Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

... για μηχανικούς

Μανόλης Βάβαλης

14 Φεβρουαρίου 2013

Το κείμενο αυτό μορφοποιήθηκε σε LaTeX.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

0.1 Σημείωση σχετικά με τις σημειώσεις αυτές.

Οι σημειώσεις αυτές άρχισαν να γράφονται στις αρχές του 2010 παράλληλα με τις διαλέξεις μου στο εισαγωγικό μάθημα στις Διαφορικές Εξισώσεις. Δεν φιλοδοξούν ούτε να είναι πλήρεις ούτε πρωτότυπες. Ουσιαστικά αποτελούν περίληψη στοιχείων του βιβλίου των Edwards and Penney, *Differential Equations and Boundary Value Problems* [EP], και του βιβλίου των Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations* [BD], εμπλουτισμένο με δικές μου παρεμβάσεις κάποιες από τις οποίες έγιναν με βάση την αντίδραση του ακροατηρίου μου.

Πεποίθησή μου είναι ότι η ύλη των σημειώσεις αυτών μπορεί εύκολα να καλυφθεί σε ένα εξαμηνιαίο μάθημα του δεύτερου έτους οποιουδήποτε Τμήματος Πολυτεχνικής Σχολής. Το εν λόγω μάθημα οφείλει βεβαίως να συμπληρωθεί με εργαστηριακό μέρος. Για διάφορους λόγους, ελπίζω προφανείς στους περισσότερους αναγνώστες, μέχρι στιγμής δεν έχω καταφέρει με συστηματικό κάτι τέτοιο. Τουλάχιστον χρησιμοποιώ στις διαλέξεις μου εργαλεία όπως το λογισμικό $IODE$ της $MATLAB$ (δείτε για παράδειγμα την παράγραφο 1.2), το Wolfram ALPHA και διάφορες άλλες εφαρμογές διαδικτύου.

Σας παρακαλώ να επικοινωνήσετε μαζί μου για οποιαδήποτε δικά μου λάθη, και παραλήψεις ή δικές σας προτάσεις.

Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα `http://diaek.wordpress.com/` για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το μάθημα των διαφορικών εξισώσεων του Τμήματός μου στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

0.2 Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις

0.2.1 Διαφορικές Εξισώσεις

Οι νόμοι της φυσικής γενικά διατυπώνονται σαν διαφορικές εξισώσεις. Για τον λόγο αυτό όλοι οι επιστήμονες και οι μηχανικοί χρησιμοποιούν άλλοι λίγο άλλοι πολύ διαφορικές εξισώσεις. Η κατανόηση των διαφορικών εξισώσεων επομένως είναι απαραίτητη για την κατανόηση σχεδόν οτιδήποτε θα μελετήσετε στα μαθήματά σας. Μπορείτε να θεωρήσετε τα μαθηματικά σαν την γλώσσα των επιστημών και τις διαφορικές εξισώσεις σαν ένα από τα σημαντικότερα συστατικά της.

Έχετε ήδη συναντήσει πολλές διαφορικές εξισώσεις, ενδεχομένως χωρίς να το αντιληφθείτε. Έχετε μάλιστα ήδη λύσει μερικές από αυτές στα μαθήματα του Λογισμού που έχετε παρακολουθήσει. Ας επικεντρωθούμε όμως τώρα σε μια διαφορική εξίσωση που μάλλον δεν την έχετε δει ξανά.

$$\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t, \tag{1}$$

όπου x είναι η *εξαρτημένη μεταβλητή* και t η *ανεξάρτητη μεταβλητή*. Η εξίσωση (1) είναι μια κλασσική *διαφορική εξίσωση*. Στην πραγματικότητα είναι ένα παράδειγμα μιας *διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης*, μια και εμπλέκει την πρώτη μόνον παράγωγο της εξαρτημένης μεταβλητής. Η παραπάνω εξίσωση πηγάζει από τον νόμο του Νεύτωνα για την ψύξη ενός σώματος όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου ταλαντώνεται στον χρόνο.

0.2.2 Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Επιλύω την παραπάνω διαφορική εξίσωση σημαίνει βρίσκω το x το οποίο εξαρτάται από το t. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε μια συνάρτηση του t την οποία καλούμε x τέτοια ώστε εάν αντικαταστήσουμε τα x, t, και $\frac{dx}{dt}$ στην εξίσωση (1) αυτή να ισχύει. Η ιδέα είναι ακριβώς ίδια με αυτή που συναντάμε στις αλγεβρικές εξισώσεις, δηλαδή σε εξισώσεις που εμπλέκονται μόνο το x και το t και όχι οι παράγωγοι. Στην προκείμενη περίπτωση το

$$x = x(t) = \cos t + \sin t$$

είναι *λύση*. Πώς μπορούμε να επιβεβαιώσουμε κάτι τέτοιο; Απλά αντικαθιστώντας το στην εξίσωση! Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την $\frac{dx}{dt}$. Βρίσκουμε ότι $\frac{dx}{dt} = -\sin t + \cos t$. Ας υπολογίσουμε τώρα το δεξιό μέλος της εξίσωσης (1)

$$\frac{dx}{dt} + x = (-\sin t + \cos t) + (\cos t + \sin t) = 2\cos t.$$

Πράγματι! Αυτό είναι ίσο με το δεξιό της μέλος. Δεν τελειώσαμε όμως! Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η $x = \cos t + \sin t + e^{-t}$ είναι επίσης λύση. Ας δοκιμάσουμε,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t + \cos t - e^{-t}.$$

Όπως και πριν ας την αντικαταστήσουμε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1)

$$\frac{dx}{dt} + x = (-\sin t + \cos t - e^{-t}) + (\cos t + \sin t + e^{-t}) = 2\cos t.$$

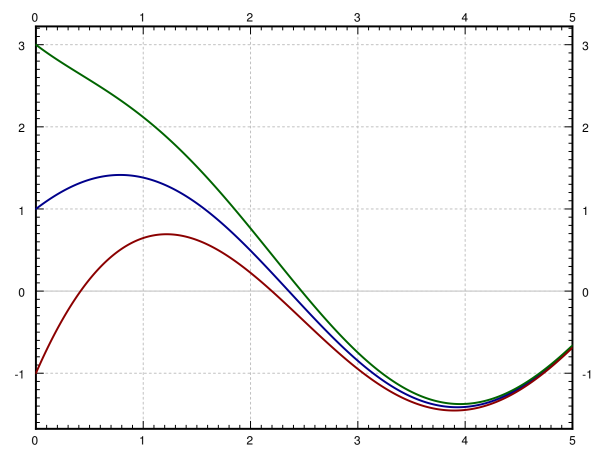
Και πράγματι είμαστε βέβαιοι ότι αποτελεί λύση!

Συνεπώς μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις. Μάλιστα, για την συγκεκριμένη εξίσωση όλες οι λύσεις που υπάρχουν μπορούν να συμπτυχθούν και να γραφούν με την εξής μορφή

$$x = \cos t + \sin t + Ce^{-t}$$

όπου C είναι μια κάποια σταθερά. Στο σχήμα 1 μπορούμε να βρούμε τις γραφικές παραστάσεις για μερικές από αυτές τις λύσεις. Θα μάθουμε πως μπορούμε να βρούμε με συστηματικό τρόπο όλες αυτές τις λύσεις σε λίγες μέρες.

Μην νομίσετε ότι η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι εύκολη υπόθεση. Τουναντίον, όπως θα δούμε σύντομα, συνήθως είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι ικανές να λύσουν οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση μας ενδιαφέρει. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι θα περιοριστούμε στην εύρεση αναλυτικών εκφράσεων για τις λύσεις και δεν ενδιαφερόμαστε για αριθμητικές προσεγγίσεις των λύσεων τις οποίες ενδεχομένως να μπορούμε να εκτιμήσουμε υπολογιστικά. Τέτοιες προσεγγίσεις θα μας απασχολήσουν σε μαθήματα επιστημονικών υπολογισμών και αριθμητικής ανάλυσης.



Σχήμα 1: Γραφικές παραστάσεις μερικών από τις λύσεις της εξίσωσης $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{2} = \cos t$.

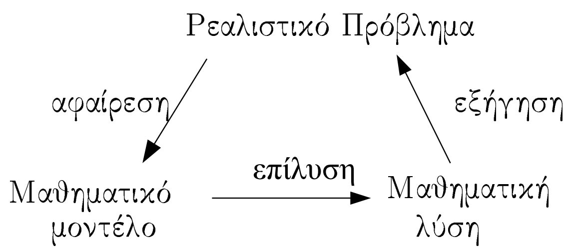
Ένα μεγάλο μέρος του μαθήματος μας θα αφιερωθεί στις λεγόμενες *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ordinary differential equations στα αγγλικά)* ή συνοπτικά ΣΔΕ ($ODEs$ στα αγγλικά), όπου με τον όρο αυτό δηλώνουμε ότι έχουμε μία μόνον ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ όλες οι εμπλεκόμενες παράγωγοι αφορούν την εν λόγω μεταβλητή. Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μια ελεύθερες μεταβλητές, οδηγούμαστε στις συνήθως λεγόμενες *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (partial differential equations στα αγγλικά)** ή συνοπτικά ΜΔΕ ($PDEs$ στα αγγλικά) με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο δεύτερο μέρος του μαθήματος.

Ακόμα και για τις ΣΔΕ, οι οποίες όσον αφορά την βασική τους έννοια, είναι εύκολα κατανοητές σε βάθος, δεν είναι απλή υπόθεση η εύρεση λύσεων σε όλα τα προβλήματα στα οποία εμπλέκονται. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πότε μπορούμε να λύσουμε εύκολα κάποιο τέτοιο πρόβλημα και πως στην πράξη μπορούμε να το κάνουμε αυτό. Ακόμα και στην περίπτωση που μπορούμε να βρούμε την λύση μας με χρήση υπολογιστικών συστημάτων, κάτι που πράγματι συμβαίνει στην πράξη, είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τι παριστά αυτή και πως ακριβώς και

*Πιο κατάλληλος όρος κατά την γνώμη μου είναι Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, ο οποίος δυστυχώς δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένος κάτω από ποιες συνθήκες προέκυψε. Επιπρόσθετα, είναι πολύ συχνά απαραίτητο να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις μας ή να τις μετατρέψουμε σε κάποια άλλη μορφή την οποία κατανοεί το λογισμικό σύστημα που θα χρησιμοποιήσουμε για να τις λύσουμε. Ενδεχομένως να χρειάζεται να κάνουμε κάποιες σημαντικές υποθέσεις στο μαθηματικό μας μοντέλο για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε κάποιες από τις απαραίτητες αυτές μετατροπές.

Για να γίνετε ένας πετυχημένος μηχανικός ή επιστήμονας, θα αναγκαστείτε συχνά να λύσετε προβλήματα που ποτέ πριν δεν έχετε αντιμετωπίσει στο παρελθόν. Είναι συνεπώς σημαντικό να μάθετε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων τις οποίες θα μπορέσετε να εφαρμόσετε για την επίλυση των εν λόγω προβλημάτων. Είναι συνηθισμένο λάθος εν γένει να περιμένετε ότι θα μάθετε συνταγές και έτοιμους προς άμεση χρήση μηχανισμούς για να λύσετε όλα τα σχετικά προβλήματα που θα συναντήσετε στην καριέρα σας. Κάτι τέτοιο σίγουρα δεν πρόκειται να γίνει στο μάθημα αυτό.

0.2.3 Διαφορικές εξισώσεις στην πράξη



Ας δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορικές εξισώσεις στις επιστήμες και την μηχανική. Έστω ότι έχετε κάποια *ρεαλιστικά προβλήματα* τα οποία θέλετε να κατανοήσετε. Για το καταφέρετε αυτό πρέπει να κάνετε κάποιες υποθέσεις που θα απλοποιήσουν τα πράγματα και θα σας επιτρέψουν να δημιουργήσετε ένα *μαθηματικό μοντέλο*. Με άλλα λόγια, πρέπει να μεταφράσετε το ρεαλιστικό σας πρόβλημα (την πραγματικότητα εάν προτιμάτε) σε ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων. Αφού το καταφέρετε αυτό μπορείτε να εφαρμόσετε μαθηματικά εργαλεία για να δημιουργήσετε κάποιας μορφής *μαθηματική λύση*. Όμως ακόμα δεν τελειώσατε. Πρέπει να κατανοήσετε αυτό που βρήκατε. Πρέπει δηλαδή να διαπιστώσετε τι μπορεί η μαθηματική λύση που βρήκατε να σας πει σχετικά το αρχικό ρεαλιστικό σας πρόβλημα.

Πολλά από τα μαθήματα των σπουδών σας θα σας εξοπλίσουν με κατάλληλες γνώσεις που θα σας επιτρέψουν να διατυπώνετε μαθηματικά μοντέλα των ρεαλιστικών σας προβλημάτων και να κατανοήσετε τα αποτελέσματά σας. Στο μάθημα αυτό όμως θα επικεντρωθούμε στην μαθηματική ανάλυση της όλης διαδικασίας. Αρκετές φορές βέβαια θα ασχοληθούμε με μερικά ρεαλιστικά προβλήματα για να αποκτήσουμε κάποια βαθύτερη κατανόηση και καλλίτερη διαίσθηση αλλά και για να αποκτήσουμε κάποιο κίνητρο για αυτά που θα κάνουμε παρακάτω αλλά και για τον τρόπο που θα τα κάνουμε.

Ας δούμε ένα παράδειγμα της παραπάνω διαδικασίας. Μια από τις ποιο βασικές διαφορικές εξισώσεις είναι το πρότυπο *μοντέλο εκθετικής αύξησης* (*exponential growth model*). Έστω ότι με P παριστάνουμε τον πληθυσμό κάποιων βακτηριδίων σε ένα δοχείο. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει αρκετή τροφή και χώρος τότε είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των βακτηριδίων θα είναι ανάλογος του ίδιου του πληθυσμού. Δηλαδή, μεγάλοι πληθυσμοί αυξάνονται ταχύτερα. Εάν με t συμβολίζουμε τον χρόνο (ας πούμε σε δευτερόλεπτα) τότε καταλήγουμε στο εξής μαθηματικό μοντέλο

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

όπου $k > 0$ είναι κάποια θετική σταθερά.
Παράδειγμα 0.2.1: Έστω ότι υπάρχουν 100 βακτήρια την χρονική στιγμή 0 και 200 βακτήρια μετά από 10 δευτερόλεπτα. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν 1 λεπτό μετά την αρχική στιγμή 0; (δηλαδή σε 60 δευτερόλεπτα). Πρώτα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση. Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η λύση δίνεται από την σχέση

$$P(t) = Ce^{kt},$$

όπου C είναι κάποια σταθερά. Ας το επιβεβαιώσουμε,

$$\frac{dP}{dt} = Cke^{kt} = kP.$$

Πράγματι είναι λύση.

Τι καταφέραμε όμως; Δεν γνωρίσουμε το C όπως δεν γνωρίζουμε ούτε το k. Ξέρουμε όμως αρκετά άλλα πράγματα. Ξέρουμε ότι $P(0) = 100$ όπως ξέρουμε και ότι $P(10) = 200$. Ας αντικαταστήσουμε αυτά που ξέρουμε και ας δούμε που θα καταλήξουμε.

$$\begin{aligned} 100 &= P(0) = Ce^{k0} = C, \\ 200 &= P(10) = 100\, e^{k10}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $2 = e^{10k}$ ή $\frac{\ln 2}{10} = k \approx 0.069$. Άρα γνωρίζουμε ότι

$$P(t) = 100\, e^{(\ln 2)t/10} \approx 100\, e^{0.069t}.$$

Δηλαδή ξέρουμε ότι μετά από 1 λεπτό, $t = 60$, ο πληθυσμός θα είναι $P(60) = 6400$. Ας δούμε και το Σχήμα 2 στην επόμενη σελίδα.

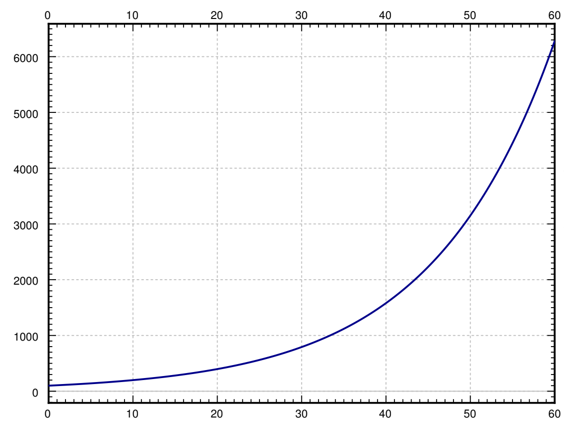
Εντάξει μέχρι εδώ, αλλά ας προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τα αποτελέσματά μας. Σημαίνει πράγματι ότι μετά από 60ς θα έχουμε ακριβώς 6400 βακτήρια στο δοχείο; Προφανώς όχι! Μην ξεχνάτε ότι κάναμε παραδοχές που μπορεί να μην είναι σωστές. Εάν όμως οι παραδοχές μας αυτές είναι λογικές, τότε πράγματι θα υπάρχουν περίπου 6400 βακτήρια. Σημειώστε επίσης ότι στην πραγματικότητα το P είναι ένας ακέραιος αριθμός, και όχι κάποιος πραγματικός αριθμός. Για παράδειγμα το μοντέλο μας μπορεί να μας διαβεβαιώσει ότι μετά από 61ς, $P(61) \approx 6859.35$.

Συνήθως στην πράξη, το k στην $P' = kP$ είναι γνωστό, και προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση για διαφορετικές *αρχικές συνθήκες*. Τι εννοούμε με αυτό; Ας απλοποιήσουμε την κατάσταση θέτοντας $k = 1$. Ας θεωρήσουμε δηλαδή την εξίσωση $\frac{dP}{dt} = P$ κάτω από την προϋπόθεση ότι $P(0) = 1000$ (η αρχική συνθήκη). Τότε εύκολα μπορούμε να βρούμε την εξής λύση

$$P(t) = 1000\, e^t.$$

Θα ονομάσουμε την $P(t) = Ce^t$ *γενική λύση*, μια και η οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφθεί στην μορφή αυτή για κάποια κατάλληλη τιμή της σταθεράς C. Χρειαζόμαστε μια αρχική συνθήκη για να προσδιορίσουμε την συγκεκριμένη τιμή της C η οποία καθορίζει την *συγκεκριμένη λύση* που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη. Συχνά με τον όρο συγκεκριμένη λύση θα εννοούμε απλά κάποια λύση ενώ με τον όρο γενική λύση θα εννοούμε μια οικογένεια λύσεων.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε αυτές που θα ονομάσουμε οι 4 θεμελιώδεις εξισώσεις οι οποίες εμφανίζονται τόσο συχνά που καλό θα είναι να απομνημονεύσουμε τις λύσεις τους. Μπορούμε σχετικά εύκολα να μαντέψουμε αυτές τις λύσεις ενθυμούμενοι ιδιότητες των εκθετικών, των ημιτονοειδών και των συνημιτονοειδών συναρτήσεων. Εύκολα επίσης μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το ότι είναι πράγματι λύσεις. Τέτοιες επιβεβαιώσεις αποτελούν πάντα μια καλή γενική πρακτική που μπορεί να μας προστατεύσει αποτελεσματικά από διάφορα προβλήματα (π.χ. να μην θυμόμαστε σωστά την λύση).



Σχήμα 2: Αύξηση του πληθυσμού των βακτηριδίων τα πρώτα 60 δευτερόλεπτα.

Πρέπει να μπορείτε να λύσετε με ευκολία τις εξισώσεις αυτές. Η πιθανότητα να δείτε μια η δύο από αυτές σε ΌΛΑ τα διαγωνίσματα του μαθήματος είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Ίσως να μην είναι καθόλου άσχημη ιδέα να απομνημονεύσετε τις λύσεις τους. Προσωπικά εγώ τις θυμάμαι συνήθως. Δεν είμαι όμως ποτέ σίγουρος για την μνήμη μου με αποτέλεσμα να ελέγχω το τι θυμάμαι επιβεβαιώνοντας το εάν η συνάρτηση που θυμάμαι είναι πράγματι λύση. Φυσικά, δεν είναι και τόσο δύσκολο να μαντέψει κάποιος τις λύσεις αυτές. Σε κάθε περίπτωση μην μου πείτε ότι δεν σας προειδοποίησα.

Η πρώτη θεμελιώδης εξίσωση είναι η εξής,

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

όπου $k > 0$ κάποια σταθερά. Εδώ y είναι η εξαρτημένη και x η ανεξάρτητη μεταβλητή. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτή είναι

$$y(x) = Ce^{kx}.$$

Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι αυτή είναι η λύση προηγουμένως αν και τότε είχαμε χρησιμοποιήσει άλλα ονόματα για τις μεταβλητές μας.

