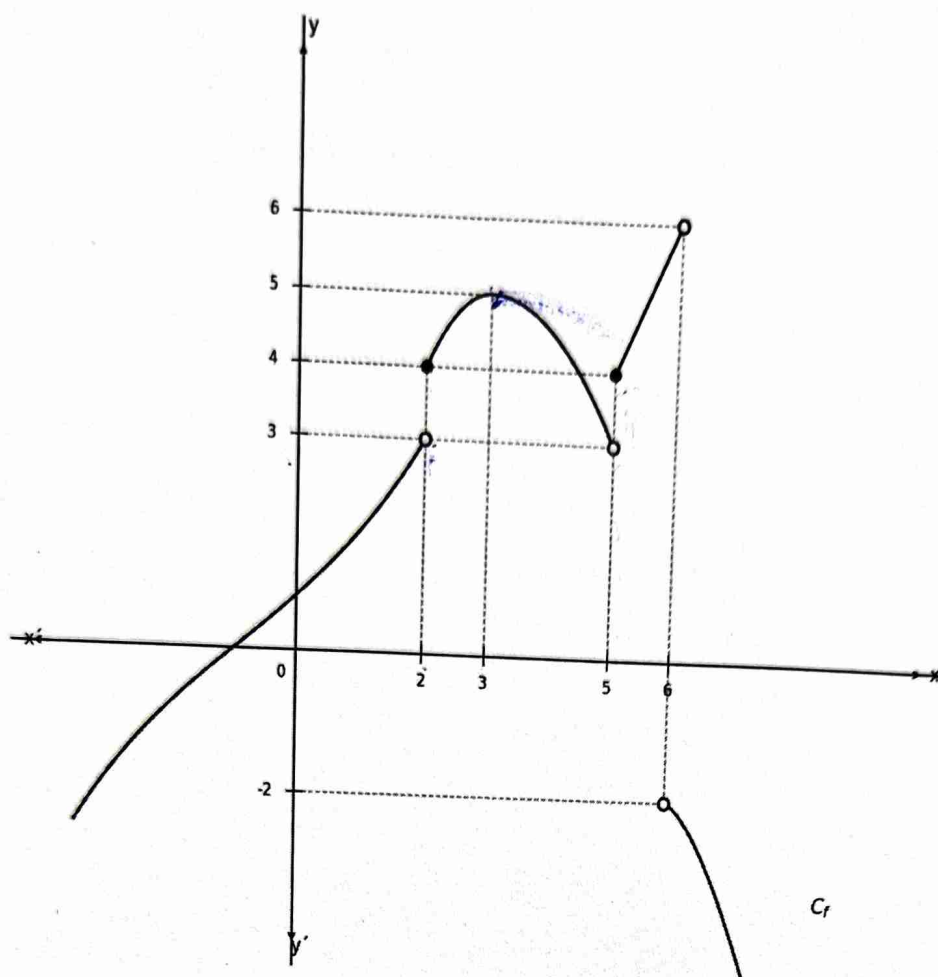
A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

A3. Πότε μια ευθεία (ε) διαπερνά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 3)

A4. Στην επόμενη σελίδα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος*:

- I. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$.
- II. Η f είναι συνεχής στο $[5, 6)$.
- III. Το $\lim_{x \rightarrow 3} [f(f(x))]$ δεν υπάρχει.
- IV. Η f έχει τρία σημεία ασυνέχειας.

(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος*:

- i. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(f(\alpha), f(\beta))$.
- ii. Για τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R}^*,$ ισχύει $f' = g'$.

- iii. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού, έχει πάντα μοναδικό σημείο καμπής.
- iv. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα, τότε ισχύει:
 $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

B1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

B2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f .

(Μονάδες 4)

B3. Έστω $g(x) = \ln x$, $x > 0$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 4)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 4)

B5. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

(Μονάδες 4)

B6. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση g με $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $xg'(x) - g(x) = x^2 f'(x)$, για κάθε $x \neq 0$.
- $g(-1) = -1$
- $g(1) = 1$

Γ1. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του πραγματικού αριθμού a για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

Για τα ακόλουθα ερωτήματα θεωρήστε ότι $a=3$.

