

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ .

α)

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$ .

(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$ .

(Μονάδες 9)

β) Αν  $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 4)$ , να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ .

α)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-3$ .

(Μονάδες 7)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης  $P(x):(x-3)$

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $(x-3)(2x-1)$ .

(Μονάδες 11)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ .

α) Να δείξετε ότι το  $-2$  δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x + 2)$

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x + 2)$ .

(Μονάδες 07)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ .

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του  $P(x)$  και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίδεται το πολυώνυμο  $P(x) = (x - 2) \cdot (x^6 + 1)$ .

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου  $P(x)$ .

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίδεται το πολυώνυμο  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  που προκύπτει από την διαίρεση  $P(x) : (x - 2)$ ;

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

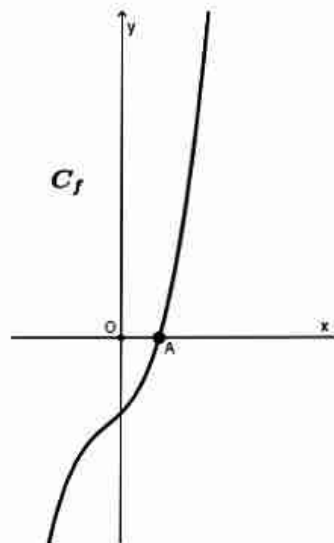
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα  $(0,1)$ .

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 9)

β) Έστω  $Q(x)$  πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $R_1(x) = P(x) + Q(x)$  δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι το  $x - 1$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν  $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$ , να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  είναι  $P(x) > 0$ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το  $-1$  δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του  $P(x)$ :  $(x^2 + x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$ .

α) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x-1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν  $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x+1) + 3$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 3$ .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

α) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν  $P(x) = (x+1)^2(x-1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 2x - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x + 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) + 6 = 0$ .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$ .

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-1$ .

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή  $P(0)$ .

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το  $x$  παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-3$  έχει πηλίκο  $x^2+2$  και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ .

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το  $x=3$  ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Είναι το πολυώνυμο  $P(x)$  3<sup>ου</sup> βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η παράσταση  $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = 1$ .

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση  $\ln(e^x - 1) = A$ .

(Μονάδες 13)

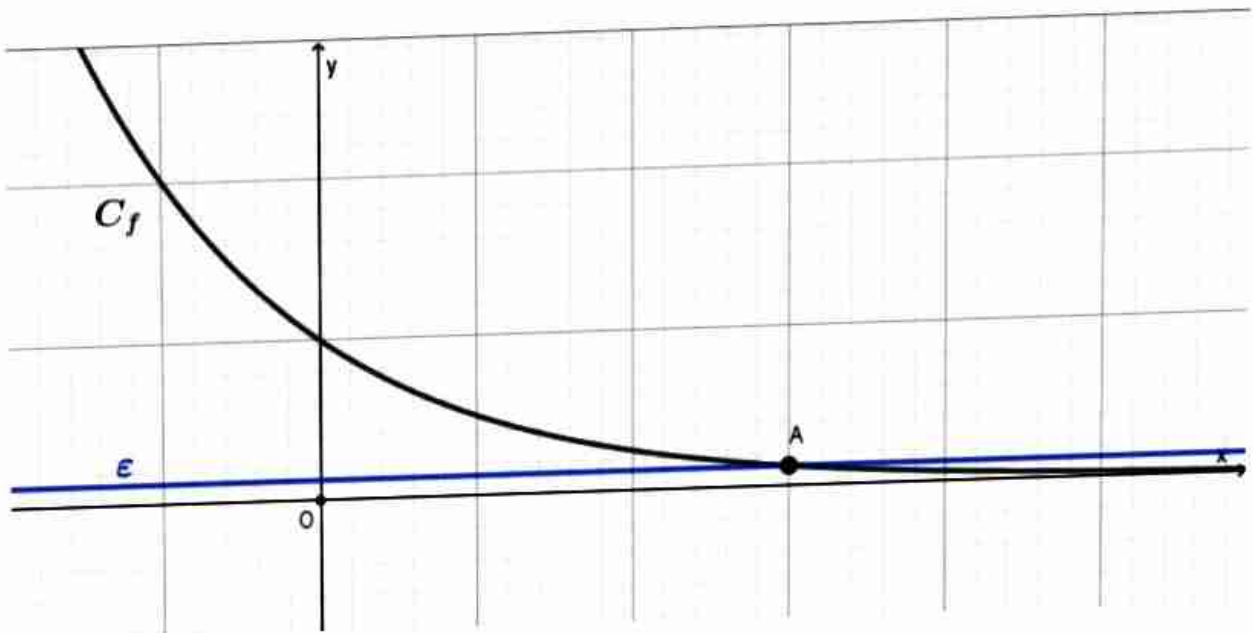
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

α) Να λύσετε την εξίσωση  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ .

(Μονάδες 12)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της  $f$  και της ευθείας  $\varepsilon: y = \frac{1}{8}$ .



β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $\varepsilon$ .

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $\varepsilon$ .

(Μονάδες 08)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(1 - x)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 12)

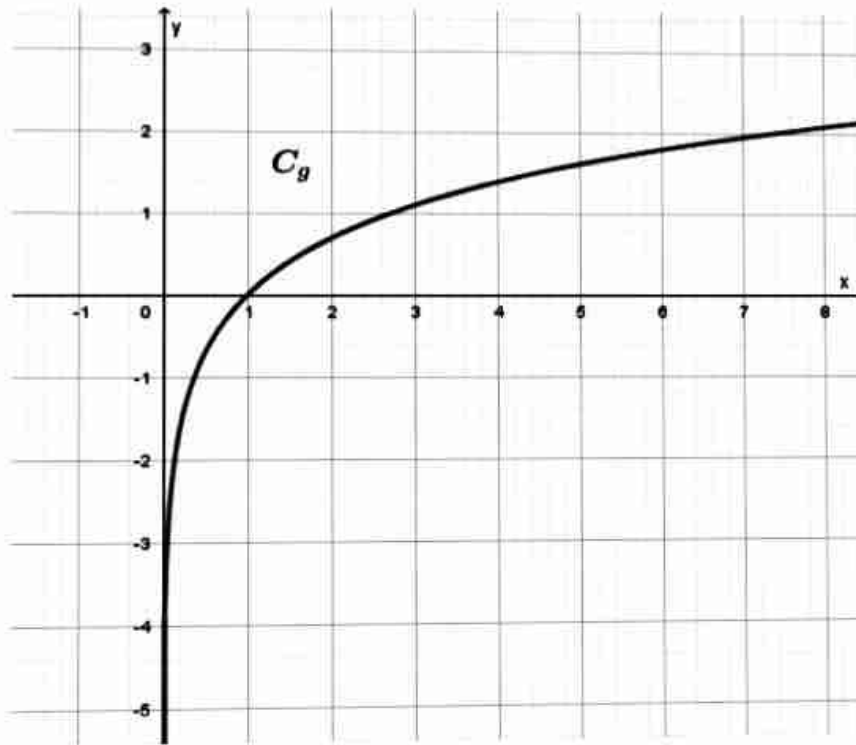
β) Να λυθεί η εξίσωση  $\ln(1 - x) = \ln(x^2 + 1)$ .

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x - 1)$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 05)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνετε η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x - 1)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 9)

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \log x$  και  $g(x) = \ln(x - 1)$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i.  $\log x = 3$ .

(Μονάδες 7)

ii.  $\ln(x - 1) = 1$ .

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \log x$  και  $g(x) = \log(x + 2)$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i.  $f(x) = 2$ .

(Μονάδες 7)

ii.  $g(x) = 2f(x)$ .

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 2**

Αν  $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$ , τότε:

α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$ .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x.$$

(Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η παράσταση  $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$ .

α) Να αποδείξετε ότι :

i.  $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii.  $A = 1$ .

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση  $\log(x^2 + 1) = A$ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση  $A = 2\log 5 + 2\log 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = 2$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  για την οποία ισχύει ότι  $e^\lambda = A$ .

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι  $\ln \lambda < 0$ .

(Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 \log 6 - \log 12 \quad \text{και} \quad B = \log 5 + \log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι  $A = \log 3$  και  $B = 1$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι  $A < B$ .

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $\log x < 1$ .

(Μονάδες 08)

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η παράσταση  $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$ . Να αποδείξετε ότι

α)  $A = 7$ .

(Μονάδες 12)

β)  $0 < \log A < 1$ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση  $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $1 - \log 2 = \log 5$ .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ορίζεται η εξίσωση:

$$\log|x+1| = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\log|x+1| = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$ .

(Μονάδες 15)