Παρόμοια, η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -ky,$$

όπου $k > 0$ κάποια σταθερά, έχει την εξής γενική λύση

$$y(x) = Ce^{-kx}$$

0.2.1 *Επιβεβαιώστε το γεγονός ότι η δοθείσα y είναι πραγματικά η λύση της εξίσωσης.*

Τώρα θεωρήστε την εξής *διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y,$$

για κάποια σταθερά $k > 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx).$$

Σημειώστε ότι επειδή έχουμε διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχουμε δύο σταθερές στην γενική της λύση.

0.2.2 *Επιβεβαιώστε το γεγονός ότι η δοθείσα y είναι πραγματικά η λύση της εξίσωσης.*

Τέλος, ας δούμε την εξής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y,$$

για κάποια σταθερά $k > 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$y(x) = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx},$$

ή ισοδύναμα

$$y(x) = D_1\cosh(kx) + D_2\sinh(kx).$$

Για όσους δεν θυμούνται, οι cosh και sinh ορίζονται ως εξής

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Μερικές φορές προτιμάμε να χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις αυτές παρά αυτές που περιέχουν εκθετικά κυρίως λόγω κάποιων πολύ ελκυστικών ιδιοτήτων τους όπως οι $\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$, και $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ (όχι, δεν υπάρχει κάποιο λάθος εδώ) και $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$.

0.2.3 *Ελέγξτε ότι οι μορφές της y που δώσαμε παραπάνω είναι πράγματι λύσεις της εξίσωσης.*

0.2.4 Ασκήσεις

0.2.4 *Δείξτε ότι η* $x = e^{4t}$ *είναι λύση της* $x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 0$.

0.2.5 *Δείξτε ότι η* $x = e^{t}$ *δεν είναι λύση της* $x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 0$.

0.2.6 *Είναι η* $y = \sin t$ *λύση της* $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - y^2$; *Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

0.2.7 *Είναι η συνάρτηση* $y = e^{rx}$ *λύση της εξίσωσης* $y'' + 2y' - 8y = 0$ *για κάποια τιμή της παραμέτρου* r; *Εάν ναι, δώστε όλες τις δυνατές τιμές της* r.

0.2.8 *Επιβεβαιώστε ότι η* $x = Ce^{-2t}$ *είναι λύση της* $x' = -2x$. *Βρείτε* C *που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη* $x(0) = 100$.

0.2.9 *Επιβεβαιώστε ότι η* $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$ *είναι λύση της* $x'' - x' - 2x = 0$. *Βρείτε* C_1 *και* C_2 *που να αντιστοιχούν στην αρχική συνθήκη* $x(0) = 10$.

0.2.10 *Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραγώγων γνωστών συναρτήσεων προσπαθήστε να βρείτε μια λύση της* $(x')^2 + x^2 = 4$.

Κεφάλαιο 1

ΣΔΕ πρώτης τάξης

1.1 Λύσεις σε μορφή ολοκληρωμάτων

ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

η της μορφής

$$y' = f(x, y).$$

Γενικά, δεν υπάρχει απλός γενικός τύπος ή διαδικασία που θα μπορούσε κάποιος να ακολουθήσει για να βρει τις λύσεις μιας ΣΔΕ όπως η παραπάνω. Στις επόμενες διαλέξεις θα εξετάσουμε συγκεκριμένες περιπτώσεις για τις οποίες δεν είναι δύσκολο να βρούμε τις λύσεις.

Στην παράγραφο αυτή ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση μόνον μιας μεταβλητής, της x, δηλαδή έχει την εξής μορφή

$$y' = f(x). \tag{1.1}$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς x και τα δύο μέρη της εξίσωσης.

$$\int y'(x)\ dx = \int f(x)\ dx + C,$$

δηλαδή

$$y(x) = \int f(x)\ dx + C.$$

Αυτή η συνάρτηση $y(x)$ είναι ουσιαστικά η γενική λύση. Δηλαδή για να λύσουμε την (1.1) βρήκαμε κάποια αντι-παράγωγο της $f(x)$ και κατόπιν κατασκευάσαμε την γενική λύση προσθέτοντας μια τυχαία σταθερά.

Εδώ είναι κατάλληλη στιγμή να συζητήσουμε ένα θέμα σχετικό με στο συμβολισμό και την ορολογία του μαθηματικού λογισμού. Πολλά βιβλία του Μαθηματικού Λογισμού δημιουργούν σύγχυση όταν με τον όρο ολοκλήρωμα εννοούν πρωταρχικά το αποκαλούμενο ορισμένο ολοκλήρωμα. Το αόριστο ολοκλήρωμα όμως είναι στην ουσία η *αντιπαράγωγος* (στην πραγματικότητα μια μονο-παραμετρική οικογένεια αντιπαραγώγων). Στην πραγματικότητα υπάρχει μόνον ένα ολοκλήρωμα και αυτό είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα. Ο μόνος λόγος που χρειάζεται κάποιος να χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό του αόριστου ολοκληρώματος είναι επειδή μπορούμε πάντα να γράφουμε την αντιπαράγωγο σαν ένα (ορισμένο) ολοκλήρωμα. Πράγματι με βάση το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού μπορούμε να γράψουμε το $\int f(x)\ dx + C$ ως εξής

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt + C.$$

Η ολοκλήρωση είναι απλά ένας τρόπος να υπολογίσει κάποιος την αντιπαράγωγο (ένας τρόπος που είναι πάντοτε αποτελεσματικός, δείτε το παρακάτω παράδειγμα). Η ολοκλήρωση ορίζεται βέβαια σαν το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, απλά τυχαίνει να μας οδηγεί και στην αντιπαράγωγο. Για λόγους συμβατότητας με διάφορα βιβλία αλλά και άλλα μαθήματα, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό του αορίστου ολοκληρώματος για να αναφερθούμε σε αντιπαραγώγους, *πάντα* όμως θα πρέπει να σκεφτόμαστε το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1.1.1: Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $y' = 3x^2$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι η γενική λύση πρέπει να είναι της μορφής $y = x^3 + C$. Ας το επιβεβαιώσουμε: $y' = 3x^2$. Οδηγηθήκαμε *ακριβώς* πίσω στην εξίσωσή μας.

Συνήθως μια εξίσωση όπως η παραπάνω, συνοδεύεται από μια αρχική συνθήκη σαν την $y(x_0) = y_0$ για κάποιους αριθμούς x_0 και y_0 (το x_0 είναι συνήθως 0, αλλά όχι πάντα). Μπορούμε να γράψουμε την λύση σε μια πολύ όμορφη μορφή σαν ορισμένο ολοκλήρωμα.

Έστω ότι το πρόβλημά μας είναι $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$. Τότε η λύση είναι

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\ ds + y_0. \tag{1.2}$$

Ας το επιβεβαιώσουμε! Η $y' = f(x)$ (σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού για παράδειγμα), είναι σίγουρα μια λύση. Είναι όμως αυτή που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη; Πράγματι είναι επειδή $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\ dx + y_0 = y_0$.

Παρακαλώ σημειώστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα (αντι-παράγωγος) είναι τελείως διαφορετική μαθηματική οντότητα από το αόριστο ολοκλήρωμα. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ουσιαστικά ένας αριθμός. Συνεπώς η (1.2) είναι ένας τύπος τον οποίο μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ενδεχομένως μέσω ενός υπολογιστή για να πάρει συγκεκριμένους αριθμούς. Μπορεί συνεπώς κάποιος να κάνει την γραφική παράσταση της λύσης και να την χρησιμοποιήσει σαν να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση. Δεν είναι δηλαδή απαραίτητο να βρει κάποιος την αναλυτική μορφή της αντιπαραγώγου.

Παράδειγμα 1.1.2: Λύστε την

$$y' = e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1.$$

Με βάση την προηγηθείσα συζήτηση, η λύση πρέπει να είναι η εξής

$$y(x) = \int_0^x e^{-s^2}\, ds + 1.$$

Δεν έχει κανένα νόημα να προσπαθήσετε να βρείτε την λύση αυτή σε αναλυτική (μερικοί την λένε και κλειστή) μορφή. Από την μια μεριά δεν μπορείτε από την άλλη δεν χρειάζεται μια και το εν λόγω ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να δώσει πολλές πληροφορίες. Το ολοκλήρωμα αυτό παρεμπιπτόντως είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Στατιστική και όχι μόνο.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή μπορούμε να λύσουμε και εξισώσεις της μορφής

$$y' = f(y).$$

Ας γράψουμε την εξίσωση σε μια άλλη μορφή χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό *Leibniz*

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης του λογισμού για να αντιστρέψουμε τους ρόλους των μεταβλητών x και y καταλήγοντας στην εξίσωση

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}.$$

Η παραπάνω προσπάθειά μας δίνει την εντύπωση ότι κάνουμε απλές αλγεβρικές πράξεις με τα dx και dy. Είναι σίγουρα ελκυστικό να κάνει κανείς αλγεβρικές πράξεις με τα dx και dy θεωρώντας τα απλούς αριθμούς. Στην παραπάνω περίπτωση όλα δούλεψαν μια χαρά. Προσοχή όμως, τέτοιες πρακτικές απλοποιημένων πράξεων μπορεί να μας δημιουργήσουν σοβαρούς μπελάδες, ιδιαίτερα όταν εμπλέκονται περισσότερες από μια ανεξάρτητες μεταβλητές. Στο σημείο αυτό μπορούμε απλά να ολοκληρώσουμε

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C.$$

Τελικά, μπορούμε να προσπαθήσουμε να λύσουμε ως προς y.

Παράδειγμα 1.1.3: Μαντέψαμε ότι η $y' = ky$ έχει την εξής λύση Ce^{kx}. Ας επικυρώσουμε την μαντεψιά μας αυτή υπολογίζοντας την λύση αυτή εξ΄ αρχής. Σημειώστε πρώτα ότι η $y = 0$ είναι προφανώς μια λύση. Ας υποθέσουμε όμως ότι $y \neq 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{ky}.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$x(y) = x = \frac{1}{k}\ln|y| + C'.$$

Τώρα ας λύσουμε ως προς y

$$e^{kC'}e^{kx} = |y|.$$

Εάν αντικαταστήσουμε τον όρο $e^{kC'}$ με κάποια τυχαία σταθερά C μπορούμε να απαλλαχτούμε από την απόλυτη τιμή. Έτσι έχουμε ενσωματώσει και την λύση $y = 0$, καταλήγοντας ουσιαστικά στην ίδια γενική λύση που αρχικά μαντέψαμε, $y = Ce^{kx}$.

Παράδειγμα 1.1.4: Βρείτε την γενική λύση της $y' = y^2$.

Ξέρουμε ότι η $y = 0$ είναι μια λύση. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι $y \neq 0$ και ας γράψουμε

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$x = \frac{-1}{y} + C.$$

Λύνουμε ως προς $y = \frac{1}{C-x}$ και καταλήγουμε στην εξής γενική λύση

$$y = \frac{1}{C-x} \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$$

Παρατηρήστε τις ιδιαιτερότητες της λύσης. Αν για παράδειγμα θέσουμε $C = 1$, τότε όσο πλησιάζουμε το $x = 1$ παρατηρούμε μιας συνεχώς και με γοργούς ρυθμούς, αυξανόμενη τιμή της λύσης καταλήγοντας αργά η γρήγορα σε ‘εκρηξη’. Είναι εν γένει δύσκολο απλά παρατηρώντας την ίδια την εξίσωση να καταλάβουμε το πως συμπεριφέρεται η λύση της. Η εξίσωση $y' = y^2$ φαίνεται μια χαρά και είναι ορισμένη παντού, η λύση της όμως είναι ορισμένη μόνον σε κάποιο διάστημα της μορφής $(-\infty, C)$ ή της μορφής (C, ∞).

Κλασσικά προβλήματα που μας οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις τις οποίες μπορούμε να επιλύσουμε με απλή ολοκλήρωση είναι προβλήματα που αφορούν ταχύτητα, επιτάχυνση και απόσταση. Τέτοια προβλήματα σίγουρα έχετε ήδη συναντήσει στα μαθήματα του Λογισμού.

Παράδειγμα 1.1.5: Θεωρήστε ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $e^{t/2}$ μέτρα το δευτερόλεπτο, όπου με t παριστάνουμε το χρόνο σε δευτερόλεπτα. Πόσο μακριά θα έχει φθάσει σε 2 δευτερόλεπτα και πόσο σε 10 δευτερόλεπτα;

Έστω x η απόσταση που διανύει το όχημα. Ισχύει η εξίσωση

$$x' = e^{t/2}.$$

Μπορούμε απλά να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης και να καταλήξουμε στην εξής εξίσωση

$$x(t) = 2e^{t/2} + C.$$

Σημειώστε ότι ακόμα δεν έχουμε υπολογίσει το C. Γνωρίζουμε όμως ότι όταν το $t = 0$ τότε $x = 0$, δηλαδή: $x(0) = 0$ οπότε

$$0 = x(0) = 2e^{0/2} + C = 2 + C.$$

Άρα $C = -2$ και συνεπώς

$$x(t) = e^{t/2} - 2.$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση για να υπολογίσουμε την απόσταση που θα διανύσει το όχημα μετά από 2 και 10 δευτερόλεπτα

$$x(2) = 2e^{2/2} - 2 \approx 3.44 \text{ μέτρα}, \qquad x(10) = 2e^{10/2} - 2 \approx 294 \text{ μέτρα}.$$

Παράδειγμα 1.1.6: Υποθέστε ότι το όχημα επιταχύνει με ρυθμό t^2 ${}^{\mathrm{m}}/{}_{\mathrm{s}^2}$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το όχημα βρίσκεται σε απόσταση 1 μέτρου από την αρχική του θέση και κινείται με ταχύτητα 10 ${}^{\mu}/{}_{\delta}$. Πού θα βρίσκεται το όχημα την χρονική στιγμή $t = 10$;

Αυτό είναι ένα πρόβλημα δεύτερης τάξης. Εάν παραστήσουμε με x την απόσταση που διανύει το όχημα, τότε x' είναι η ταχύτητά του και x'' η επιτάχυνσή του. Το πρόβλημα (η εξίσωση και οι αρχικές συνθήκες) είναι τότε το εξής

$$x'' = t^2, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 10.$$

Φυσικά, εάν θέσουμε $x' = v$ εύκολα καταλήγουμε στο εξής πρόβλημα πρώτης τάξης

$$v' = t^2, \qquad v(0) = 10,$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε ως προς v, και κατόπιν να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το x.

1.1.1 *Λύστε ως προς v και κατόπιν λύστε ως προς x.*

1.1.1 Ασκήσεις

1.1.2 *Λύστε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = x^2 + x$ για $y(1) = 3$.*

1.1.3 *Λύστε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$ για $y(0) = 2$.*

1.1.4 *Λύστε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-1}$ για $y(0) = 0$.*

1.1.5 *Λύστε την εξίσωση $y' = y^3$ για $y(0) = 1$.*

1.1.6 *Λύστε την εξίσωση $y' = (y-1)(y+1)$ για $y(0) = 3$.*

1.1.7 *Λύστε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2+1}$ για $y(0) = 0$.*

1.1.8 *Λύστε την εξίσωση $y'' = \sin x$ για $y(0) = 0$.*

1.2 Πεδία κατευθύνσεων

Στο σημείο αυτό δεν είναι άσχημη ιδέα να εγκαταστήσετε στην *MATLAB* σας το λογισμικό σύστημα *IODE* το οποίο μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα `http://www.math.uiuc.edu/iode/` .

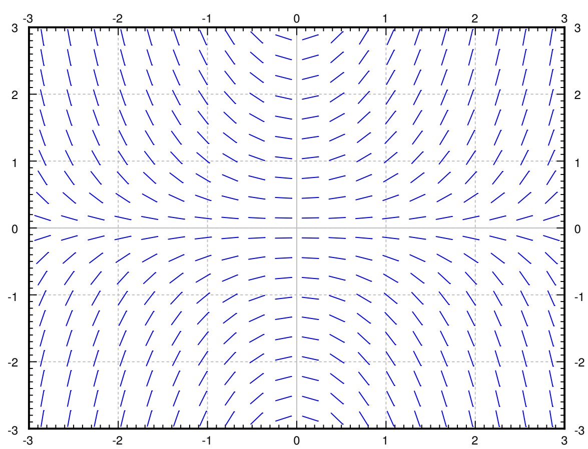
Όπως είδαμε, οι εξισώσεις πρώτης τάξης με τις οποίες θα ασχοληθούμε έχουν την εξής γενική μορφή

$$y' = f(x, y).$$

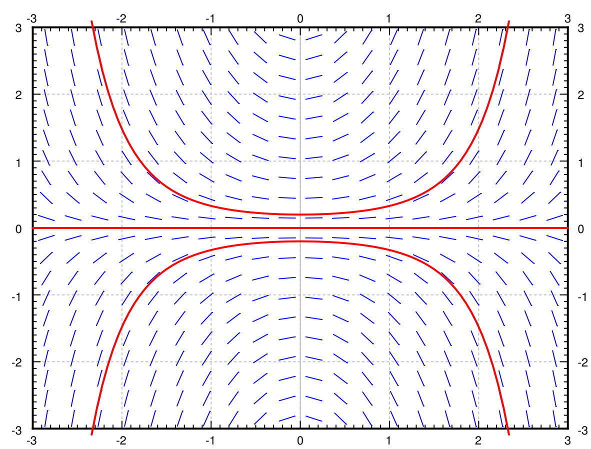
Εν γένει, δεν είναι δυνατόν να λύσουμε όλες τις εξισώσεις αυτού του τύπου αναλυτικά. Θα επιθυμούσαμε να γνωρίζαμε τουλάχιστον κάποια στοιχεία των λύσεών τους, όπως η γενική μορφή τους και η εν γένει συμπεριφορά τους, ή έστω να μπορούσαμε να υπολογίσουμε προσεγγίσεις των λύσεων των εξισώσεων αυτών.

1.2.1 Πεδία κατευθύνσεων

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση $y' = f(x, y)$ ουσιαστικά μας δίνει την τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του επιπέδου (x, y). Μπορούμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της εν λόγω κλίσης χρησιμοποιώντας ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα σε διάφορα σημεία, αρκετά ώστε να σχηματίσουμε μια καθαρή εικόνα του τι ακριβώς παριστά όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Πεδίο κατευθύνσεων της εξίσωσης $y' = xy$.

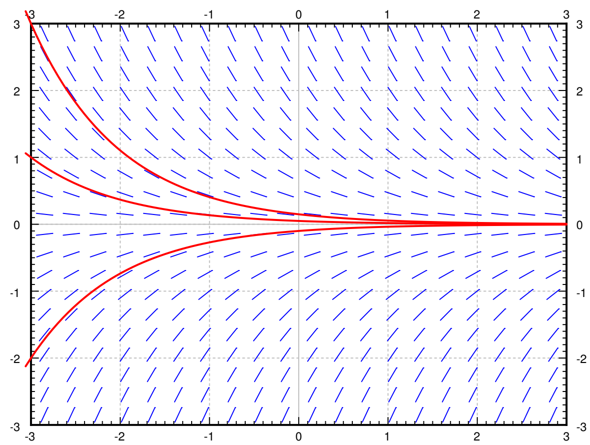


Σχήμα 1.2: Το πεδίο κατευθύνσεων της εξίσωσης $y' = xy$ και η γραφική παράσταση της λύσης που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, και $y(0) = -0.2$.

Την παραπάνω εικόνα ονομάζουμε *πεδίο κατευθύνσεων* της εξίσωσης. Εάν μας δοθεί μια συγκεκριμένη αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, μπορούμε να ξεκινήσουμε από το σημείο (x_0, y_0)

στο επίπεδο και να προχωρήσουμε στην γραφική παράσταση της συγκεκριμένης λύσης απλά ακολουθώντας κατάλληλα τις κλίσεις του πεδίου. Παρατηρήστε σχετικά το Σχήμα 1.2 στην προηγούμενη σελίδα.

Παρατηρώντας το πεδίο κατευθύνσεων λοιπόν μπορούμε να πάρουμε πολλές πληροφορίες σχετικά με την συμπεριφορά των λύσεων. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1.2 μπορούμε εύκολα να δούμε πως πάνε οι λύσεις όταν η αρχική συνθήκη είναι $y(0) > 0$, $y(0) = 0$ και $y(0) < 0$. Σημειώστε ότι μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες μπορεί να επιφέρει δραστικές αλλαγές στην συμπεριφορά της λύσης. Από την άλλη μεριά, εάν κάνουμε την γραφική παράσταση μερικών λύσεων της εξίσωσης $y' = -y$, παρατηρούμε ότι από όπου και να ξεκινήσουμε, όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν καθώς το x τείνει στο άπειρο. Δείτε το Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Πεδίο κατευθύνσεων της εξίσωσης $y' = -y$ μαζί με την γραφική παράσταση μερικών συγκεκριμένων λύσεων.