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6)

Γ3. Αν $g(x) = 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 6x$, $x > 0$, να βρείτε τους αριθμούς β και γ , με $\beta \in \mathbb{R}$ και $\gamma > 0$, έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{f(x)} - \left((e^\beta - \beta)x + (\ln \gamma - \gamma + 1) \right) \right] = 0$

(Μονάδες 6)

Γ4.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα $y'y$ και τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$. f''

Αν ισχύουν τα ακόλουθα:

- $f(0) = 1$
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f' είναι το $[1, 3]$.
- $(f'(x))^2 > f''(x) \cdot f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Δ1. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f(x^2)$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. $\Rightarrow f' \uparrow$

(Μονάδες 2)

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και στη συνέχεια να αποδείξετε πως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

Δ4.

- i. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , από τον άξονα $x'x$ και από τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.
(Μονάδες 3)

- ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{6}{f(2)} < \ln f(2) < 2$.
(Μονάδες 3)

Δ5. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f'(x) = f(2)$ έχει λύση στο $[0, 2]$.

(Μονάδες 5)

Δ6. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot f(\eta \mu^2 x) dx > \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

Καλή τύχη στις εξετάσεις σας!

A₁: supcos

A₂: ορισμός

A₃: Η εφάνορη διαφορά των $f(x)$ σε
συχνό καρνάλ.

A₄: i) 1 ii) Σ iii) 1 iv) 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(H(x)) \stackrel{H(x)=t}{\substack{x \rightarrow 3 \\ t \rightarrow 5^-}} \lim_{t \rightarrow 5^-} H(t) = 3$$

A₅: i) 1 ii) 1 iii) Σ iv) 1.

B₁: $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \quad \eta \quad \downarrow \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Από ποια των αυτών η παρατηρητική δει-
ξε οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f(x)$
είναι 1-1.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 1}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 1}{e^{x_2} - 1}$$

$$(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 1)(e^{x_1} - 1)$$

$$\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1 = \cancel{e^{x_2} e^{x_1}} - e^{x_2} + e^{x_1} - 1$$

$$2e^{x_2} = 2e^{x_1}$$

$$x_1 = x_2$$

3/-1 από απωφελώς

$$B_2: y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \Rightarrow y(e^x - 1) = e^x + 1$$

$$y(e^x - 1) = e^x + 1 \Rightarrow ye^x - y = e^x + 1$$

$$ye^x - e^x = y + 1 \Rightarrow e^x(y - 1) = y + 1$$

$$e^x = \frac{y + 1}{y - 1} \Rightarrow x = \ln \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-1 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 1	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 1) \frac{1}{e^x - 1} = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\rightarrow x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$$

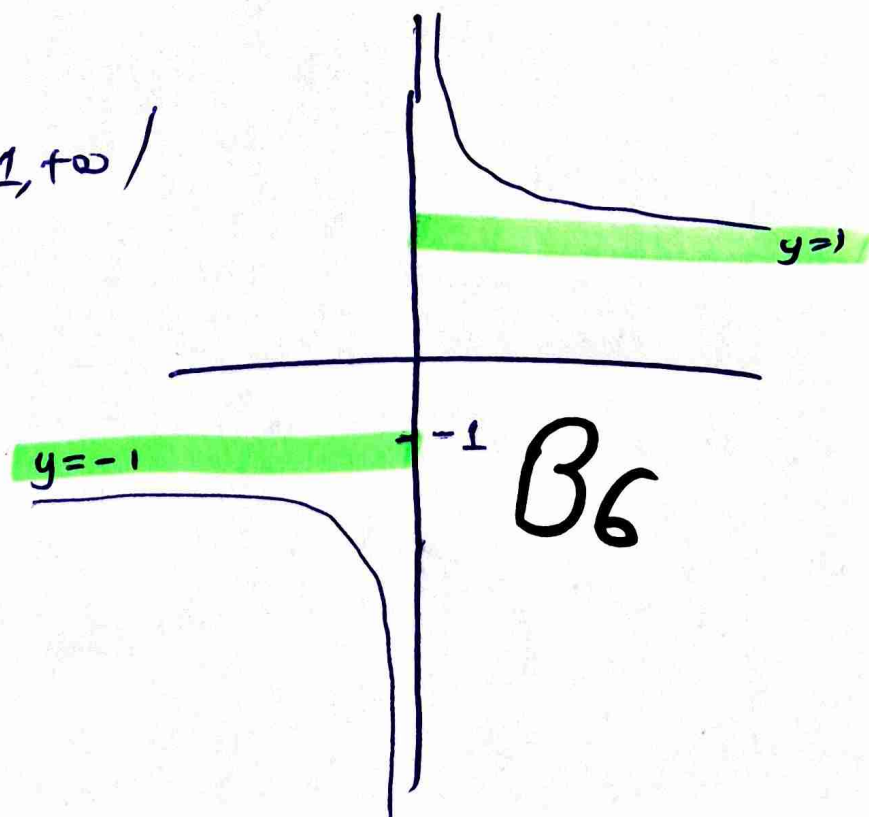
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\Sigma T_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

||

$$D_f = -1$$



$$B_3: (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f$$

$$x > 0 \quad \ln x \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$D_{f \circ g} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