1.2.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Δυο είναι τα θεμελιώδη ερωτήματα που μας απασχολούν όσον αφορά το εξής πρόβλημα

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(i) *Υπάρχει* λύση;

(ii) Είναι η λύση *μοναδική* (εάν υπάρχει);

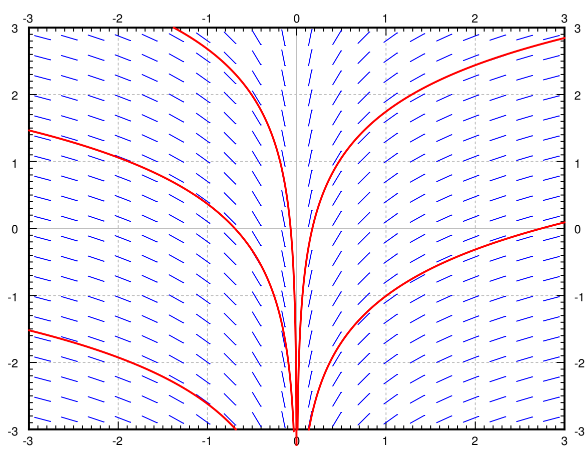
Μην βιαστείτε να θεωρήσετε τα παραπάνω ερωτήματα ρητορικά με προφανή απάντηση και στα δύο το ναι. Υπάρχουν περιπτώσεις που (ανάλογα με το $f(x, y)$) η απάντηση σε κάποιο από αυτά μπορεί κάλλιστα να είναι όχι.

Επειδή γενικά οι εξισώσεις μας προκύπτουν από ρεαλιστικές καταστάσεις και φυσικά προβλήματα, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι πάντα υπάρχει λύση. Η εν λόγω λύση επίσης είναι λογικό να υποθέσουμε ότι είναι μοναδική μια και όλοι μας πιστεύουμε ότι ο κόσμος μας είναι ντετερμινιστικός. Εάν δεν υπάρχει λύση, ή η λύση δεν είναι μοναδική τότε πιθανόν να προσπαθούμε να λύσουμε κάποιο μαθηματικό μοντέλο που δεν αντιστοιχεί σωστά στο αρχικό ρεαλιστικό μας πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση, είναι πάντα σημαντικό να γνωρίζουμε πότε έχουμε πρόβλημα και αν είναι δυνατόν γιατί.

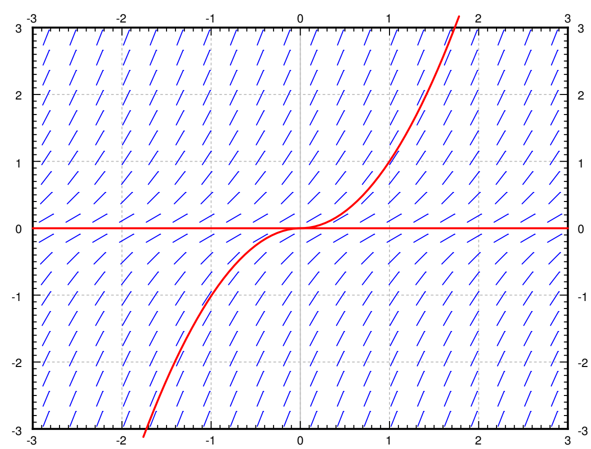
Παράδειγμα 1.2.1: Προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση:

$$y' = \frac{1}{x}, \qquad y(0) = 0.$$

Ολοκληρώστε για να βρείτε την λύση $y = \ln|x| + C$. Σημειώστε ότι η λύση αυτή δεν υπάρχει για $x = 0$. Δείτε το 1.4.



Σχήμα 1.4: Πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης $y' = {}^{1}\!/_{x}$.



Σχήμα 1.5: Πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης $y' = 2\sqrt{|y|}$ με δύο λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη $y(0) = 0$.

Παράδειγμα 1.2.2: Λύστε την εξίσωση:

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0.$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση $y = x^2$ είναι μια λύση και ότι η $y = 0$ είναι επίσης λύση (σημειώστε όμως ότι η x^2 αποτελεί λύση μόνο στην περίπτωση που έχουμε $x > 0$). Δείτε το Σχήμα 1.5.

Είναι στην πραγματικότητα δύσκολο να συμπεράνει κάποιος το εάν μια διαφορική εξίσωση έχει μοναδική λύση ή όχι παρατηρώντας απλά το πεδίο των διευθύνσεών της. Υπάρχει όμως κάποια ελπίδα. Ας δούμε πρώτα το παρακάτω θεώρημα (γνωστό και σαν θεώρημα του *Picard**) το οποίο παρόλο που δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί θα το δεχθούμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.2.1 (Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του *Picard*)**.** *Εάν η $f(x,y)$ είναι συνεχής (θεωρώντας την σαν συνάρτηση δύο βεβαίως μεταβλητών) και εάν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής σε κάποια περιοχή γύρω από το (x_0, y_0), τότε η λύση του προβλήματος*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

υπάρχει (τουλάχιστον για κάποια x) και είναι μοναδική.

Σημειώστε ότι τα προβλήματα $y' = {}^1\!/\!{}_x$, $y(0) = 0$ και $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ δεν ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Ακόμα και στην περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα οφείλουμε να είμαστε προσεκτικοί πάνω στο θέμα της ύπαρξης. Είναι αρκετά πιθανόν η λύση να υπάρχει μόνον προσωρινά.

Ρίξτε μια ματιά στο εξής πρόβλημα

Παράδειγμα 1.2.3:

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

όπου A κάποια σταθερά.

Ξέρουμε πως να βρούμε την λύση του. Πρώτα ας υποθέσουμε ότι $A \neq 0$, όποτε η y δεν είναι ίση με μηδέν τουλάχιστον για κάποιο x κοντά στο 0. Οπότε $x' = {}^1\!/\!{}_{y^2}$, άρα $x = {}^{-1}\!/\!{}_y + C$, συνεπώς $y = \frac{1}{C-x}$. Εάν $y(0) = A$, τότε $C = {}^1\!/\!{}_A$ άρα

$$y = \frac{1}{{}^1\!/\!{}_A - x}.$$

Εάν $A = 0$, τότε η $y = 0$ είναι προφανώς μια λύση.

Εάν συγκεκριμένα $A = 1$ έχουμε 'έκρηξη' της λύσης για $x = 1$. Συνεπώς, δεν έχουμε ύπαρξη λύσης για κάποια τιμή της x παρόλο που η εξίσωση φαινόταν μια χαρά για κάθε τιμή του x. Η εξίσωση $y' = y^2$ δεν προδίδει κάποιο πρόβλημα και φυσικά είναι ορισμένη παντού.

Στο μάθημα αυτό θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων τα οποία έχουν μοναδική λύση, συνήθως για κάθε τιμή του x. Είναι όμως απαραίτητο να συνειδητοποιήσουμε ότι το θέμα της ύπαρξης και την μοναδικότητας της λύσης μπορεί κάλλιστα να προκύψει, ακόμα και από εξισώσεις όπως η $y' = y^2$ οι οποίες δεν προδιαθέτουν για κάτι τέτοιο. Πρέπει τουλάχιστον να είμαστε σε θέση να διαπιστώσουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου προβλήματα και να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τα αίτια.

---

*Charles Émile Picard (1856 – 1941)

1.2.3 Ασκήσεις

1.2.1 *Σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης* $y' = e^{x-y}$. *Πως συμπεριφέρονται οι λύσεις της όταν αυξάνουμε το* x*; Μπορείτε να μαντέψετε μια συγκεκριμένη λύση παρατηρώντας απλά το πεδίο των διευθύνσεών της;*

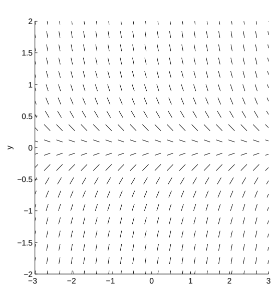
1.2.2 *Σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης* $y' = x^2$.

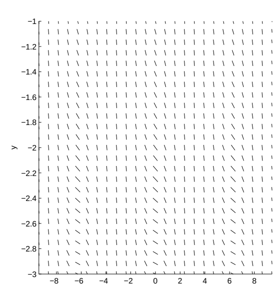
1.2.3 *Σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων της εξίσωσης* $y' = y^2$.

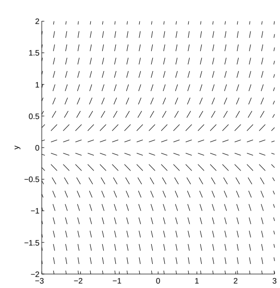
1.2.4 *Είναι δυνατόν να λύσετε την εξίσωση* $y' = \frac{xy}{\cos x}$ *για* $y(0) = 1$*; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

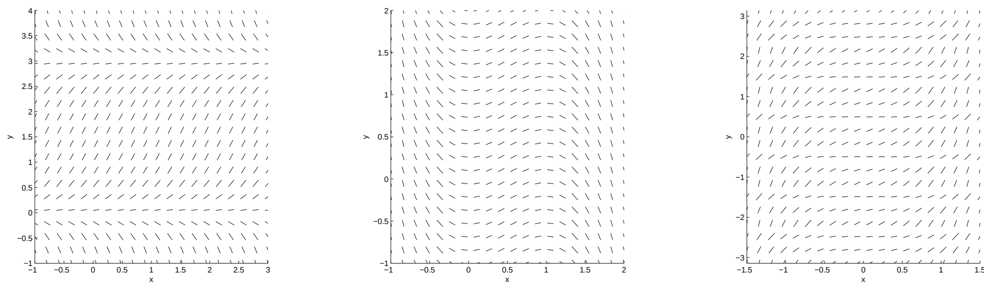
1.2.5 *Έστω* k, A, B, C *είναι κάποιες σταθερές. Αντιστοιχίστε τις εξής διαφορικές εξισώσεις με τα πεδία κατευθύνσεων που δίνονται παρακάτω.*

1. $\frac{dy}{dx} = ky$, *όπου* $k > 0$
2. $\frac{dy}{dx} = ky$, *όπου* $k < 0$
3. $\frac{dy}{dx} = 2x(A - x)$
4. $\frac{dy}{dx} = y(B - y)$
5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + \exp(x^2)\cos^2(3y)$
6. $\frac{dy}{dx} = -e^y - C(1 - \cos(x))$









x
y

1.3 Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Όπως είδαμε αν η εξίσωσή μας είναι στην μορφή $y' = f(x)$, τότε μπορούμε να την λύσουμε απλά ολοκληρώνοντας: $y = \int f(x)\,dx + C$. Δυστυχώς ο τρόπος αυτός δεν μπορεί να επεκταθεί εύκολα και για εξισώσεις της γενικής μορφής $y' = f(x, y)$. Ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη έχουμε

$$y = \int f(x, y)\,dx + C.$$

Προσέξτε ότι το ολοκλήρωμα εξαρτάται από το y.

1.3.1 Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που η εξίσωση είναι *διαχωρίσιμη*, δηλαδή αν έχει την μορφή

$$y' = f(x)g(y),$$

όπου $f(x)$ και $g(y)$ κάποιες συναρτήσεις. Ας γράψουμε την εξίσωση αυτή στην λεγόμενη μορφή *Leibniz*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Τώρα ας την ξαναγράψουμε ως εξής

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Έχουμε συνεπώς διατυπώσει την εξίσωση με τρόπο που να μπορούμε να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη. Δηλαδή έχουμε

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Συνεπώς εάν μπορέσουμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα έχουμε ελπίδες να λύσουμε την προκύπτουσα αλγεβρική εξίσωση ως προς y.

Παράδειγμα 1.3.1: Θεωρήστε την εξίσωση

$$y' = xy.$$

Πρώτα συνειδητοποιήστε ότι η $y = 0$ αποτελεί λύση, οπότε ας ασχοληθούμε από εδώ και πέρα με την περίπτωση $y \neq 0$. Ας γράψουμε την εξίσωση σαν $\frac{dy}{dx} = xy$, οπότε

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\ dx + C.$$

Υπολογίζοντας την αντιπαράγωγο καταλήγουμε στην

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

ή ισοδύναμα στην

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}}e^C = De^{\frac{x^2}{2}},$$

όπου $D > 0$ κάποια σταθερά. Μια και η $y = 0$ είναι λύση και λόγω της απόλυτης τιμής μπορούμε να καταλήξουμε στην λύση

$$y = De^{\frac{x^2}{2}},$$

για κάθε αριθμό D (συμπεριλαμβανομένου του μηδέν και τον αρνητικών αριθμών).

Ας το ελέγξουμε:

$$y' = Dxe^{\frac{x^2}{2}} = x(De^{\frac{x^2}{2}}) = xy.$$

Σωστά!

Οφείλουμε όμως να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί με την μέθοδο αυτή. Ολοκληρώνουμε ουσιαστικά ως προς δύο διαφορετικές μεταβλητές και αυτό δεν φαίνεται να είναι τόσο σωστό. Φαίνεται ότι δεν κάνουμε την ίδια πράξη και στα δύο μέρη της εξίσωσης. Ας δουλέψουμε με περισσότερη μαθηματική αυστηρότητα.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Ας ξαναγράψουμε την εξίσωση, λαμβάνοντας υπ όψιν το ότι η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x όπως είναι και η $\frac{dy}{dx}$!

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Ας ολοκληρώσουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης ως προς x.

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx + C.$$

Με αλλαγή μεταβλητών τώρα καταλήγουμε στην

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

Ολοκληρώσαμε.

1.3.2 Έμμεσες Λύσεις

Είναι φανερό ότι κάποιες φορές μπορεί να μην μπορούμε να προχωρήσουμε στην διατύπωση της λύσης σε αναλυτική (κλειστή) μορφή ακόμα και αν μπορέσουμε να υπολογίσουμε όλα τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξής διαχωρίσιμη εξίσωση

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές

$$\frac{y^2+1}{y}\,dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\,dy = x\,dx$$

και ολοκληρώνουμε για να πάρουμε

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

ή καλλίτερα

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C.$$

Δεν είναι εύκολο να βρούμε την λύση της διαφορικής εξίσωσης σε αναλυτική (κλειστή) μορφή επειδή δεν είναι εύκολο να λύσουμε την παραπάνω αλγεβρική εξίσωση αυτή ως y. Θα καλούμε λοιπόν κάθε συνάρτηση y που ικανοποιεί την παραπάνω αλγεβρική εξίσωση *έμμεση λύση* παρόλο που δεν μπορούμε να την διατυπώσουμε σε αναλυτική μορφή. Είναι εύκολο να ελέγξουμε αν πράγματι μια αλγεβρική εξίσωση εμπεριέχει πράγματι έμμεση λύση η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση. Γι αυτό ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$y'\left(2y + \frac{2}{y}\right) = 2x.$$

Είναι προφανές ότι η διαφορική εξίσωση επαληθεύεται. Τα πράγματα μπορεί να γίνουν λίγο πιο δύσκολα στην περίπτωση που πρέπει να υπολογίσουμε μερικές τιμές της y και να πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο τέχνασμα. Για παράδειγμα, μπορούμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της x σαν συνάρτηση της y, και μετά να αναποδογυρίσουμε το χαρτί. Οι υπολογιστές μπορούν να μας βοηθήσουν ουσιαστικά με τέτοια τεχνάσματα, πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί.

Σημειώστε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει επιπρόσθετα σαν λύση την $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση είναι η $y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C$ μαζί με την $y = 0$. Αυτές τις απόκεντρες λύσεις όπως η $y = 0$ πολλές φορές τις ονομάζουμε *ιδιάζουσες λύσεις*.

1.3.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.3.2: Λύστε την εξίσωση $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$, $y(1) = 0$.

Παραγοντοποιούμε πρώτα το δεξιό μέρος για να πάρουμε την εξίσωση

$$x^2y' = (1 - x^2)(1 + y^2).$$

Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές, ολοκληρώνουμε και λύνουμε ως προς y

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1-x^2}{x^2}, \\
\frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1}{x^2} - 1, \\
\arctan(y) &= \frac{-1}{x} - x + C, \\
y &= \tan\left(\frac{-1}{x} - x + C\right).
\end{aligned}$$

Τώρα λύνουμε την εξίσωση για την αρχική συνθήκη, $0 = \tan(-2 + C)$ και παίρνουμε ότι $C = 2$ (ή $2 + \pi$, ετς...). Συνεπώς, η λύση που ψάχνουμε είναι η

$$y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + 2\right).$$

Παράδειγμα 1.3.3: Υποθέστε ότι στο κυλικείο φτιάχνουν τον καφέ σας χρησιμοποιώντας βραστό νερό (100 βαθμών Κελσίου) και έστω ότι προτιμάται να πίνετε τον καφέ σας στους 70 βαθμούς. Εάν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι 26 βαθμούς και έχετε διαπιστώσει ότι 1 λεπτό μετά την παρασκευή του ο καφές σας έχει θερμοκρασία 95 βαθμού πότε πρέπει να πιείτε τον καφέ σας;

Έστω T η θερμοκρασία του καφέ και A η θερμοκρασία του περιβάλλοντος (του κυλικείου), τότε για κάποιο k η θερμοκρασία του καφέ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A).$$

Για το πρόβλημά μας $A = 26$, $T(0) = 100$, $T(1) = 95$. Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές και ολοκληρώνουμε (C και D παριστούν τυχαίες σταθερές) για να πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T-A}\,\frac{dT}{dt} &= -k, \\
\ln(T - A) &= -kt + C, \\
T - A &= D\,e^{-kt}, \\
T &= D\,e^{-kt} + A.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $T = 26 - D\,e^{-kt}$. Χρησιμοποιούμε την πρώτη συνθήκη $100 = T(0) = 26 - D$ και καταλήγουμε στο $D = -74$. Οπότε έχουμε $T = 26 + 74\,e^{-kt}$. Χρησιμοποιούμε την $95 = T(1) = 26 + 74\,e^{-k}$. Λύνουμε ως προς k και παίρνουμε $k = -\ln\frac{95-26}{74} \approx 0.07$. Τώρα λύνουμε ως προς το t για το οποίο η θερμοκρασία του καφέ είναι 74 βαθμούς. Λύνουμε δηλαδή την εξίσωση $70 = 26 + 74e^{-0.07t}$ για να πάρουμε $t = -\frac{\ln\frac{70-26}{74}}{0.07} \approx 7.43$ λεπτά.

Παράδειγμα 1.3.4: Λύστε την εξίσωση $y' = \frac{-xy^2}{3}$.

Σημειώνουμε πρώτα ότι η $y = 0$ είναι μια λύση (μια ιδιάζουσα λύση). Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{-3}{y^2}y' &= x, \\ \frac{3}{y} &= \frac{x^2}{2} + C, \\ y &= \frac{3}{x^2/2 + C} = \frac{6}{x^2 + 2C}. \end{aligned}$$

1.3.4 Ασκήσεις

1.3.1 *Λύστε την εξίσωση* $y' = x/y$.

1.3.2 *Λύστε την εξίσωση* $y' = x^2 y$.

1.3.3 *Λύστε την εξίσωση* $\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)\,t$, *για* $x(0) = 0$.

1.3.4 *Λύστε την εξίσωση* $\frac{dx}{dt} = x\,\sin(t)$, *για* $x(0) = 1$.

1.3.5 *Λύστε την εξίσωση* $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$. *Υπόδειξη: Παραγοντοποιήστε το δεξιό μέρος.*

1.3.6 *Βρείτε μια έμμεση λύση της εξίσωσης* $xy' = y + 2x^2y$, *όπου* $y(1) = 1$.

1.3.7 *Λύστε την εξίσωση* $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y$, *για* $y(0) = 10$.

1.4 Γραμμικές εξισώσεις και ολοκληρωτικοί παράγοντες

Ένας από τους σημαντικότερους τύπους διαφορικών εξισώσεων που θα μελετήσουμε είναι οι *γραμμικές εξισώσεις*. Στην πραγματικότητα μόνον σε λίγες περιπτώσεις θα ασχοληθούμε με μη-γραμμικές εξισώσεις. Ας επικεντρωθούμε προς το παρόν στις *γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης*. Μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση είναι γραμμική εάν μπορούμε να την γράφουμε στην εξής μορφή:

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{1.3}$$

Η λέξη 'γραμμική' εν προκειμένω σημαίνει γραμμική ως προς y. Η εξάρτηση ως προς x μπορεί φυσικά να είναι πιο περίπλοκη.