B_4 : $\Sigma_1: x=0$ κατακόρυφη ασυμπτωτική

$\Sigma_2: y=-1$ οριζόντια στο $-\infty$

$\Sigma_3: y=1$ οριζόντια στο $+\infty$

B_5 : $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$f''(x) = - \frac{2e^x(e^x-1)^2 - 2e^x \cdot 2(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4}$$

$$f''(x) = - \frac{2e^x(e^x-1) - 4e^{2x}}{(e^x-1)^3} = - \frac{2e^{2x} - 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$f''(x) = - \frac{-2e^{2x} - 2e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

x	
f'	- +
f	↘ ↗

11: $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1$ $f(1) = 1, a \neq 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 1$$

Αναιτω $f'(x) \geq 0$ που σημαίνει ότι $\Delta \leq 0$
και $3a > 0$

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$6^2 - 4 \cdot 3a \leq 0$$

$$36 - 12a \leq 0$$

$$3 - a \leq 0$$

$$a \geq 3$$

Ελάχιστη τιμή του α

$$\underline{\underline{a = 3}}$$

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$12: \quad x g'(x) - g(x) = x^2 \cdot (9x^2 + 6x + 1)$$

$$\frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\left(\frac{g(x)}{x} \right)' = (3x^3 + 3x^2 + x)'$$

$$\frac{g(x)}{x} = 3x^3 + 3x^2 + x + C$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=1} \\ g(1) = 7 + C \quad \rightarrow \quad 1 = 7 + C \quad \Rightarrow C = -6 \end{aligned}$$

$$\frac{g(x)}{x} = 3x^3 + 3x^2 + x - 6$$

$$g(x) = 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 6x$$

$$\text{13: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{f(x)} - \left[(e^B - B)x + (\ln 8 - 8 + 1) \right] \right] = 0$$

ОСНОВ $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[h(x) - \left[(e^B - B)x + (\ln 8 - 8 + 1) \right] \right] = 0$$

автоматически.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + \infty}{3x^4 + \infty} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 - 6x}{3x^3 + 3x^2 + x + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x^4} + \cancel{3x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{6x} - \cancel{3x^4} - \cancel{3x^3} - \cancel{x^2} - x}{3x^3 + 3x^2 + x + 1} = 0$$

Βρίσκω ότι η ανώτερη τιμή $h(x)$ στο

το οποίο είναι $y = x$

δηλαδή $y = x$ είναι $y = (e^B - B)x + \ln x - x + 1$

$$\begin{cases} e^B - B = 1 & \Rightarrow \underline{\underline{B=0}} \\ \ln x - x + 1 = 0 & \underline{\underline{x=1}} \end{cases}$$

Γι: i) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$$f'(x) = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0 \quad f \nearrow$$

άρα η f αντιστρέφεται.

$$\text{Έστω } f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$f \nearrow$

$$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2))$$

$$x_1 < x_2$$

$$\Rightarrow f^{-1} \nearrow$$

$$11) \in : G^{-1}, y'y, x'x$$

$$\downarrow$$

$$x=0$$

$$f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

$$\in = \int_0^1 |f^{-1}(x)| dx \quad \frac{f^{-1}(x)=t}{f(f^{-1}(x))=f(t)}$$

$$x=f(t)$$

$$dx=f'(t)dt$$

$$= \int_{-1}^0 |t| f'(t) dt = - \int_{-1}^0 t (9t^2 + 6t + 1) dt$$

$$= - \int_{-1}^0 9t^3 + 6t^2 + t dt =$$

$$= - \frac{9}{4} (t^4)_{-1}^0 - 2(t^3)_{-1}^0 - \frac{1}{2} (t^2)_{-1}^0$$

$$= + \frac{9}{4} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$\Delta_1: f$ στο γόρδι παραγωγιστέμ στο $[0,2]$

$$f(0)=1$$

f σν + ασρ

$$\sum T_{f'} = [1,3] \Rightarrow \underline{1 \leq f'(x) \leq 3}$$

f' σν + ασρ

$$[f'(x)]^2 > f''(x) f(x) > 0 \quad \forall x \in [0,2] \quad f''$$

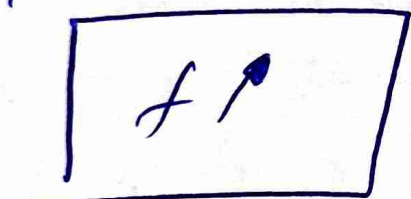
$$\text{Από } f''(x) f(x) > 0 \Rightarrow f''(x) \neq 0 \text{ και } f(x) \neq 0$$