Οι λύσεις των γραμμικών εξισώσεων έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για παράδειγμα, η λύση υπάρχει αρκεί να μπορούν να ορίζονται οι συναρτήσεις $p(x)$ και $f(x)$ στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Στην περίπτωση αυτή ο ομαλότητα της λύσης είναι η ίδια με αυτή των $p(x)$ και $f(x)$, είναι δηλαδή όσο ομαλή όσο και οι δύο αυτές συναρτήσεις. Το σημαντικότερο όμως γεγονός, τουλάχιστον για τώρα, είναι το ότι μπορούμε να διατυπώσουμε μια σαφή μέθοδο για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Ας πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης (1.3) με κάποια συνάρτηση $r(x)$ τέτοια ώστε

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

Μπορούμε βέβαια να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη

$$\frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big] = r(x)f(x).$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέρος δεν εξαρτάται από το y ενώ το αριστερό μέρος είναι η αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης. Μπορούμε να λύσουμε ως προς y. Φυσικά όλα τα παραπάνω κάτω από την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $r(x)$ είναι γνωστή. Η συνάρτηση αυτή $r(x)$ ονομάζετε *ολοκληρωτικός παράγοντας* και κατά συνέπεια η προκύπτουσα μέθοδος ονομάζετε *μέθοδος ολοκληρωτικού παράγοντα*.

Ψάχνουμε λοιπόν για μια συνάρτηση $r(x)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε την ίδια την συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με $p(x)$. Προβλέπεται εκθετική συνάρτηση!

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Ας κάνουμε όμως τις πράξεις.

$$\begin{aligned}
y' + p(x)y &= f(x), \\
e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\
\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\
e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C, \\
y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C\right).
\end{aligned}$$

Για να πάρουμε βέβαια την y σε κλειστή μορφή πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε και τα δύο εμπλεκόμενα ολοκληρώματα σε κλειστή μορφή.

Παράδειγμα 1.4.1: Λύστε την εξίσωση

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1.$$

Παρατηρήστε πρώτα ότι $p(x) = 2x$ και $f(x) = e^{x-x^2}$. Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη με $r(x)$ για να πάρουμε

$$\begin{aligned}
e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= e^{x-x^2}e^{x^2}, \\
\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] &= e^{x}.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned}
e^{x^2}y &= e^{x} + C, \\
y &= e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Λύνουμε τις αρχικές συνθήκες $-1 = y(0) = 1+C$, για να πάρουμε ότι $C = -2$. Η λύση λοιπόν είναι

$$y = e^{x-x^2} - 2e^{x^2}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν ενδιαφερόμαστε ποια αντιπαράγωγο θα πάρουμε όταν υπολογίζουμε το $e^{\int p(x)dx}$. Μπορούμε δηλαδή να προσθέσουμε μια σταθερά ολοκλήρωσης αλλά αυτή δεν πρόκειται να παίξει κάποιο ρόλο μια και εν τέλει θα ενσωματωθεί στην σταθερά ολοκλήρωσης της επόμενης αντιπαραγώγου που θα υπολογίσουμε.

1.4.1 *Δοκιμάστε το. Προσθέστε μια σταθερά ολοκλήρωσης όταν θα υπολογίσετε τον ολοκληρωτικό παράγοντα και δείξτε ότι η λύση που θα καταλήξετε ταυτίζεται με αυτή που βρήκαμε παραπάνω.*

Μια συμβουλή: Μην προσπαθήσετε να απομνημονεύσετε τον τελικό τύπο. Είναι δύσκολο ή καλλίτερα, είναι ευκολότερο να θυμάστε την διαδικασία και να την επαναλάβετε.

Επειδή δεν μπορούμε πάντοτε να υπολογίζουμε τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα σε κλειστή μορφή είναι χρήσιμο να ξέρουμε πως μπορούμε να γράψουμε την λύση στην μορφή ορισμένου ολοκληρώματος. Μην ξεχνάτε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι κάτι το οποίο μπορείς να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε υπολογιστή μηχανή. Έστω η εξίσωση

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Μπορούμε να δώσουμε την λύση γράφοντας τα ολοκληρώματα σαν ορισμένα ολοκληρώματα ως εξής

$$\boxed{y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds} f(t)\,dt + y_0 \right).} \tag{1.4}$$

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην χρήση των μεταβλητών ολοκλήρωσης βεβαίως. Προφανώς μπορούμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω λύση στον υπολογιστή έτσι ώστε αυτός να μας δώσει άμεσα όποια αριθμητική τιμή της λύσης του ζητήσουμε.

1.4.2 *Ελέγξετε αν η λύση (1.4) ικανοποιεί την συνθήκη $y(x_0) = y_0$.*

1.4.3 *Γράψτε την λύση του εξής προβλήματος*

$$y' + y = e^{x^2 - x}, \qquad y(0) = 10.$$

σαν ορισμένο ολοκλήρωμα. προσπαθήστε να απλοποιήσετε την λύση σας όσο είναι δυνατόν. Σημειώστε ότι δεν θα μπορέσετε να γράψετε την λύση σε κλειστή μορφή.

Παράδειγμα 1.4.2: Ας δούμε τώρα μια απλή εφαρμογή των γραμμικών εξισώσεων τυπική για μια κατηγορία προβλημάτων που συχνά συναντάμε στην πράξη. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε συχνά γραμμικές εξισώσεις για να μελετήσουμε την συγκέντρωση μιας ουσίας (χημικής ουσίας, ρύπου, ...) σε ένα μέσο (νερό).

Συγκεκριμένα, μια δεξαμενή 100 λίτρων περιέχει 10 κιλά αλατιού διαλυμένα σε 60 λίτρα νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού (άλμη) πυκνότητας 0.1 κιλά ανά λίτρο εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5 λίτρα το λεπτό. Το διάλυμα ανακατεύεται καλά και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3 λίτρα το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

Πρέπει να κατασκευάσουμε την εξίσωση. Ας συμβολίσουμε με x την ποσότητα του αλατιού (σε κιλά) που περιέχει η δεξαμενή, και με t το χρόνο (σε λεπτά). Τότε για μια μικρή αλλαγή Δt στον χρόνο η αλλαγή στο x (που την συμβολίζουμε με Δx) είναι περίπου

$$\Delta x \approx (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής})\Delta t - (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})\Delta t.$$

Παίρνουμε το όριο όταν το $\Delta t \to 0$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής}) - (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής}).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \text{ρυθμός εισαγωγής} &= 5, \\ \text{συγκέντρωση εισαγωγής} &= 0.1, \\ \text{ρυθμός εξαγωγής} &= 3, \\ \text{συγκέντρωση εξαγωγής} &= \frac{x}{\text{όγκος}} = \frac{x}{60 + (5-3)t}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε συνεπώς στην εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = (5 \times 0.1) - \left(3 \frac{x}{60 + 2t}\right).$$

Την οποία βεβαίως μπορούμε να γράψουμε στην μορφή (1.3) ως εξής

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60 + 2t} x = 0.5.$$

Ας προσπαθήσουμε να την λύσουμε τώρα. Ο ολοκληρωτικός παράγοντάς της είναι

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60 + 2t} dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2} \ln(60 + 2t)\right) = (60 + 2t)^{3/2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} (60 + 2t)^{3/2} \frac{dx}{dt} + (60 + 2t)^{3/2} \frac{3}{60 + 2t} x &= 0.5(60 + 2t)^{3/2}, \\ \frac{d}{dt}\left[(60 + 2t)^{3/2} x\right] &= 0.5(60 + 2t)^{3/2}, \\ (60 + 2t)^{3/2} x &= \int 0.5(60 + 2t)^{3/2} dt + C, \\ x &= (60 + 2t)^{-3/2} \int \frac{(60 + 2t)^{3/2}}{2} dt + C(60 + 2t)^{-3/2}, \\ x &= (60 + 2t)^{-3/2} \frac{1}{10} (60 + 2t)^{5/2} + C(60 + 2t)^{-3/2}, \\ x &= \frac{60 + 2t}{10} + C(60 + 2t)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Ας βρούμε τώρα το C. Γνωρίζουμε ότι $t = 0$, $x = 10$. Άρα

$$10 = x(0) = \frac{60}{10} + C(60)^{-3/2} = 6 + C(60)^{-3/2},$$

ή

$$C = 4(60^{3/2}) \approx 1859.03.$$

Θέλουμε να βρούμε το x όταν γεμίσει η δεξαμενή. Παρατηρούμε ότι η δεξαμενή είναι γεμάτη όταν $60 + 2t = 100$, δηλαδή όταν $t = 20$. Άρα

$$x(20) = \frac{60+40}{10} + C(60+40)^{-3/2} \approx 10 + 1859.03(100)^{-3/2} \approx 11.86.$$

Η συγκέντρωση λοιπόν όταν γεμίσει η δεξαμενή θα είναι περίπου 0.1186 κιλά/λίτρο ενώ η αρχική τιμή της ήταν $1/6$ ή 0.167 κιλά/λίτρο.

1.4.1 Ασκήσεις

Στις παρακάτω ασκήσεις προσπαθήστε να δώσετε την λύση σε κλειστή μορφή. Εάν κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν, μπορείτε να την αφήσετε στην μορφή ορισμένου ολοκληρώματος.

1.4.4 *Λύστε την εξίσωση* $y' + xy = x$.

1.4.5 *Λύστε την εξίσωση* $y' + 6y = e^x$.

1.4.6 *Λύστε την εξίσωση* $y' + 3x^2 y = \sin(x)\, e^{-x^3}$, *όταν* $y(0) = 1$.

1.4.7 *Λύστε την εξίσωση* $y' + \cos(x) y = \cos(x)$.

1.4.8 *Λύστε την εξίσωση* $\frac{1}{x^2+1}\, y' + xy = 3$, *όταν* $y(0) = 0$.

1.4.9 *Έχουμε δύο λίμνες και από την μια ρέει νερό στην άλλη. Η ρυθμός της ροή εισαγωγής και εξαγωγής νερού από την κάθε λίμνη είναι 500 λίτρα την ώρα. Η πρώτη λίμνη περιέχει 100 χιλιάδες λίτρα νερού και η δεύτερη 200 χιλιάδες λίτρα. Ένα βυτίο που μεταφέρει 500 κιλά μιας τοξικής ουσίας ανατρέπεται μέσα στην πρώτη λίμνη όπου και χύνεται το περιεχόμενό του. Υποθέτοντας ότι η τοξική ουσία διαλύεται αμέσως και ομοιόμορφα βρείτε*

1. *Την συγκέντρωση της τοξικής ουσίας σαν συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα) στις δύο λίμνες.*

2. *Πότε η συγκέντρωση στην πρώτη λίμνη θα είναι μικρότερη από 0.01 κιλά ανά λίτρο.*

3. *Πότε θα είναι η συγκέντρωση στην δεύτερη λίμνη όσο το δυνατόν πιο υψηλή.*

1.4.10 *Ο Νόμος διάδοσης της θερμότητας του Νεύτωνα μας διαβεβαιώνει ότι* $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$ *όπου* x *είναι η θερμοκρασία ενός σώματος,* t *είναι ο χρόνος,* A *η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, και* $k > 0$ *μια σταθερά. Υποθέστε ότι* $A = A_0 \cos \omega t$ *για κάποιες σταθερές* A_0 *και* ω*. Υποθέστε δηλαδή ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μεταβάλλεται περιοδικά (πχ λόγω μεταβολής της θερμοκρασίας μεταξύ μέρας και νύχτας) και βρείτε την γενική λύση* x *του προβλήματος. Εξετάστε εάν οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν ουσιαστικά την λύση στο 'μακρινό' μέλλον. Δικαιολογείστε τα συμπεράσματά σας.*

1.5 Αλλαγή μεταβλητών

Όπως ακριβώς και όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα, έτσι και για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να προσπαθήσουμε να κάνουμε αλλαγές μεταβλητών για να καταλήξουμε σε απλούστερες εξισώσεις τις οποίες είναι ευκολότερο να λύσουμε.

1.5.1 Γενική Αντικατάσταση

Μια και η εξίσωση

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

δεν είναι ούτε διαχωρίσιμη ούτε γραμμική ας προσπαθήσουμε να αλλάξουμε τις μεταβλητές της έτσι ώστε η νέα μορφή της (ως προς τις νέες μεταβλητές) να είναι απλούστερη. Θα χρησιμοποιήσουμε μια νέα μεταβλητή την v, την οποία θα θεωρήσουμε σαν συνάρτηση του x.

$$v = x - y + 1.$$

Πρέπει να βρούμε την y' συναρτήσει των v', v και x. Παραγωγίζοντας (ως προς x) έχουμε $v' = 1 - y'$. Άρα $y' = 1 - v'$. Αντικαθιστούμε στην αρχική διαφορική εξίσωση για να πάρουμε

$$1 - v' = v^2.$$

Δηλαδή, $v' = 1 - v^2$. Την εξίσωση αυτή ξέρουμε να την λύσουμε.

$$\frac{1}{1 - v^2}\, dv = dx.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= x + C, \\ \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= e^{2x+2C}, \end{aligned}$$

ή $\frac{v+1}{v-1} = De^{2x}$ για κάποια σταθερά D. Σημειώστε ότι η $v = 1$ και η $v = -1$ είναι επίσης λύσεις.

Τώρα ας αντικαταστήσουμε 'προς τα πίσω' για να πάρουμε

$$\frac{x - y + 2}{x - y} = De^{2x},$$

όπως και τις άλλες δύο λύσεις $x - y + 1 = 1$ ή $y = x$, και $x - y + 1 = -1$ ή $y = x + 2$. Ας λύσουμε και την πρώτη εξίσωση ως προς y.

$$\begin{aligned} x - y + 2 &= (x-y)De^{2x}, \\ x - y + 2 &= Dxe^{2x} - yDe^{2x}, \\ -y + yDe^{2x} &= Dxe^{2x} - x - 2, \\ y\left(-1 + De^{2x}\right) &= Dxe^{2x} - x - 2, \\ y &= \frac{Dxe^{2x} - x - 2}{De^{2x} - 1}. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι τιμή $D = 0$ μας οδηγεί στην λύση $y = x + 2$, ενώ καμιά τιμή του D δεν μας οδηγεί στην $y = x$.

Η παραπάνω μέθοδος αλλαγής μεταβλητών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων εφαρμόζεται όπως και η αντίστοιχη μεθοδολογία στον Λογισμό. Βασίζεται δηλαδή σε μαντεψιές. Για μια εξίσωση μπορεί να υπάρχουν πολλοί τρόποι (ή να μην υπάρχει κανένας τρόπος) να εφαρμοσθεί μια τέτοια μέθοδος, μπορεί όμως να είναι δύσκολο να βρούμε κάποια από αυτές. Πρέπει εν γένει να βασιστούμε στην μαθηματική μας διαίσθηση και κουλτούρα. Υπάρχουν όμως κάποιες γενικές αρχές που ανάλογα με την εξίσωση θα μπορούσαν να μας βοηθήσουν. Μερικές από αυτές είναι οι παρακάτω.

Όταν δεις	δοκίμασε
yy'	y^2
y^2y'	y^3
$(\cos y)y'$	$\sin y$
$(\sin y)y'$	$\cos y$
$y'e^y$	e^y

Συνήθως προσπαθούμε να απαλλαγούμε από το 'πιο περίπλοκο' μέρος της εξίσωσης ελπίζοντας ότι έτσι θα την απλοποιήσουμε. Ο παραπάνω πίνακας είναι απλώς ένας πρακτικός γενικός κανόνας. Υπάρχει βεβαίως ενδεχόμενο να μην σας βοηθήσει και να χρειασθεί να μετατρέψετε την μαντεψιά σας. Δηλαδή, εάν δεν δουλέψει κάποια αντικατάσταση (δεν σας οδηγήσει δηλαδή σε μια απλούστερη εξίσωση)οφείλουμε να δοκιμάσουμε κάποια άλλη.

1.5.2 Εξισώσεις *Bernoulli*

Υπάρχουν μερικοί τύποι εξισώσεων για τους οποίους υπάρχουν μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται σε κάθε περίπτωση με επιτυχία. Ένας τέτοιος τύπος εξισώσεων είναι η *εξίσωση Bernoulli*†.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

†Υπάρχουν πολλές εξισώσεις που λέγονται εξισώσεις *Bernoulli*. Οι *Bernoullis* ήταν μια ολόκληρη οικογένεια σημαντικών Ελβετών μαθηματικών. Οι εξισώσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο μάθημα σχετίζονται με τον *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705).

Η εξίσωση αυτή μοιάζει πολύ με γραμμική εξίσωση, μια και εάν δεν υπήρχε ο όρος y^n πράγματι θα ήταν γραμμική. Για $n = 0$ ή $n = 1$ η εξίσωση είναι γραμμική και μπορούμε να την λύσουμε. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών $v = y^{1-n}$ για να μετατρέψουμε την εξίσωση *Bernoulli* σε γραμμική εξίσωση. Σημειώστε ότι δεν είναι απαραίτητο ο n να είναι ακέραιος.

Παράδειγμα 1.5.1: Λύστε την εξίσωση

$$xy' + y(x+1) + xy^5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Πρώτα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι έχουμε μια εξίσωση *Bernoulli* ($p(x) = (x+1)/x$ και $q(x) = -1$). Αντικαθιστούμε

$$v = y^{1-5} = y^{-4}, \qquad v' = -4y^{-5}y'.$$

Δηλαδή έχουμε, $\frac{-y^5}{4}v' = y'$. Άρα

$$\begin{aligned} xy' + y(x+1) + xy^5 &= 0, \\ \frac{-xy^5}{4}v' + y(x+1) + xy^5 &= 0, \\ \frac{-x}{4}v' + y^{-4}(x+1) + x &= 0, \\ \frac{-x}{4}v' + v(x+1) + x &= 0, \end{aligned}$$

και τελικά

$$v' - \frac{4(x+1)}{x}v = 4.$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια γραμμική εξίσωση την οποία θα λύσουμε με ολοκληρωτικό παράγοντα. Ας υποθέσουμε ότι $x > 0$ οπότε $|x| = x$. Η υπόθεσή μας αυτή δεν είναι περιοριστική μια και η αρχική μας συνθήκη είναι στο σημείο $x = 1$.

$$r(x) = \exp\left(\int \frac{-4(x+1)}{x}\,dx\right) = e^{-4x-4\ln(x)} = e^{-4x}x^{-4} = \frac{e^{-4x}}{x^4}.$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-4x}}{x^4}v\right] &= 4\frac{e^{-4x}}{x^4}, \\ \frac{e^{-4x}}{x^4}v &= \int_1^x 4\frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1, \\ v &= e^{4x}x^4\left(4\int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1\right). \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε κλειστή μορφή. Όπως όμως έχουμε ήδη τονίσει, είναι πλήρως αποδεκτό να διατυπώσουμε την λύση με ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Ας αντικαταστήσουμε 'προς τα πίσω'.'

$$y^{-4} = e^{4x}x^4 \left(4 \int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\, ds + 1 \right),$$
$$y = \frac{e^{-x}}{x \left(4 \int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\, ds + 1 \right)^{1/4}}.$$

1.5.3 Ομογενείς εξισώσεις

Ένας άλλος τύπος εξισώσεων που μπορούμε να λύσουμε με αλλαγές μεταβλητών είναι οι λεγόμενες *ομογενείς εξισώσεις*. Υποθέστε ότι μπορούμε να γράψουμε την διαφορική μας εξίσωση ως εξής

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Εδώ προσπαθούμε τον μετασχηματισμό

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{και} \quad \text{συνεπώς} \qquad y' = v + xv'.$$

Σημειώστε ότι η εξίσωσή μας έχει μετασχηματισθεί ως εξής

$$v + xv' = F(v) \qquad \text{ή} \qquad xv' = F(v) - v \qquad \text{ή} \qquad \frac{v'}{F(v) - v} = \frac{1}{x}.$$

Άρα μια έμμεση λύση είναι η εξής

$$\int \frac{1}{F(v) - v}\, dv = \ln|x| + C.$$

Παράδειγμα 1.5.2: Λύστε την εξίσωση

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

Ας την φέρουμε πρώτα στην εξής μορφή $y' = (y/x)^2 + y/x$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $v = y/x$ για να πάρουμε μια διαχωρίσιμη εξίσωση

$$xv' = v^2 + v - v = v^2,$$

η οποία έχει την εξής λύση

$$\int \frac{1}{v^2}\,dv = \ln|x| + C,$$
$$\frac{-1}{v} = \ln|x| + C,$$
$$v = \frac{-1}{\ln|x| + C}.$$

Αντικαθιστώντας 'προς τα πίσω' έχουμε

$$y/x = \frac{-1}{\ln|x| + C},$$
$$y = \frac{-x}{\ln|x| + C}.$$

Θέλουμε $y(1) = 1$, οπότε

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

Άρα $C = -1$ και η λύση μας είναι η εξής

$$y = \frac{-x}{\ln|x| - 1}.$$

1.5.4 Ασκήσεις

1.5.1 *Λύστε την εξίσωση* $xy' + y(x+1) + xy^5 = 0$, *με* $y(1) = 1$.

1.5.2 *Λύστε την εξίσωση* $2yy' + 1 = y^2 + x$, *με* $y(0) = 1$.

1.5.3 *Λύστε την εξίσωση* $y' + xy = y^4$, *με* $y(0) = 1$.

1.5.4 *Λύστε την εξίσωση* $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.5.5 *Λύστε την εξίσωση* $y' = (x + y - 1)^2$.

1.5.6 *Λύστε την εξίσωση* $y' = \frac{x+y^2}{y\sqrt{y^2+1}}$, *με* $y(0) = 1$.

1.6 Αυτόνομες εξισώσεις

Ας επικεντρωθούμε τώρα σε εξισώσεις του τύπου

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

όπου η παράγωγος των λύσεων εξαρτάται μόνον από την (εξαρτημένη μεταβλητή) x. Οι εξισώσεις του τύπου αυτού λέγονται *αυτόνομες εξισώσεις*. Το επίθετο αυτόνομη προκύπτει από το γεγονός ότι εάν θεωρήσουμε την περίπτωση που η μεταβλητή t παριστά χρόνο, τότε οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες από τον χρόνο.

Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα του καφέ. Ο νόμος της διάδοσης του Νεύτωνα μας διαβεβαιώνει ότι

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - A),$$

όπου x είναι η θερμοκρασία, t είναι ο χρόνος, k είναι κάποια σταθερά και A είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου. Δείτε το Σχήμα 1.6 στην επόμενη σελίδα για ένα παράδειγμα.

Σημειώστε ότι η $x = A$ είναι λύση (στο παράδειγμα $A = 5$). Αυτού του είδους τις λύσεις τις λέμε *λύσεις ισορροπίας*. Τα σημεία του x άξονα στα οποία έχουμε $f(x) = 0$ τα λέμε *κρίσιμα σημεία*. Το σημείο δηλαδή $x = A$ είναι ένα κρίσιμο σημείο. Στην πραγματικότητα, κάθε κρίσιμο σημείο αντιστοιχεί σε μια λύση ισορροπίας. Σημειώστε επίσης, παρατηρώντας την γραφική παράσταση, ότι η λύση $x = A$ είναι 'ευσταθήσ'. Δηλαδή μικρές διαταραχές στο x δεν οδηγούν σε ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις για αρκετά μεγάλο t. Αν λοιπόν αλλάξουμε λίγο την αρχική συνθήκη, τότε όταν $t \to \infty$ έχουμε $x \to A$. Τέτοια κρίσιμα σημεία τα λέμε *ευσταθή*. Στο τετριμμένο παράδειγμά μας φαίνεται ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο A όταν το $t \to \infty$. Αν ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι ευσταθές τότε λέμε ότι αυτό είναι *ασταθές*.

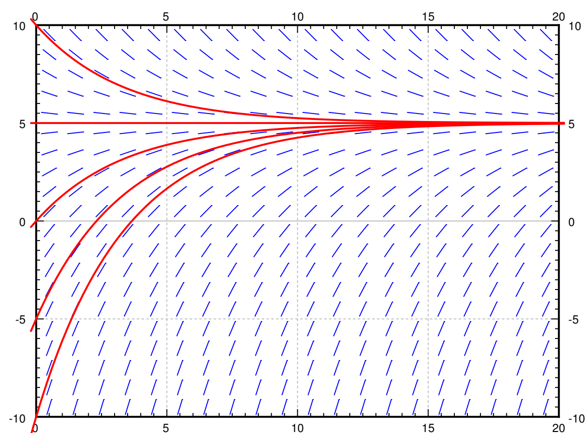
Ας θεωρήσουμε τώρα την *λογιστική εξίσωση*

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x),$$

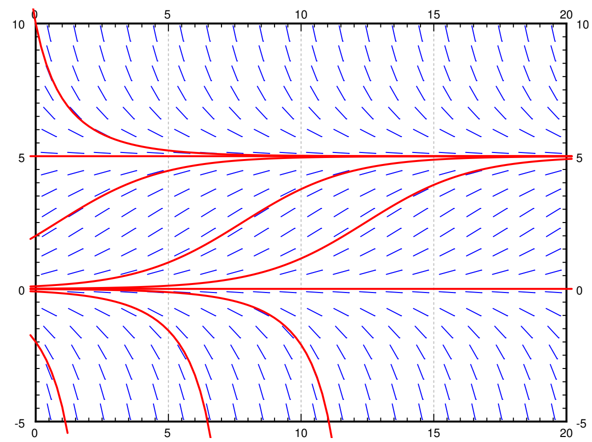
για κάποιους θετικούς αριθμούς k και M. Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται συχνά σαν πληθυσμιακό μοντέλο εάν γνωρίσουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M. Το μοντέλο αυτό οδηγεί σε λιγότερες καταστροφικές προβλέψεις για τον παγκόσμιο πληθυσμό. Σημειώστε ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει αρνητικός πληθυσμός, θα διατηρήσουμε όμως την δυνατότητα να έχουμε αρνητικές τιμές για το x για μαθηματικούς λόγους.

Ας δούμε το Σχήμα 1.7 στην παρούσα σελίδα για παράδειγμα. Παρατηρήστε τα δύο κρίσιμα σημεία, $x = 0$ και $x = 5$. Το κρίσιμο σημείο στο $x = 5$ είναι ευσταθές ενώ αυτό στο $x = 0$ είναι ασταθές.

Δεν είναι απαραίτητο να έχουμε τις ακριβείς λύσεις μιας εξίσωσης για να αποφανθούμε σχετικά με την συμπεριφορά των λύσεων της για μεγάλες τιμές της ελεύθερης μεταβλητής των.



Σχήμα 1.6: Πεδίο κατευθύνσεων και η γραφική παράσταση μερικών λύσεων της εξίσωσης $x' = -0.3(x-5)$.



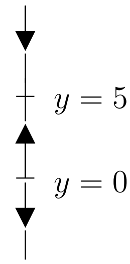
Σχήμα 1.7: Το πεδίο κατευθύνσεων και η γραφική παράσταση μερικών λύσεων της εξίσωσης $x' = 0.1x(5-x)$.

Για παράδειγμα από τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 5 & \text{αν } x(0) > 0, \\ 0 & \text{αν } x(0) = 0, \\ \Delta\Upsilon \text{ ή } -\infty & \text{αν } x(0) < 0. \end{cases}$$

Όπου ΔΥ σημαίνει 'δεν υπάρχει'. Είναι δύσκολο, απλά παρατηρώντας το πεδίο των κατευθύνσεων, να αποφανθούμε για το τι συμβαίνει όταν $x(0) < 0$. Μπορεί η λύση να μην υπάρχει όταν το t τείνει στο ∞. Σκεφθείτε ότι η εξίσωση $y' = y^2$, όπως έχουμε ήδη δει υφίσταται μόνον για κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και με την τωρινή εξίσωση. Όπως θα διαπιστώσουμε δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης του παραπάνω παραδείγματος για οποιοδήποτε χρονική στιγμή. Για να το δούμε όμως αυτό θα πρέπει να προσπαθήσουμε να την λύσουμε. Σε κάθε περίπτωση, η λύση τείνει στο $-\infty$, ενδεχομένως πολύ γρήγορα.

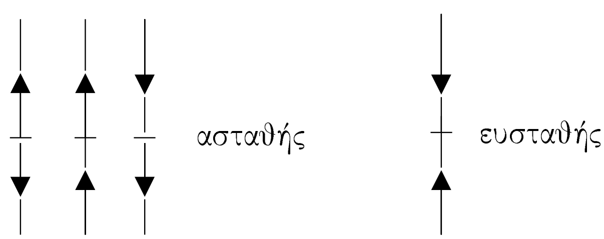
Αρκετές φορές αυτό που ουσιαστικά μας απασχολεί είναι η συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου και συνεπώς σε μια τέτοια περίπτωση ίσως να σπαταλάμε άσκοπα ενέργεια προσπαθώντας να βρούμε ακριβώς την λύση. Είναι ευκολότερο απλά να παρατηρήσουμε το *διάγραμμα φάσης* ή *εικόνα φάσης*, η οποία είναι ένας απλός τρόπος για να οπτικοποιήσουμε την συμπεριφορά των αυτόνομων εξισώσεων. Στην προκείμενη περίπτωση υπάρχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή η x. Συνεπώς σχεδιάζουμε τον x άξονα, σημειώνουμε όλα τα κρίσιμα σημεία και μετά σχεδιάζουμε βέλη μεταξύ τους. Προς τα επάνω βέλη παριστούν θετικότητα και προς τα κάτω αρνητικές τιμές.



Εξοπλισμένοι με το διάγραμμα φάσης, μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε πρόχειρα πως περίπου θα είναι οι λύσεις.

1.6.1 *Προσπαθήστε να σχεδιάσετε μερικές λύσεις. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας χρησιμοποιώντας την παραπάνω γραφική παράσταση.*

Από την στιγμή που έχουμε στην διάθεση μας το διάγραμμα φάσης, εύκολα μπορούμε να αποφανθούμε ποια από τα κρίσιμα σημεία είναι ευσταθή και ποια ασταθή.



Επειδή κάθε μαθηματικό μοντέλο που μας απασχολεί αποτελεί μια εν δυνάμει προσέγγιση κάποιας πραγματικής κατάστασης, τα ασταθή σημεία σηματοδοτούν συνήθως σοβαρά προβλήματα.

Ας εξετάσουμε τώρα την λογιστική εξίσωση με κατανάλωση. Οι λογιστικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την μοντελοποίηση πληθυσμιακών αλλαγών. Υποθέστε ότι μια ομάδα ανθρώπων τρέφεται με ένα είδος ζώου στο οποίο βασίζεσαι για την επιβίωσή της. Εκτρέφει λοιπόν μια αγέλη τέτοιων ζώων και τα καταναλώνει με ρυθμό h τέτοια ζώα τον χρόνο. Έστω ότι το x παριστά το πλήθος των ζώων (ας πούμε σε χιλιάδες) και το t παριστά χρόνο (ας πούμε σε έτη). Έστω επίσης ότι M είναι ο ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση των ζώων. $k > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το πόσο γρήγορα αναπαράγονται τα ζώα. Η εξίσωσή μας έχει την εξής μορφή

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h.$$

Έχουμε ότι

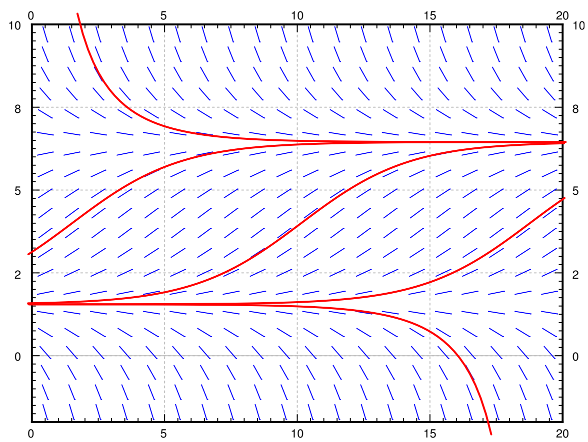
$$\frac{dx}{dt} = -kx^2 + kMx - h.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία A και B είναι

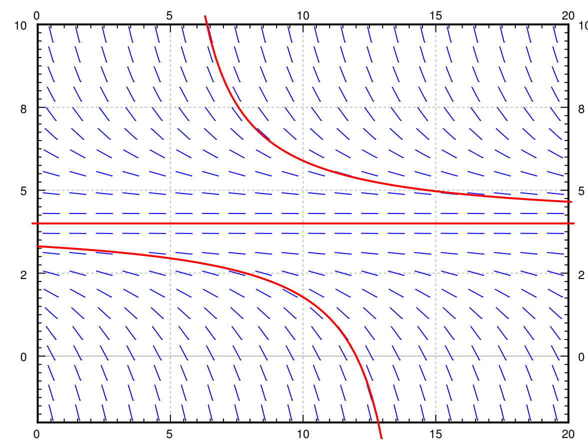
$$A = \frac{kM + \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k} \qquad B = \frac{kM - \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}.$$

1.6.2 *Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για διαφορετικές καταστάσεις. Σημειώστε ότι αυτές οι καταστάσεις είναι οι $A > B$, ή $A = B$, ή A και B και οι δύο μιγαδικές (δηλαδή δεν υπάρχει πραγματική λύση).*

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι εάν $h = 1$, τότε τα A και B είναι θετικά και άνισα. Το σχετικό γράφημα δίνεται στο Σχήμα 1.8. Όσο ο πληθυσμός παραμένει μεγαλύτερος του B το οποίο είναι περίπου 1,55 χιλιάδες, τότε ο πληθυσμός των ζώων παραμένει ενώ εάν πέσει κάτω από το όριο του B τότε ο πληθυσμός των ζώων θα εξαλειφθεί, με αποτέλεσμα να εξαλειφθεί και ο ανθρώπινος πληθυσμός λόγω έλλειψης τροφής.



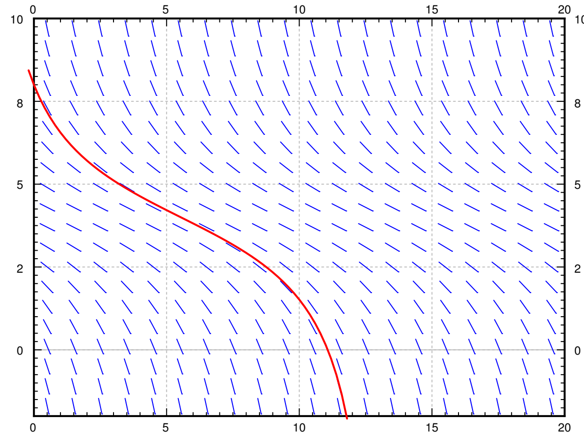
Σχήμα 1.8: Το πεδίο κατευθύνσεων και μερικές λύσεις της εξίσωσης $x' = -0.1x(8-x) - 1$.



Σχήμα 1.9: Το πεδίο κατευθύνσεων και μερικές λύσεις της εξίσωσης $x' = -0.1x(8-x) - 1.6$.

Όταν $h = 1.6$, έχουμε ότι $A = B$. Υπάρχει μόνον ένα κρίσιμο σημείο το οποίο είναι ασταθές. Όταν ο πληθυσμός των ζώων πέσει κάτω από τις 1,6 χιλιάδες αυτός θα τείνει στο μηδέν ενώ εάν είναι μεγαλύτερος από 1,6 χιλιάδες τότε θα τείνει να γίνει 1,6 χιλιάδες. Έχουμε λοιπόν μια ιδιαίτερα επικίνδυνη κατάσταση όπου εάν λόγω κάποιου ενδεχόμενου μικρού λάθους απομακρυνθούμε λίγο από το σημείο ισορροπίας θα επέλθει καταστροφή. Η κατάσταση λοιπόν δεν επιδέχεται το παραμικρό λάθος. Δείτε το Σχήμα 1.9

Τέλος εάν καταναλώνουν 2 χιλιάδες ζώα τον χρόνο, ο πληθυσμός των ζώων θα εξαλειφθεί οπωσδήποτε και ανεξάρτητα από τον αρχικό πλήθος των ζώων. Δείτε το Σχήμα 1.10 στην επόμενη σελίδα.



Σχήμα 1.10: Πεδίο κατευθύνσεων και μερικές λύσεις της εξίσωσης $x' = -0.1x(8-x) - 2$.

1.6.1 Ασκήσεις

1.6.3 *Έστω $x' = x^2$. α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης, βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σημειώστε ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή. β) Σχεδιάστε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις της εξίσωσης. ς) Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ της λύσης που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $x(0) = -1$.*

1.6.4 *Έστω $x' = \sin x$. α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για $-4\pi \le x \le 4\pi$. Στο διάσημα αυτό βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σημειώστε ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή. β) Σχεδιάστε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις της εξίσωσης. ς) Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ της λύσης που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $x(0) = 1$.*

1.6.5 *Έστω ότι η $f(x)$ είναι θετική για $0 < x < 1$ και αρνητική ειδάλλως. α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για $x' = f(x)$, βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σημειώστε ποια από αυτά είναι ευσταθή και ποια ασταθή. β) Σχεδιάστε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις της εξίσωσης. ς) Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ της λύσης που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $x(0) = 0.5$.*

1.6.6 *Ξεκινήστε με την λογιστική εξίσωση $\frac{dx}{dt} = kx(M-x)$. Ας αλλάξουμε λίγο τον τρόπο που καταναλώνουμε. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι το ποσό που καταναλώνουμε είναι ανάλογο του υπάρχοντος πληθυσμού. Θα καταναλώνουμε δηλαδή hx για κάποιο $h > 0$. α) Κατασκευάστε την διαφορική εξίσωση που αναλογεί β) Αποδείξτε ότι εάν $kM > h$, τότε η εξίσωση παραμένει λογιστική. ς) Τι συμβαίνει όταν $kM < h$;*

Κεφάλαιο 2

Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

2.1 Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

Ας θεωρήσουμε την εξής γενική μορφή μιας *γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης*

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

Συχνά διαιρούμε και τα δύο μέρη με A για να την πάρουμε στην εξής μορφή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2.1}$$

όπου $p = {}^{B}/_{A}$, $q = {}^{C}/_{A}$, και $f = {}^{F}/_{A}$. Η λέξη *γραμμική* σημαίνει ότι η εξίσωση δεν περιέχει δυνάμεις των συναρτήσεων y, y', και y'' ούτε αυτές εμφανίζονται σαν ορίσματα άλλων συναρτήσεων.

Στην ειδική περίπτωση $f(x) \equiv 0$ έχουμε μια *ομογενή* εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.2}$$

Έχουμε ήδη συναντήσει κάποιες ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

$$\begin{array}{lll} y'' + k^2 y = 0 & \text{Δυο λύσεις είναι:} & y_1 = \cos kx, \quad y_2 = \sin kx. \\ y'' - k^2 y = 0 & \text{Δυο λύσεις είναι:} & y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}. \end{array}$$

Εάν μπορέσουμε και βρούμε δύο λύσεις μιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης, τότε έχουμε αποκτήσει και σημαντική επιπρόσθετη πληροφορία.

Θεώρημα 2.1.1 (Υπέρθεση)**.** *Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2.2) τότε η*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

είναι επίσης λύση της (2.2) για κάποιες σταθερές C_1 και C_2.

Δηλαδή, μπορούμε να προσθέσουμε λύσεις (ή να πολλαπλασιάσουμε λύσεις με κάποιον αριθμό) και το αποτέλεσμα να είναι επίσης λύση.

Ας αποδείξουμε τώρα το πρώτο μας θεώρημα. Η απόδειξή του θα μας βοηθήσει ουσιαστικά να κατανοήσουμε τις έννοιες, τα χαρακτηριστικά και τους μηχανισμούς που αφορούν τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Απόδειξη: Έστω $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Τότε

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1py_1' + C_2py_2' + C_1qy_1 + C_2qy_2 \\ &= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Η απόδειξη μπορεί να διατυπωθεί ακόμα πιο απλά αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό των τελεστών. Με όσο πιο απλά λόγια γίνεται, ας θεωρήσουμε τελεστή κάτι που του δίνουμε κάποιες συναρτήσεις και αυτός μας επιστρέφει κάποιες συναρτήσεις (όπως ακριβώς δίνουμε αριθμούς σε μια συνάρτηση και μας επιστρέφει αριθμούς).

Ας ορίσουμε τον διαφορικό τελεστή L ως εξής

$$Ly = y'' + py' + qy.$$

Το ότι ο τελεστής L είναι γραμμικός σημαίνει ότι $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται ως εξής.

$$Ly = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Δύο άλλες λύσεις της εξίσωσης $y'' - k^2y = 0$ είναι οι $y_1 = \cosh kx$ και $y_2 = \sinh kx$. Θυμηθείτε ότι σύμφωνα με γνωστό ορισμό, $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Άρα, με βάση το θεώρημα της υπέρθεσης, οι παραπάνω είναι λύσεις μια και είναι γραμμικοί συνδυασμοί των δύο γνωστών εκθετικών λύσεων.

Αρκετές φορές είναι πολύ βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις sinh και cosh και όχι τις εκθετικές. Ας θυμηθούμε μερικές από τις ιδιότητές τους.

$$\begin{aligned} &\cosh 0 = 1 && \sinh 0 = 0 \\ &\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x && \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \\ &\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \end{aligned}$$

2.1.1 *Αποδείξτε τις παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις που συνδέουν τις* sinh *και* cosh *με την εκθετική συνάρτηση.*

Τα ερωτήματα της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης είναι, στην περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων, εύκολο να απαντηθούν.