$f(x)$ σνσν

$$\Rightarrow f(x) > 0,$$

"
 $f(x) < 0$

$$\text{Από } f'(x) \geq 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$



$$\text{Από } f(0)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) > 0.}$$

$$f(x) < f(x^2)$$

f ↑

$$x < x^2$$

$$x^2 - x > 0$$

x	0	1
$x^2 - x$	+	-

$$x \in (1,2],$$

Δ_2 : Αφού $f''(x) \cdot f(x) > 0$ τότε

$f''(x)$ και $f(x)$ ομοσημεία και αφού

$$f(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ κοίτη}}$$

$$\boxed{f' \nearrow}$$

Δ_3 : $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

οπότε $f(x) \neq 0$ και $x \in D_f$ και $x \in D_{f'}$
 που αφού $x \in [0, 2]$ $x \in [0, 2]$
 $f(x) > 0$

Αρα $D_g = [0, 2]$

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} < 0 \quad g \downarrow$$

$$\Delta u: i) \leq \int_0^2 |g(x)| dx = \int_0^2 \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| dx$$

$$= \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left(\ln f(x) \right)_0^2 =$$

$$= \ln f(2) - \ln f(0) = \ln f(2)$$

$$ii) \text{ Nдо } \frac{6}{f(2)} < \ln f(2) < 2$$

$$\boxed{\frac{6}{f(2)} < \int_0^2 g(x) dx < 2}$$

$$0 < x < 2$$

$g \downarrow$

$$g(0) > g(x) > g(2)$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} > g(x) > \frac{f'(2)}{f(2)}$$

(Взяли
наоборот)

$$1 > g(x) > \frac{3}{f(2)}$$

$$2 > \int_0^2 g(x) dx > \frac{6}{f(2)}$$

Από την γνωστή ότι

$$\frac{6}{f(2)} < \int_0^2 g(x) dx < 2$$

$$\frac{6}{f(2)} < 2$$

$$\underline{\underline{f(2) > 3}}$$

αρα η ελάχιστη

$$f'(x) = f(2)$$

αδυνα.

$$\Delta S: f'(x) = f(2)$$

$$[0, 2]$$

$$f'(1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{f(2) - 1}{2}$$

$$1 \leq f'(x) \leq 3$$

$$1 \leq f'(1) \leq 3$$

$$1 \leq \frac{f(2) - 1}{2} \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 \leq f(2) - 1 \leq 6$$

$$3 \leq f(2) \leq 7$$

$$\left. \begin{array}{l} f' \\ I_{f'} = [1, 3] \\ D_{f'} = [0, 2] \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f'(2) = 3 \end{array}$$

$$f'(x) = f(2)$$

Παραγωγική είναι συνεχής στην a και
 στην a για $f'(2) = 3$
 $f(2) \geq 3$.

$$\Delta 6: \int_0^{\frac{n}{2}} nx f(nx^2x) dx > \frac{5}{3}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = x$$

$$y = x + 1$$

т.к. f выпукл

$$f(x) \geq x + 1$$

$$f(nx^2x) \geq nx^2x + 1$$

$$nx f(nx^2x) \geq nx^3x + nx$$

$$\int_0^{n/2} nx f(nx^2x) dx \geq \int_0^{n/2} nx^3x + nx dx$$

$$\rightarrow \int_0^{n/2} nx dx = -\left(\frac{nx^2}{2}\right)_0^{n/2} = 1$$

$$\rightarrow \int_0^{n/2} n p^3 x \, dx = \int_0^{n/2} n p x \, n p^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{n/2} n p x (1 - \sigma \omega^2 x) \, dx \quad \begin{array}{l} \sigma \omega x = t \\ -n p x \, dx = dt \end{array}$$

$$= - \int_1^0 1 - t^2 \, dt = \int_1^0 t^2 - 1 \, dt$$

$$= \frac{1}{3} (t^3)_1^0 - (t)_1^0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Apr} \int_0^{n/2} n p x f(n p^2 x) \, dx > \frac{2}{3} + 1$$

$$\frac{5}{3}$$