Θεώρημα 2.1.2 (Ύπαρξη και μοναδικότητα)**.** *Έστω ότι οι p, q, f είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι a, b_0, b_1 είναι σταθερές. Η εξίσωση*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες

$$y(a) = b_0 \qquad y'(a) = b_1.$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $y'' + y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1$ έχει την εξής λύση

$$y(x) = b_0 \cos x + b_1 \sin x.$$

Η εξίσωση $y'' - y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1$ έχει την εξής λύση

$$y(x) = b_0 \cosh x + b_1 \sinh x.$$

Σημειώστε παρακαλώ το γεγονός ότι η χρήση των cosh και sinh μας επιτρέπει να λύσουμε ως προς τις αρχικές συνθήκες με πολύ πιο ξεκάθαρο τρόπο συγκριτικά με το αν χρησιμοποιούσαμε εκθετικές συναρτήσεις.

Ήδη θα παρατηρήσατε ότι κάθε ΣΔΕ δεύτερης τάξης συνδέεται με δύο αρχικές συνθήκες. Αυτό είναι αναμενόμενο μια και για να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση πρέπει ουσιαστικά να ολοκληρώσουμε δύο φορές με αποτέλεσμα να εμπλακούν δύο σταθερές ολοκλήρωσης τις τιμές των οποίων βεβαίως πρέπει κάποτε να προσδιορίσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει μόνον εάν έχουμε δύο επιπρόσθετες εξισώσεις τις οποίες μας προσφέρουν οι αρχικές συνθήκες.

Ερώτηση: Υποθέστε ότι οι y_1 και y_2 είναι δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2.2). Μπορεί κάθε άλλη λύση να δοθεί (χρησιμοποιώντας υπέρθεση) στην μορφή $y = C_1y_1 + C_2y_2$;

Η απάντηση είναι προφανώς ναι! Υποθέτοντας όμως ότι οι y_1 και y_2 είναι αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους με την εξής έννοια. Θα λέμε ότι οι y_1 και y_2 είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* εάν δεν είναι μια από αυτές πολλαπλάσια (με σταθερά) της άλλης. Εάν βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τότε κάθε άλλη λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

Στην περίπτωση αυτή η $y = C_1y_1 + C_2y_2$ λέγεται γενική λύση.

Για παράδειγμα, εύκολα βρίσκουμε ότι οι $y_1 = \sin x$ και $y_2 = \cos x$ είναι λύσεις της $y''+y = 0$. Είναι προφανές ότι οι sin και cos δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσια η μια της άλλης. Εάν $\sin x = A \cos x$ για κάποια σταθερά A, τότε θέτοντας $x = 0$ έχουμε $A = 0 = \sin x$, πράγμα άτοπο. Άρα οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς η

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

είναι η γενική λύση της $y'' + y = 0$.

2.1.1 Ασκήσεις

2.1.2 *Δείξτε ότι οι* $y = e^x$ *και* $y = e^{2x}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

2.1.3 *Μαντέψτε μια λύση της* $y'' + 5y = 10x + 5$.

2.1.4 *Αποδείξτε την αρχή της υπέρθεσης για μη-ομογενείς εξισώσεις. Έστω ότι η* y_1 *είναι μια λύση της* $Ly_1 = f(x)$ *και* y_2 *είναι μια λύση της* $Ly_2 = g(x)$ *(και οι δύο έχουν το ίδιο τελεστή* L*). Δείξτε ότι η* y *είναι λύση της* $Ly = f(x) + g(x)$.

2.1.5 *Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της* $x^2y'' - xy' = 0$ *και δώστε την γενική λύση της. Υπόδειξη: Θέστε* $y = x^r$.

Σημειώστε ότι οι εξισώσεις της μορφής $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ ονομάζονται *Εξισώσεις Euler* ή *Εξισώσεις Cauchy − Euler*. Για να τις λύσουμε χρησιμοποιούμαι την μαντεψιά $y = x^r$ την οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση και λύνουμε ως προς r (για ευκολία μας ας υποθέσουμε ότι $x \geq 0$).

2.1.6 *Υποθέστε ότι* $(b - a)^2 - 4ac > 0$. *a) Δώστε την γενική λύση της* $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. *Υπόδειξη: Θέστε* $y = x^r$ *και βρείτε την κατάλληλη τιμή του* r. *β) Τι συμβαίνει όταν* $(b - a)^2 - 4ac = 0$ *ή όταν* $(b - a)^2 - 4ac < 0$;

Θα επανέλθουμε αργότερα στην περίπτωση που $(b - a)^2 - 4ac < 0$.

2.1.7 *Έστω ότι* $(b - a)^2 - 4ac = 0$. *Δώστε την γενική λύση της* $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. *Υπόδειξη: Θέστε* $y = x^r \ln x$ *για να βρείτε την δεύτερη λύση*

Η διαδικασία εύρεσης μιας δεύτερης λύσης κάποιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης όταν ήδη γνωρίζεις μια λύση λέγεται *μέθοδος ελάττωσης της τάξης.*

2.1.8 *Έστω ότι η* y_1 *είναι λύση της εξίσωσης* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. *Δείξτε ότι και η*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1(x))^2}\,dx$$

είναι λύση.

Ας λύσουμε τώρα μερικές φημισμένες εξισώσεις.

2.1.9(εξίσωση *Chebychev* 1ης τάξης) *Έστω* $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$. *a) Δείξτε ότι η* $y = x$ *είναι λύση. β) Χρησιμοποιήστε την μέθοδο ελάττωσης της τάξης για να βρείτε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση. ς) Δώστε την γενική λύση.*

2.1.10(Εξίσωση *Hermite* 2ης τάξης) *Έστω* $y'' - 2xy' + 4y = 0$. *a) Δείξτε ότι η* $y = 1 - 2x^2$ *είναι λύση. β) Χρησιμοποιήστε την μέθοδο ελάττωσης της τάξης για να βρείτε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση. ς) Δώστε την γενική λύση.*

2.2 Γραμμικές ΣΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Θεωρήστε το πρόβλημα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια γραμμική και ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Με τον όρο *σταθεροί συντελεστές* εννοούμε ότι οι συναρτήσεις που πολλαπλασιάζονται με τους όρους y'', y', και y είναι σταθερές, δεν εξαρτιόνται δηλαδή από το x.

Μας βολεύει ιδιαίτερα (θα δούμε σε λίγο γιατί) να θεωρήσουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης σαν μια συνάρτηση ή οποία δεν αλλάζει ουσιαστικά εάν την παραγωγίσουμε με αποτέλεσμα να ελπίζουμε ότι ένας κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός της εν λόγω συνάρτησης και των παραγώγων της θα μας δώσει μηδέν.

Με αυτό το σκεπτικό είναι λογικό να εξετάσουμε σαν λύση την εξής συνάρτηση $y = e^{rx}$. Βεβαίως έχουμε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0 \qquad \text{(διαιρέστε και τα δύο μέλη με } e^{rx}\text{)}, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς για $r = 2$ ή για $r = 4$, η e^{rx} είναι μια λύση. Καταλήγουμε λοιπόν στις $y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

2.2.1 *Εξετάστε κατά πόσο η y_1 και η y_2 είναι λύσεις.*

Οι συναρτήσεις e^{2x} και e^{4x} είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν δεν ήταν θα μπορούσαμε να γράψουμε $e^{4x} = Ce^{2x}$, από το οποίο έχουμε ότι $e^{2x} = C$, πράγμα αδύνατον να συμβαίνει. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την γενική λύση στην εξής μορφή

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Πρέπει να λύσουμε ως προς C_1 και C_2. Για να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες πρώτα βρίσκουμε ότι $y' = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}$. Θέτουμε $x = 0$ και λύνουμε.

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = C_1 + C_2, \\ 6 &= y'(0) = 2C_1 + 4C_2. \end{aligned}$$

Από το παραπάνω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων εύκολα παίρνουνε ότι $3 = C_1 + 2C_2$, και $5 = C_2$ με αποτέλεσμα να καταλήξουμε ότι $C_1 = -7$. Η γενική λοιπόν λύση είναι η εξής

$$y = -7e^{2x} + 5e^{4x}.$$

Ας γενικεύσουμε την παραπάνω μεθοδολογία για γενικές περιπτώσεις. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.3}$$

όπου a, b, c είναι κάποιες σταθερές. Δοκιμάζοντας την μαντεψιά $y = e^{rx}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0, \\ ar^2 + br + c &= 0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση $ar^2 + br + c = 0$ ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της ΣΔΕ. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς r και χρησιμοποιώντας τον τύπο του τριωνύμου.

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Οπότε καταλήγουμε ότι οι e^{r_1x} και e^{r_2x} είναι λύσεις. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση που $r_1 = r_2$, αλλά αυτή είναι εύκολο να αντιμετωπισθεί..

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω ότι r_1 και r_2 είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.*

(i) Αν r_1 και r_2 είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους ($b^2 - 4ac > 0$), τότε η γενική λύση της (2.3) είναι η εξής

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}.$$

(ii) Αν $r_1 = r_2$ ($b^2 - 4ac = 0$), τότε η γενική λύση της (2.3) είναι η εξής

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{r_1x}.$$

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης θεωρώντας την εξίσωση $y'' - k^2y = 0$ της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής $r^2 - k^2 = 0$ δηλαδή $(r - k)(r + k) = 0$ και συνεπώς e^{-kx} και e^{kx} είναι οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Παράδειγμα 2.2.1: Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής $r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$ η οποία έχει διπλή ρίζα $r_1 = r_2 = 4$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{4x} = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}.$$

2.2.2 *Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;*

Η e^{4x} είναι προφανώς λύση. Για την $y = xe^{4x}$ έχουμε $y' = e^{4x}+4xe^{4x}$ και $y'' = 8e^{4x}+16xe^{4x}$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x} + 16xe^{4x} - 8(e^{4x} + 4xe^{4x}) + 16xe^{4x} = 0.$$

άρα είναι λύση και μάλιστα επειδή η $xe^{4x} = Ce^{4x}$ συνεπάγεται το άτοπο ότι $x = C$ οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι στην πράξη εξαιρετικά σπάνιο να έχουμε διπλή ρίζα. Για να καταλήξουμε σε διπλή ρίζα πρέπει ουσιαστικά να έχουμε επιλέξει εκ των προτέρων κατάλληλα του συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης.

Ας δώσουμε τέλος μια σύντομη 'απόδειξη' του γιατί μας βολεύει η λύση xe^{rx} όταν έχουμε διπλή ρίζα. Η εν λόγω περίπτωση λοιπόν είναι η οριακή κατάσταση στην οποία έχουμε δύο ρίζες ναι μεν διαφέρουν μεταξύ τους αλλά ελάχιστα. Παρατηρήστε ότι η $\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}$ είναι μια λύση όταν οι ρίζες είναι διαφορετικές. Όταν το r_1 τείνει στο r_2 η εν λόγω λύση τείνει στην παράγωγο της e^{rx} ως προς r δηλαδή στην xe^{rx}, και συνεπώς και αυτή είναι επίσης λύση στην περίπτωση διπλής ρίζας.

2.2.1 Μιγαδικοί αριθμοί και ο τύπος του *Euler*

Προφανώς οι ρίζες ενός πολυωνύμου μπορεί να είναι μιγαδικές. Για παράδειγμα η εξίσωση $r^2 + 1 = 0$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες και πραγματική.

Ας κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των μιγαδικών αριθμών . Ας θυμηθούμε ότι μιγαδικός αριθμός $a + ib$ είναι ένα ζευγάρι πραγματικών αριθμών, (a, b) όπου $i^2 = -1$. Βολεύει κάποιες φορές να θεωρούμε έναν μιγαδικό αριθμό σαν ένα σημείο του επιπέδου. Προσθέτουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς με τον προφανή τρόπο ενώ τους πολλαπλασιάζουμε ως εξής

$$(a, b) \times (c, d) \overset{\text{ορισμός}}{=} (ac - bd, ad + bc).$$

2.2.3 *Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε (και μπορείτε να δικαιολογήσετε) τις παρακάτω ταυτότητες:*

- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$,
- $\dfrac{1}{i} = -i$,
- $(3 - 7i)(-2 - 9i) = \cdots = -69 - 13i$,
- $(3 - 2i)(3 + 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 3^2 + 2^2 = 13$,
- $\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση e^{a+ib} ενός μιγαδικού αριθμού η οποία μπορεί να ορισθεί εύκολα εάν αντικαταστήσουμε στο ανάπτυγμα *Taylor*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

το x με $a + ib$ οπότε και εύκολα βλέπουμε ότι ιδιότητες όπως η $e^{x+y} = e^x e^y$ ισχύουν και για x και y μιγαδικούς. Η ιδιότητα αυτή μας οδηγεί στην εξής ιδιότητα $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ και συνεπώς εάν μπορέσουμε να υπολογίσουμε την e^{ib} μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και την e^{a+ib}. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό *τύπο του Euler*.

Θεώρημα 2.2.2 (Τύπος του *Euler*)**.**

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \textit{και} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.}$$

2.2.4 *Ελέγξτε τις παρακάτω ταυτότητες χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{και} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.2.5 *Ταυτότητες διπλάσιας γωνίας: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Euler και τα δύο μέρη της* $e^{i(2\theta)} = \left(e^{i\theta}\right)^2$ *για να συμπεράνετε ότι:*

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \textit{και} \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Χρειάζεται να ξεκαθαρίσουμε τον συμβολισμό μας και την ορολογία μας. Σε ένα μιγαδικό αριθμό $a + ib$ ο a ονομάζεται *πραγματικό μέρος* και ο b *φανταστικό μέρος* του αριθμού αυτού. Πολύ διαδεδομένος είναι ο εξής συμβολισμός

$$\mathrm{Re}(a + bi) = a \qquad \text{και} \qquad \mathrm{Im}(a + bi) = b.$$

2.2.2 Μιγαδικές ρίζες

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $ar^2 + br + c = 0$ της διαφορικής εξίσωσης $ay'' + by' + cy = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες. Δηλαδή έχουμε $b^2 - 4ac < 0$ και κατά συνέπεια οι ρίζες είναι οι εξής.

$$r_1, r_2 = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Όπως μπορούμε να δούμε, οι λύσεις θα είναι πάντα σε ζεύγη $\alpha \pm i\beta$. Και στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε την λύση με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Όμως η εκθετική συνάρτηση έχει μιγαδικά ορίσματα και θα χρειασθεί να επιλέξουμε κατάλληλους μιγαδικούς αριθμούς για τις σταθερές C_1 και C_2 έτσι ώστε η λύση να μην εμπλέκει μιγαδικούς (κάτι που προφανώς επιθυμούμε). Κάτι τέτοιο είναι μεν εφικτό αλλά ενδεχομένως να απαιτεί πολλές (και ίσως δύσκολες) πράξεις. Σε κάθε περίπτωση όμως, όπως θα δούμε, δεν είναι απαραίτητο.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του *Euler*. Πρώτα ας θέσουμε

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad \text{και} \qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Ας σημειώσουμε ότι

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_2 &= e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Δεν ξεχνάμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι και αυτός λύση. Συνεπώς οι

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_4 &= \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x, \end{aligned}$$

είναι επίσης λύσεις και μάλιστα με πραγματικό πεδίο ορισμού και τιμών. Δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αποδείξουμε ότι είναι και γραμμικά ανεξάρτητες (δεν είναι η μια πολλαπλάσιο της άλλης). Έτσι καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.3. *Εάν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της διαφορικής εξίσωσης*

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

είναι οι $\alpha \pm i\beta$, τότε η γενική της λύση είναι

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Παράδειγμα 2.2.2: Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $y'' + k^2 y = 0$, για κάποια σταθερά $k > 0$.

Η χαρακτηριστική της εξίσωσης είναι $r^2 + k^2 = 0$. Οι ρίζες της είναι $r = \pm ik$ και με βάση το παραπάνω θεώρημα η γενική λύση είναι

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

Παράδειγμα 2.2.3: Βρείτε την λύση του προβλήματος $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

Η χαρακτηριστική της διαφορικής εξίσωσης είναι $r^2 - 6r + 13 = 0$ οι ρίζες της οποίας είναι $r = 3 \pm 2i$. Με βάση το παραπάνω θεώρημα η γενική λύση είναι

$$y = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x.$$

Για να βρούμε την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος χρησιμοποιούμε την πρώτη αρχική συνθήκη για να πάρουμε

$$0 = y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1.$$

Άρα $C_1 = 0$ και συνεπώς $y = C_2 e^{3x} \sin 2x$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$y' = 3C_2 e^{3x} \sin 2x + 2C_2 e^{3x} \cos 2x.$$

Χρησιμοποιώντας την άλλη αρχική συνθήκη έχουμε $10 = y'(0) = 2C_2$, ή $C_2 = 5$. Άρα η λύση που ψάχνουμε είναι

$$y = 5e^{3x} \sin 2x.$$

2.2.3 Ασκήσεις

2.2.6 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $2y'' + 2y' - 4y = 0$.

2.2.7 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y'' + 9y' - 10y = 0$.

2.2.8 *Λύστε το πρόβλημα* $y'' - 8y' + 16y = 0$ *για* $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

2.2.9 *Λύστε το πρόβλημα* $y'' + 9y' = 0$ *για* $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

2.2.10 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $2y'' + 50y = 0$.

2.2.11 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y'' + 6y' + 13y = 0$.

2.2.12 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y'' = 0$ *χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παραγράφου αυτής.*

2.2.13 *Η μέθοδο της παραγράφου αυτής μπορεί να εφαρμοσθεί και σε εξισώσεις τάξης μεγαλύτερης του δύο. Θα ασχοληθούμε με τέτοιες εξισώσεις ανώτερης τάξης αργότερα. Προσπαθήστε όμως να λύσετε την εξής εξίσωση πρώτης τάξης* $2y' + 3y = 0$ *χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παραγράφου αυτής.*

2.2.14 *Ας επιστρέψουμε στην εξίσωση του Euler που συναντήσαμε στην άσκηση 2.1.6 στη σελίδα 48. Έστω ότι έχουμε* $(b-a)^2 - 4ac < 0$. *Βρείτε έναν τύπο για την γενική λύση της εξίσωσης* $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. *Υπόδειξη:* $x^r = e^{r \ln x}$.

2.3 Γραμμικές ομογενείς ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

Γενικά, οι πλειοψηφία των διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε εφαρμογές είναι δεύτερης τάξης. Εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης δεν εμφανίζονται συχνά και εν γένει έχει επικρατήσει η άποψη ότι ο φυσικός μας κόσμος είναι 'δεύτερης τάξησ'.

Η αντιμετώπιση ΣΔΕ μεγαλύτερης τάξης είναι παρόμοια με αυτήν των ΣΔΕ δεύτερης τάξης. Πρέπει όμως να διασαφηθεί η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας. Εξάλλου η εν λόγω έννοια χρησιμοποιείται σε πολλές άλλες περιοχές των Μαθηματικών και σε πολλά άλλα σημεία ακόμα και αυτών των σημειώσεων. Συνεπώς αξίζει να την κατανοήσουμε πλήρως.

Ας αρχίσουμε με την εξής γενική ομογενή γραμμική εξίσωση

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.3.1 (Υπέρθεση)**.** *Εάν y_1, y_2, …, y_n είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης* (2.4)*, τότε η*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

είναι επίσης λύση της (2.4) *για οποιεσδήποτε σταθερές C_1, …, C_n.*

Θεώρημα 2.3.2. *Εάν οι y_1, y_2, …, y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης* (2.4)*, τότε κάθε άλλη λύση της* (2.4) *μπορεί να γραφθεί σαν γραμμικός συνδυασμός τους.*

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για μη-ομογενείς γραμμικές εξισώσεις.

Θεώρημα 2.3.3 (Ύπαρξης και μοναδικότητας)**.** *Έστω ότι οι συναρτήσεις $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, και f είναι συνεχείς συναρτήσεις και οι $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ είναι σταθερές. Η εξίσωση*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),.$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ οι οποία ικανοποιεί τις παρακάτω αρχικές συνθήκες

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

2.3.1 Γραμμική ανεξαρτησία

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι δύο συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν η μία δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Όταν έχουμε n συναρτήσεις μπορούμε να δουλέψουμε παραπλήσια ως εξής. Οι συναρτήσεις y_1, y_2, …, y_n είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* αν η εξίσωση

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0,$$

έχει μόνον την τετριμμένη λύση $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Εάν μια από τις σταθερές της εξίσωσης (έστω, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, η πρώτη) είναι μη-μηδενική $c_1 \neq 0$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την y_1 σαν γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Εάν οι συναρτήσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε λέμε ότι είναι *γραμμικά εξαρτημένες*.

Παράδειγμα 2.3.1: Δείξτε ότι οι e^x, e^{2x}, e^{3x} είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας το κάνουμε με διάφορες μεθόδους. Τα περισσότερα διδακτικά βιβλία (συμπεριλαμβανομένων των [ΕΠ] και [Φ]) εισάγουν την *Wronskian*. Κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο στην περίπτωσή μας.

Θέτοντας $z = e^x$ στην εξίσωση

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

και χρησιμοποιώντας θεμελιώδεις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων έχουμε

$$c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 = 0.$$

Το αριστερό μέρος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού τρία ως προς z. Μπορεί είτε να είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν είτε να έχει το πολύ 3 ρίζες. Η παραπάνω εξίσωση προφανώς ισχύει για όλα τα z, άρα είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν, δηλαδή $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ και οι δοθείσες συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας δοκιμάσουμε έναν άλλο τρόπο ξεκινώντας από την σχέση

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

η οποία βεβαίως ισχύει για κάθε x. Ας διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με e^{3x} έχουμε την σχέση

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 = 0.$$

η οποία επίσης ισχύει για κάθε x, άρα, μπορούμε να πάρουμε το όριο όταν $x \to \infty$ και να καταλήξουμε ότι $c_3 = 0$. οπότε η εξίσωσή μας παίρνει την εξής μορφή

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0.$$

Απλά μένει να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία δύο ακόμα φορές για να δούμε ότι $c_2 = 0$ και $c_1 = 0$.

Ας δοκιμάσουμε έναν τρίτο τρόπο ξεκινώντας από την σχέση

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

Μπορούμε κατασκευάσουμε όσες εξισώσεις, με αγνώστους τα c_1, c_2 και c_3, επιθυμούμε τις οποίες κατόπιν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τους εν λόγω αγνώστους. Κάτι τέτοιο βέβαια απαιτεί αρκετές πράξεις. Μπορούμε επίσης πρώτα να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη και μετά να παράγουμε με τον παραπάνω τρόπο και άλλες εξισώσεις. Για να απλοποιήσουμε την διαδικασία ας διαιρέσουμε με e^x.

$$c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} = 0.$$

Θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε την εξίσωση $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη έχουμε

$$c_2 e^x + 2c_3 e^{2x} = 0,$$

και θέτοντας $x = 0$ έχουμε ότι $c_2 + 2c_3 = 0$. Τέλος διαιρούμε ξανά με e^x και παραγωγίζουμε για να πάρουμε $4c_3 e^{2x} = 0$. Οπότε έχουμε $c_3 = 0$. Άρα και $c_2 = 0$ μια και $c_2 = -2c_3$ και $c_1 = 0$ επειδή $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

Παράδειγμα 2.3.2: Οι συναρτήσεις e^x, e^{-x}, και $\cosh x$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Απλά εφαρμόστε τον ορισμό του υπερβολικού συνημιτόνου:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2.3.2 ΣΔΕ υψηλότερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η αντιμετώπιση ομογενών γραμμικών εξισώσεων ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι σε μεγάλο βαθμό παρόμοια με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω. Απλώς πρέπει να βρούμε περισσότερες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Εάν λοιπόν η εξίσωση είναι $n^{\tau\eta}$ τάξης χρειάζεται να βρούμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Ας ξεκαθαρίσουμε τα πράγματα με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.3: Υπολογίστε την γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0. \tag{2.5}$$

Αντικαθιστώντας την μαντεψιά $y = e^{rx}$ έχουμε

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - r e^{rx} + 3e^{rx} = 0.$$

Διαιρούμε με e^{rx} και παίρνουμε.

$$r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0.$$

Δεν είναι τετριμμένη υπόθεση να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου. Υπάρχουν τύποι για τις ρίζες ενός πολυωνύμου βαθμού 3 και 4 αν και είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού δεν υπάρχουν τύποι. Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν οι ρίζες. Είναι γνωστό ότι ένα πολυώνυμο $n^{\sigma\tau o\upsilon}$ βαθμού έχει n ρίζες. Μερικές από αυτές μπορεί να είναι όπως μπορεί μερικές από αυτές τις ρίζες να είναι μιγαδικές. Φυσικά υπάρχουν πολλά και εξαιρετικά λογισμικά συστήματα τα οποία μπορούν να υπολογίσουν προσεγγίσεις των ριζών ενός πολυωνύμου κάποιου λογικού βαθμού. Επιπρόσθετα, υπάρχουν και μαθηματικά αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών τα οποία μας δίνουν την δυνατότητα να υπολογίσουμε ακριβώς τις ρίζες. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο σταθερός όρος κάθε πολυωνύμου ισούται με το γινόμενο όλων των ριζών του. Για παράδειγμα έστω $r^3 - 3r^2 - r + 3 = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)$ οπότε και έχουμε*

$$3 = (-r_1)(-r_2)(-r_3) = (1)(-1)(-r_3) = r_3.$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η $r_3 = 3$ είναι μια ρίζα. Συνεπώς γνωρίζουμε ότι οι e^{-x}, e^x και e^{3x} είναι λύσεις της (2.5). Επίσης εύκολα μπορούμε να δούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και είναι τρεις, δηλαδή ακριβώς όσες χρειαζόμαστε. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}.$$

Για να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, και $y''(0) = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 + C_2 + C_3, \\ 2 &= y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3, \\ 3 &= y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3. \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω αλγεβρικού γραμμικού συστήματος είναι $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1$ και $C_3 = 1/4$ και συνεπώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι η

$$y = \frac{-1}{4}\, e^{-x} + e^x + \frac{1}{4}\, e^{3x}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλες οι ρίζες είναι πραγματικές αλλά με κάποια πολλαπλότητα (δηλαδή μερικές λύσεις επαναλαμβάνονται). Ας περιοριστούμε στην περίπτωση που έχουμε μια ρίζα r με πολλαπλότητα k. Στην περίπτωση αυτή, και στο πνεύμα της μεθοδολογίας που αναπτύξαμε για την ανάλογη περίπτωση για τις εξισώσεις δεύτερης τάξης, αναγνωρίζουμε τις λύσεις

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots, x^{k-1} e^{rx}$$

και η γενική λύση προκύπτει σαν ένας γραμμικός τους συνδυασμός.

Παράδειγμα 2.3.4: Λύστε την εξίσωση

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0.$$

Σημειώστε ότι $r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = r(r-1)^3$. Άρα οι ρίζες, με πολλαπλότητα, είναι οι $r = 0, 1, 1, 1$ οπότε προκύπτει η παρακάτω γενική λύση

$$y = \underbrace{(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\, e^x}_{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0}.$$

*Στο μάθημα του Επιστημονικού Υπολογισμού θα αναπτύξετε και θα αναλύσετε διάφορες αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό προσεγγίσεων των ριζών ακόμα και στην γενική περίπτωση πολυωνύμων οποιουδήποτε βαθμού.

Εντελώς παρόμοια με την περίπτωση της δεύτερης τάξης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ενδεχόμενο να προκύψουν μιγαδικές ρίζες. Οι μιγαδικές ρίζες όπως γνωρίζουμε έρχονται σε ζεύγη $r = \alpha \pm i\beta$. Οι αντίστοιχες λύσεις είναι οι

$$(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^k)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + (d_0 + d_1 x + \cdots + d_{k-1} x^k)\, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

όπου $c_0, \ldots, c_{k-1}, d_0, \ldots, d_{k-1}$ είναι τυχαίες σταθερές.

Παράδειγμα 2.3.5: Λύστε την εξίσωση

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 &= 0, \\ (r^2 - 2r + 2)^2 &= 0, \\ \big((r-1)^2 + 1\big)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα οι ρίζες είναι οι $1 \pm i$ με πολλαπλότητα 2. Συνεπώς η γενική λύση είναι η εξής

$$y = (c_0 + c_1 x)\, e^x \cos x + (d_0 + d_1 x)\, e^x \sin x.$$

Ο τρόπος που λύσαμε την χαρακτηριστική εξίσωση είναι μαντεύοντας ουσιαστικά την λύση και δοκιμάζοντας τις μαντεψιές μας. Κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα εύκολο. Ας μην ξεχνάμε βέβαια ότι μπορούμε να προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιο από τα υπάρχοντα λογισμικά συστήματα εύρεσης ριζών πολυωνύμων.

2.3.3 Ασκήσεις

2.3.1 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y''' - y'' + y' - y = 0$.

2.3.2 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' = 0$.

2.3.3 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης* $y''' + 2y'' + 2y' = 0$.

2.3.4 *Υποθέστε ότι η* $(r-1)^2(r-2)^2 = 0$ *είναι η χαρακτηριστική εξίσωση μιας διαφορικής εξίσωσης. a) Βρείτε μια τέτοια διαφορική εξίσωση. b) Βρείτε την γενική λύση της.*

2.3.5 *Υποθέστε ότι μια εξίσωση τέταρτης τάξης έχει την παρακάτω λύση* $y = 2e^{4x} x \cos x$. *a) Βρείτε μια τέτοια διαφορική εξίσωση. b) Βρείτε τις αρχικές συνθήκες τις οποίες ικανοποιεί η δοθείσα λύση.*

2.3.6 *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης της άσκησης 2.3.5.*

2.3.7 *Έστω ότι* $f(x) = e^x - \cos x$, $g(x) = e^x + \cos x$, *και* $h(x) = \cos x$. *Είναι οι* $f(x)$, $g(x)$, *και* $h(x)$ *γραμμικά ανεξάρτητες; Εάν ναι, αποδείξτε το, εάν όχι, βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό που μας βολεύει.*

2.3.8 *Έστω ότι* $f(x) = 0$, $g(x) = \cos x$, *και* $h(x) = \sin x$. *Είναι οι* $f(x)$, $g(x)$, *και* $h(x)$ *γραμμικά ανεξάρτητες; Εάν ναι, αποδείξτε το, εάν όχι, βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό που μας βολεύει.*

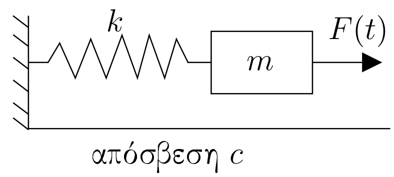
2.3.9 *Είναι οι* x, x^2, *και* x^4 *γραμμικά ανεξάρτητες; Εάν ναι, αποδείξτε το, εάν όχι, βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό που μας βολεύει.*

2.3.10 *Είναι οι* e^x, xe^x, *και* x^2e^x *γραμμικά ανεξάρτητες; Εάν ναι, αποδείξτε το, εάν όχι, βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό που μας βολεύει.*

2.4 Ταλαντώσεις

Ας ρίξουμε μια ματιά σε κάποιες εφαρμογές των γραμμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

2.4.1 Μερικά Παραδείγματα



Το πρώτο μας παράδειγμα είναι ένα σύστημα μάζας ελατηρίου. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σωματίδιο μάζας $m > 0$ (ας υποθέσουμε σε κιλά) το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου (ή αλλιώς σταθερά του Χουκ) $k > 0$ (ας υποθέσουμε σε *Newtons* ανά μέτρο) η άλλη άκρη του οποίου είναι συνδεδεμένη σε έναν τοίχο. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι εφαρμόζουμε στο σωματίδιο μια εξωτερική δύναμη $F(t)$. Τέλος υποθέτουμε ότι το σύστημα υπόκειται σε απόσβεση η οποία καθορίζεται από μια σταθερά $c \geq 0$.

Έστω x η μετατόπιση του σωματιδίου υποθέτοντας ότι την $x = 0$ είναι η θέση ισορροπίας και η x αυξάνει όσο μετακινείτε το σωματίδιο προς τα δεξιά (απομακρυνόμενο από τον τοίχο). Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σωματίδιο είναι σύμφωνα με τον νόμο του Χουκ ανάλογη της μετατόπισης. Είναι δηλαδή ίση με kx στην αντίθετη κατεύθυνση. Παρόμοια, η δύναμη που οφείλεται στην απόσβεση είναι ανάλογη με την ταχύτητα του σωματιδίου. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η συνολική δύναμη ισούται με μάζα επί επιτάχυνση. Δηλαδή έχουμε την εξής

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Ας καθορίσουμε την ορολογία που αφορά την εξίσωση αυτή. Λέμε ότι μια κίνηση είναι

(i) *εξαναγκασμένη*, αν $F \not\equiv 0$ (F δεν είναι ταυτοτικά μηδέν),

(ii) *μη-εξαναγκασμένη* ή *ελεύθερη*, αν $F \equiv 0$,

(iii) *με απόσβεση*, αν $c > 0$, και

(iv) *χωρίς απόσβεση*, αν $c = 0$.

Παρ' όλη την απλότητά του, το παραπάνω σύστημα εμφανίζεται στον πυρήνα πολλών και σημαντικών πραγματικών εφαρμογών. Πολλές άλλες εφαρμογές μπορούν αν μελετηθούν σαν απλοποιήσεις ενός συστήματος μάζας ελατηρίου†.

Ας δούμε δύο παραδείγματα.

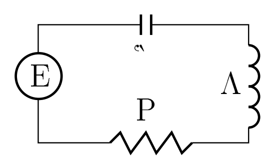
Ορίστε ένα παράδειγμα ηλεκτρολογίας. Θεωρήστε το κύκλωμα *RLC* που φαίνεται στην παράπλευρη εικόνα. Υπάρχει μια αντίσταση R *ohms*, ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L *henries*, και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C *farads*. Υπάρχει επίσης και μια ηλεκτρική πηγή (π.χ. μια μπαταρία) που μας δίνει ηλεκτρική τάση $E(t)$ *volts* την χρονική στιγμή t (ας

†Περισσότερες πληροφορίες στην εξής σελίδα *http : //el.wikipedia.org/wiki/*

υποθέσουμε δευτερόλεπτα). Ας υποθέσουμε τέλος ότι $Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή σε *columbs* και ότι $I(t)$ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Είναι γνωστό ότι η σχέση των δύο αυτών ποσοτήτων είναι η εξής $Q' = I$. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας θεμελιώδεις νόμους καταλήγουμε στην εξίσωση $LI' + RI + Q/C = E$. Παραγωγίζοντας την έχουμε

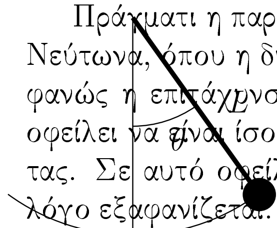
$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t).$$

Αυτή είναι μια μη-ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Επιπρόσθετα, μια και τα L, R, και C είναι όλα θετικά, το σύστημα αυτό συμπεριφέρεται ακριβώς σαν ένα σύστημα μάζας ελατηρίου. Η θέση του σωματιδίου αντικαταστάθηκε με το ρεύμα, η μάζα με την αυτεπαγωγή, η απόσβεση με την αντίσταση και η σταθερά του ελατηρίου με την σταθερά χωρητικότητας. Η διαφορά τάσης αποτελεί την εξωτερική δύναμη. Άρα για σταθερή τάση έχουμε ελεύθερη κίνηση.



Το επόμενο παράδειγμά μας συμπεριφέρεται προσεγγιστικά μόνον σαν ένα σύστημα μάζας ελατηρίου. Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια μάζα m στην άκρη ενός εκκρεμούς μήκους L. Θέλουμε να βρούμε μια εξίσωση για την γωνία $\theta(t)$. Έστω g η δύναμη της βαρύτητας. Απλά στοιχεία φυσικής μας δίνουν την εξής εξίσωση

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

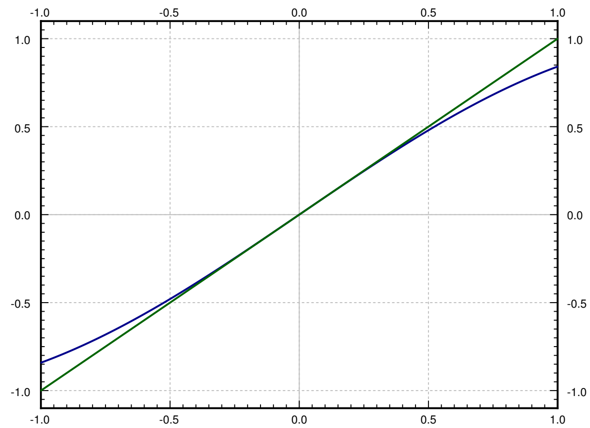


Πράγματι η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, όπου η δύναμη ισούται με την μάζα επί την επιτάχυνση. Προφανώς η επιτάχυνση είναι $L\theta''$ και η μάζα είναι m. Το γινόμενο τους οφείλει να είναι ίσο με εφαπτόμενη συνιστώσα της δύναμης της βαρύτητας. Σε αυτό οφείλεται ο όρος $mg\sin\theta$. Το m για κάποιον παράξενο λόγο εξαφανίζεται. Ας προχωρήσουμε τώρα στην εξής προσέγγιση. Για μικρές σε απόλυτη τιμή γωνίες θ έχουμε ότι $\sin\theta \approx \theta$. Αυτό γίνεται άμεσα αποδεκτό από το σχήμα 2.1 στην επόμενη σελίδα όπου μπορούμε να δούμε ότι για περίπου $-0.5 < \theta < 0.5$ (σε *radians*) οι γραφικές παραστάσεις των $\sin\theta$ και θ ουσιαστικά ταυτίζονται.

Συνεπώς όταν οι αιωρήσεις είναι μικρές, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι γωνίες θ είναι πάντα μικρές και να μοντελοποιήσουμε την συμπεριφορά του εκκρεμούς με την εξής απλούστερη γραμμική εξίσωση

$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Σημειώστε ότι λόγω της παραπάνω απλούστευσης τα σφάλματα που ενδεχομένως να προκύψουν είναι δυνατόν να μεγεθύνονται συνεχώς όσο παρέρχεται ο χρόνος της αιώρησης με αποτέλεσμα το μοντέλο να μας δώσει μια ουσιαστικά διαφορετική συμπεριφορά από την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος. Όπως θα δούμε, το μοντέλο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο της περιόδου κάτι που βεβαίως δεν ισχύει στην πράξη



Σχήμα 2.1: Οι γραφικές παραστάσεις των $\sin\theta$ και θ (σε $radians$).

σε ένα εκκρεμές. Παρόλα αυτά, για αρκετά μικρές χρονικές περιόδους και μικρές αιωρήσεις (π.χ. για εκκρεμή μεγάλου μήκους) το παραπάνω μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά το φυσικό φαινόμενο. Όταν αντιμετωπίζουμε ρεαλιστικά προβλήματα, πολύ συχνά αναγκαζόμαστε να κάνουμε τέτοιου είδους παραδοχές και απλοποιήσεις. Για να διαπιστώσουμε οι απλοποιήσεις μας αυτές αποδεκτές, στο πλαίσιο βεβαίως της εκάστοτε μελέτης μας, είναι προφανώς απαραίτητο να κατανοούμε το φυσικό πρόβλημα τόσο από την μεριά της φυσικής όσο και από την μεριά των μαθηματικών.

2.4.2 Ελεύθερη κίνηση χωρίς απόσβεση

Επειδή δεν μπορούμε ακόμη να λύσουμε μη-ομογενείς εξισώσεις στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ελεύθερη (μη-εξαναγκασμένη) κίνηση. Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση, δηλαδή όταν $c = 0$, οπότε και έχουμε

$$mx'' + kx = 0.$$

Εάν διαιρέσουμε με m και υποθέσουμε ότι ω_0 είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\omega_0^2 = {}^{k}\!/\!{}_{m}$ τότε η εξίσωσή μας παίρνει την μορφή

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Όπως ξέρουμε η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Παρατηρήστε κατ΄ αρχήν ότι, χρησιμοποιώντας γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα, έχουμε την εξής σχέση με τις άλλες δύο σταθερές C και γ

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \gamma).$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ και $\tan\gamma = B/A$. συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την γενική λύση ως εξής $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$, όπου C και γ τυχαίες σταθερές.

2.4.1 *Δικαιολογήστε την ταυτότητα και επιβεβαιώστε τις εξισώσεις για τα C και γ.*

Καθόσον είναι γενικά ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μορφή της λύσης για να βρούμε τις τιμές των σταθερών A και B που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες η δεύτερη μορφή είναι στενότερα συνδεδεμένη με το πραγματικό πρόβλημα. Οι σταθερές C και γ έχουν πολλή όμορφη διερμηνεία. Εάν παρατηρήσουμε την λύση στην εξής μορφή

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$$

βλέπουμε ότι το *πλάτος* της ταλάντωσης είναι C, ω_0 είναι η (γωνιακή) συχνότητα, και γ είναι μια ποσότητα γνωστή σαν *μετατόπιση φάσης*. Μετατοπίζει το γράφημα της συνάρτησης προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά. Η ποσότητα ω_0 ονομάζεται *φυσική (γωνιακή) συχνότητα*. Η κίνηση που μόλις περιγράψαμε είναι γνωστή σαν *απλή αρμονική κίνηση*.

Ας κάνουμε μια παρατήρηση που αφορά την λέξη ¨γωνιακή' του όρου . Η ω_0 δίδεται σε *radians* ανά μονάδα χρόνου, και όχι σε κύκλους ανά μονάδα χρόνου όπως συνήθως μετράμε την συχνότητα. Επειδή όμως όπως γνωρίζουμε ότι η περιφέρεια ενός κύκλου είναι 2π, η συνήθης συχνότητα δίδεται από την σχέση $\frac{\omega_0}{2\pi}$. Είναι δηλαδή απλώς θέμα το που θα τοποθετηθεί η σταθερά 2π, κάτι το οποίο αποτελεί ελεύθερη επιλογή του καθενός.

Η *περίοδος* μιας κίνησης ισούται με το αντίστροφο της συχνότητας (σε κύκλους ανά μονάδα χρόνου) και συνεπώς έχουμε $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Είναι δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια πλήρης ταλάντωση.

Παράδειγμα 2.4.1: Έστω ότι $m = 2\,\mathrm{kg}$ και $k = 8\,\mathrm{N/m}$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σε ένα όχημα το οποίο κινείται με ταχύτητα $1\,m/s$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Το σωματίδιο το οποίο μέχρι τότε ήταν σε θέση 0.5 μέτρα μακριά από την θέση ισορροπίας (εκτείνοντας το ελατήριο) αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποια είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της εν λόγω ταλάντωσης;

Έτσι καταλήγουμε στο εξής πρόβλημα

$$2x'' + 8x = 0, \qquad x(0) = 0.5, \qquad x'(0) = 1.$$

Μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε το $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2$. Δηλαδή η γωνιακή συχνότητα είναι 2. Η συχνότητα (περιστροφές ανά δευτερόλεπτο) είναι $\frac{2}{2\pi} = 1/\pi \approx 0.318\ Hertz$.

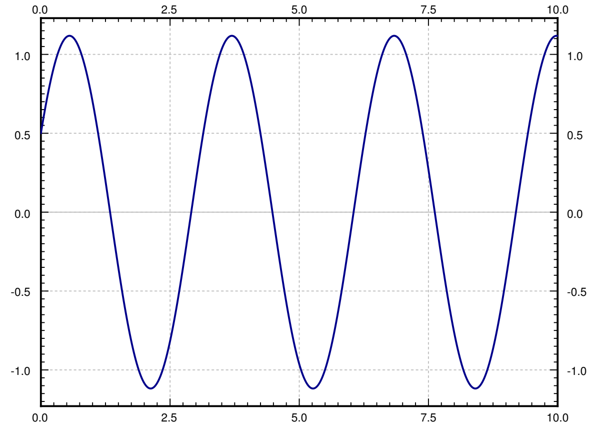
Η γενική λύση είναι

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

Θέτοντας $x(0) = 0.5$ σημαίνει $A = 0.5$. Τότε $x'(t) = -0.5\sin 2t + B\cos 2t$. Θέτοντας $x'(0) = 1$ έχουμε $B = 1$. Συνεπώς, το πλάτος της ταλάντωσης είναι $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1.25} \approx 1.118$. Η λύση είναι

$$x(t) = 0.5\cos 2t + \sin 2t.$$

Η γραφική παράσταση της λύσης $x(t)$ δίνεται στο Σχήμα 2.2 στην παρούσα σελίδα.



Σχήμα 2.2: Απλή ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Για την ελεύθερη κίνηση χωρίς απόσβεση, η λύση της μορφής

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $x(0) = A$ και $x'(0) = \omega_0 B$.

Είναι φανερό ότι η παραπάνω μορφή είναι πολύ βολικότερη εάν θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές των A και B, σε σύγκριση με το εάν θέλαμε να υπολογίσουμε το πλάτος και την μετατόπιση της φάσης.

2.4.3 Ελεύθερη κίνηση

Ας εστιάσουμε τώρα στην εξαναγκασμένη κίνηση και ας ξαναγράψουμε την εξίσωση ως εξής

$$mx'' + cx' + kx = 0,$$

ή

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0,$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad p = \frac{c}{2m}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0.$$

Οι ρίζες είναι

$$r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

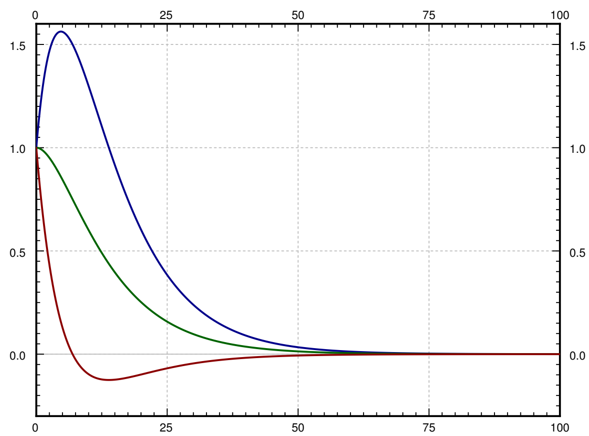
Η μορφή της λύσης της διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από το εάν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές. Πραγματικές ρίζες έχουμε μόνον όταν ο παρακάτω αριθμός είναι μη-αρνητικός.

$$p^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}.$$

Το πρόσημο του $p^2 - \omega_0^2$ είναι το ίδιο με το πρόσημα $c^2 - 4km$. Συνεπώς έχουμε πραγματικές ρίζες αν η $c^2 - 4km$ είναι μη-αρνητική.

Ισχυρά φθίνουσα ταλάντωση

Όταν $c^2 - 4km > 0$, λέμε ότι το σύστημα είναι *ισχυρά φθίνων*. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες, r_1 και r_2. Σημειώστε ότι και οι δύο είναι αρνητικές, μια και η $\sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ είναι πάντα μικρότερη από το p οπότε η ποσότητα $-p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ είναι πάντα αρνητική.



Σχήμα 2.3: Ισχυρά φθίνουσα κίνηση για διάφορες αρχικές τιμές.

Άρα η λύση είναι

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Αφού οι r_1, r_2 είναι αρνητικές, $x(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο θα τείνει να ακινητοποιηθεί όσο περνάει ο χρόνος. Το Σχήμα 2.3 περιέχει μερικές γραφικές παραστάσεις λύσεων για διαφορετικές αρχικές τιμές.

Παρατηρήστε ότι ουσιαστικά δεν έχουμε ταλάντωση. Μάλιστα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της λύσης τέμνει τον x άξονα μόνον μια φορά γεγονός το οποίο μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ως εξής. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την $0 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Άρα $C_1 e^{r_1 t} = -C_2 e^{r_2 t}$, και συνεπώς

$$\frac{-C_1}{C_2} = e^{(r_2 - r_1)t}.$$

Υπάρχει λοιπόν μια το πολύ λύση για $t \geq 0$.

Παράδειγμα 2.4.2: Υποθέστε ότι αφήνουμε το σωματίδιο από την θέση ισορροπίας. Δηλαδή έχουμε $x(0) = x_0$ και $x'(0) = 0$. Τότε έχουμε

$$x(t) = \frac{x_0}{r_1 - r_2}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right).$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η παραπάνω λύση ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Κρίσιμα φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km = 0$, λέμε ότι το σύστημα είναι *κρίσιμα φθίνονκρίσιμα φθίνον σύστημα*. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια ρίζα, την $-p$ πολλαπλότητας 2. Άρα η λύση μας είναι

$$x(t) = C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}.$$

Η συμπεριφορά ενός κρίσιμα φθίνοντος συστήματος είναι πολύ παρόμοια με αυτή ενός ισχυρά φθίνοντος συστήματος. Μάλιστα στην ουσία ένα κρίσιμα φθίνον σύστημα είναι με κάποια έννοια το όριο ενός ισχυρά φθίνοντος συστήματος. Επειδή οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν προσεγγίσεις πραγματικών συστημάτων, είναι εξαιρετικά σπάνιο να συναντήσουμε στην πράξη μια κρίσιμα φθίνουσα κίνηση. Είναι λογικό μια κίνηση να είναι είτε λίγο ισχυρά φθίνουσα είτε λίγο ασθενώς φθίνουσα. Ας μην προχωρήσουμε λοιπόν σε λεπτομέρειες που αφορούν κρίσιμα φθίνουσες κινήσεις.

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

Όταν $c^2 - 4km < 0$, λέμε ότι έχουμε ένα *ασθενώς φθίνον σύστημα*. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μιγαδικές ρίζες

$$\begin{aligned} r &= -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ &= -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} \\ &= -p \pm i\omega_1, \end{aligned}$$

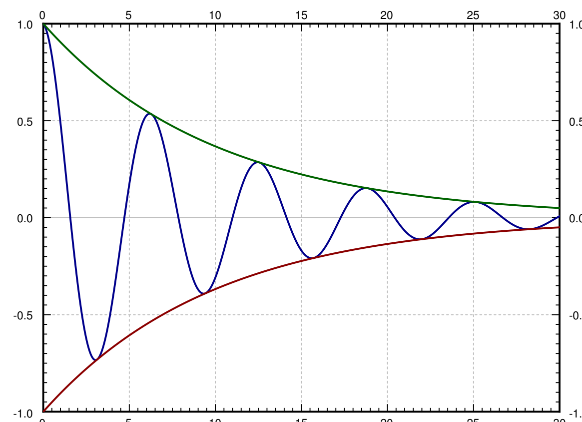
όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$. Η λύση μας είναι

$$x(t) = e^{-pt}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right),$$

ή

$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma).$$

Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας λύσης δίνεται στο Σχήμα 2.4. Σημειώστε και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $x(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$.



Σχήμα 2.4: Ασθενώς φθίνουσα κίνηση και οι περικλείουσες καμπύλες της.

Το εν λόγω σχήμα περιλαμβάνει και τις περικλείουσες καμπύλες Ce^{-pt} και $-Ce^{-pt}$. Η λύση ταλαντώνεται μεταξύ των δύο αυτών καμπύλων. Οι περικλείουσες καμπύλες δίνουν το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε χρονική στιγμή. Η μετατόπιση φάσης γ απλά μετατοπίζει το γράφημα είτε προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αλλά πάντα μέσα στο χώρο που καθορίζουν οι περικλείουσες καμπύλες (οι οποίες βεβαίως δεν μεταβάλλονται εάν μεταβληθεί το γ).

Σημειώστε τέλος ότι η γωνιακή ψευδο-συχνότητα (δεν καλούμε απλώς συχνότητα επειδή η λύση δεν είναι στην ουσία περιοδική συνάρτηση) ω_1 ελαττώνεται όσο ο συντελεστής c (και συνεπώς και ο p) αυξάνει. Κάτι τέτοιο είναι λογικό μια και εάν συνεχίσουμε να μεταβάλουμε το c σε κάποιο σημείο η λύση μας θα αρχίσει να μοιάζει σαν την λύση που αντιστοιχεί στην ισχυρά φθίνουσα ή την κρίσιμα φθίνουσα περίπτωση η οποία βεβαίως δεν ταλαντώνεται καθόλου.

Από την άλλη μεριά όσο ελαττώνουμε το c το ω_1 τείνει στο ω_0 (παραμένοντας πάντα μικρότερο) και η λύση όλο και περισσότερα μοιάζει με την συνήθη περιοδική κίνηση χωρίς απόσβεση. Στην περίπτωση αυτή, όσο το p τείνει στο 0, οι περικλείουσες καμπύλες τείνουν να εκφυλιστούν σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα του x .

Λεπτομέρειες σχετικά με την οπτική θεώρηση της φυσικής στο παραπάνω θέμα αλλά και για πολλά από αυτά που θα ακολουθήσουν στο παρόν κεφάλαιο μπορεί κανείς να βρει στις σημειώσεις του μαθήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών[‡].

2.4.4 Ασκήσεις

2.4.2 *Θεωρήστε ένα σύστημα μάζας ελατηρίου με μάζα $m = 2$, σταθερά ελατηρίου $k = 3$, και σταθερά απόσβεσης $c = 1$. α) Διατυπώστε την διαφορική εξίσωση που αναλογεί στο παραπάνω σύστημα και βρείτε την λύση του. β) Είναι το εν λόγω σύστημα ασθενώς, κρίσιμα ή οριακά φθίνον; ς) Εάν το σύστημα είναι κρίσιμα φθίνον, βρείτε μια τιμή του c η οποία το κάνει κρίσιμα φθίνον.*

2.4.3 *Λύστε την Άσκηση 2.4.2 για $m = 3$, $k = 12$, και $c = 12$.*

2.4.4 *Ας υποθέσουμε ότι αγνοούμε την απόσβεση και ότι χρησιμοποιούμε τις διεθνείς μονάδες μέτρησης (μέτρα-κιλά-δευτερόλεπτα) Έστω ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ελατήριο με σταθερά $4\,{}^{N}\!/\!_{\mu}$ για να ζυγίζουμε αντικείμενα. Έστω επίσης ότι τοποθετούμε ένα σωματίδιο στο ελατήριο και το αφήνουμε να ταλαντωθεί. α) Εάν διαπιστώσουμε μετρώντας την συχνότητα ταλάντωσης και διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι $0.8\,Hz$ (κύκλοι το δευτερόλεπτο) τι μάζα έχει το σωματίδιο; β) Βρείτε έναν τύπο για την μάζα του σωματιδίου m ως προς την συχνότητα ω σε Hz.*

2.4.5 *Έστω ότι προσθέτουμε το ενδεχόμενο ύπαρξης απόσβεσης στο σύστημα της Άσκησης 2.4.4. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου, έχουμε όμως δύο σωματίδια αναφοράς βάρους 1 και 2 κιλών με τα οποία θα διαμετρήσουμε το σύστημα ως εξής. Τοποθετούμε το καθένα από αυτά στο σύστημα και μετράμε την συχνότητα ταλάντωσης. Έστω ότι για το σωματίδιο του 1 κιλού η συχνότητα ήταν $0.8\ Hz$, ενώ για το 2 κιλών ήταν $0.39\ Hz$. α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς ελατηρίου k και της σταθεράς απόσβεσης c. α) Εάν διαπιστώσουμε μετρώντας την συχνότητα ταλάντωσης και διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι $0.2\,Hz$ (κύκλοι το δευτερόλεπτο) τι μάζα έχει το σωματίδιο; β) Βρείτε έναν τύπο για την μάζα του σωματιδίου m ως προς την συχνότητα ω σε Hz.*

[‡] `http://web.cc.uoa.gr/~ctrikali/aplets_web/fysiki_i/pendulum/lroom.htm`

2.5 Μη-ομογενείς εξισώσεις

2.5.1 Γενική μέθοδος επίλυσης μη-ομογενών εξισώσεων

Μπορούμε λοιπόν πως να λύσουμε (η τουλάχιστον να προσπαθήσουμε να λύσουμε) γραμμικές ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Ας απαλλαγούμε τώρα από τον περιορισμό του να είναι η εξίσωση ομογενής. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι στο σύστημά το οποίο προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε δρα μια εξωτερική δύναμη. Μια τέτοια, μη-ομογενής εξίσωση είναι η εξής

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1. \tag{2.6}$$

Σημειώστε ότι η εξίσωση παραμένει με σταθερούς συντελεστές. Δηλαδή οι συντελεστές των y'', y', και y παραμένουν σταθερές.

Γενικά θα γράφουμε την εξίσωση στην μορφή $Ly = 2x + 1$ όταν η συγκεκριμένη μορφή του διαφορικού τελεστή L δεν επηρεάζει τον συλλογισμό και τις ενέργειές μας. Ο τρόπος με τον οποίο θα λύσουμε την (2.6) είναι ο εξής. Βρίσκουμε την γενική λύση y_c της *αναλογούσης ομογενούς εξίσωσης*

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{2.7}$$

Επίσης βρίσκουμε, με κάποιον τρόπο, μια συγκεκριμένη λύση y_p της (2.6) οπότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η

$$y = y_c + y_p$$

είναι η γενική λύση της εξίσωσης (2.6). Η y_c συχνά ονομάζεται *συμπληρωματική λύση*.

Σημειώστε ότι η y_p μπορεί να είναι οποιαδήποτε λύση. Έστω ότι βρήκατε μια διαφορετική λύση $\tilde{y}_p$. Ας ορίσουμε την συνάρτηση της διαφοράς τους $w = y_p - \tilde{y}_p$ και ας αντικαταστήσουμε την w και στα δύο μέρη της εξίσωσης για να πάρουμε

$$w'' + 5w' + 6w = (y_p'' + 5y_p' + 6y_p) - (\tilde{y}_p'' + 5\tilde{y}_p' + 6\tilde{y}_p) = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

Η παραπάνω διαδικασία γίνεται απλούστερη εάν χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό τελεστών. Σημειώστε ότι L είναι ένας *γραμμικός τελεστής* οπότε έχουμε

$$Lw = L(y_p - \tilde{y}_p) = Ly_p - L\tilde{y}_p = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

Άρα η $w = y_p - \tilde{y}_p$ είναι μια λύση της (2.7) και συνεπώς οι οποιεσδήποτε δύο λύσεις της (2.6) διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια λύση της ομογενούς εξίσωσης (2.7). Επειδή η y_c είναι η γενική της ομογενούς εξίσωσης, η λύση $y = y_c + y_p$ συμπεριλαμβάνει *όλες* τις λύσεις της (2.6).

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο εξής σημαντικό συμπέρασμα. Εάν βρείτε μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση με κάποιο τρόπο και μια οποιαδήποτε άλλη διαφορετική λύση με οποιονδήποτε τρόπο (π.χ. μαντεψιά) τότε μπορείτε να βρείτε την γενικευμένη λύση του εξίσωσης. Η γενική αυτή λύση μπορεί να διατυπωθεί με εντελώς διαφορετικό τρόπο εάν επιλέξουμε άλλες συγκεκριμένες λύσεις. Σε κάθε περίπτωση όμως η γενική λύση παριστά την ίδια κλάση λύσεων, δηλαδή συναρτήσεων που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση. Από την εν λόγω κλάση θα επιλέξουμε την (μοναδική εάν υπάρχει) κατάλληλη λύση του προβλήματος που ικανοποιεί και την εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες.

2.5.2 Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Είναι προφανώς επιθυμητό να μπορούμε να μαντεύουμε την λύση της (2.6). Σημειώστε ότι το $2x + 1$ είναι ένα πολυώνυμο, και το αριστερό μέρος της εξίσωσης θα είναι επίσης πολυώνυμο εάν επιλέξουμε την y να είναι ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν θέτοντας

$$y = Ax + B.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax+B)'' + 5(Ax+B)' + 6(Ax+B) = 0 + 5A + 6Ax + 6B = 6Ax + (5A+6B).$$

Άρα $6Ax + (5A+6B) = 2x+1$. Οπότε $A = 1/3$ και $B = -1/9$. Αυτό σημαίνει ότι $y_p = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} = \frac{3x-1}{9}$. Λύνοντας το συμπληρωματικό πρόβλημα έχουμε. (Άσκηση!)

$$y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Άρα η γενική λύση της (2.6) είναι

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x-1}{9}.$$

Ας υποθέσουμε ότι επιπρόσθετα μας δίνονται οι αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1/3$. Πρώτα έχουμε ότι $y' = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x} + 1/3$. Τότε

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{3} = y'(0) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{3}.$$

Λύνοντας έχουμε $C_1 = 1/3$ και $C_2 = -2/9$. Άρα η λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + \frac{3x-1}{9} = \frac{3e^{-2x} - 2e^{-3x} + 3x - 1}{9}.$$

2.5.1 *Ελέγξτε ότι η y αποτελεί λύση της εξίσωσης.*

Σημείωση: Ένα σύνηθες λάθος είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες και την y_c και κατόπιν να προσθέσουμε την συγκεκριμένη λύση y_p. Αυτό δεν θα μας οδηγήσει στην λύση που ζητάμε. Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την $y = y_c + y_p$ και *κατόπιν* να λύσουμε ως προς τις σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε περιπτώσεις που στο δεξιό μέλος τις εξίσωσης έχουμε εκθετική συνάρτηση ή ημίτονα και συνημίτονα. Για παράδειγμα

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x.$$

Ας υπολογίσουμε την y_p χρησιμοποιώντας την μαντεψιά

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Αντικαθιστώντας την y στην εξίσωση έχουμε

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 2A\cos 2x + 2B\sin 2x = \cos 2x.$$

Για να είναι το δεξιό μέρος ίσο με το αριστερό πρέπει να ισχύει $-4A + 4B + 2A = 1$ δηλαδή $-4B - 4A + 2B = 0$. Άρα $-2A + 4B = 1$ και $2A + B = 0$ και συνεπώς $A = {-1}/{10}$ και $B = 1/5$. Άρα

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x = \frac{-\cos 2x + 2\sin 2x}{10}.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση που το δεξιό μέρος περιέχει εκθετικές συναρτήσεις, οπότε και η μαντεψιά μας θα είναι επίσης εκθετική συνάρτηση. Για παράδειγμα, αν

$$Ly = e^{3x},$$

(όπου L είναι ένας οποιοσδήποτε διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές) τότε η μαντεψιά μας θα είναι η $y = Ae^{3x}$. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι βασιζόμενοι στον κανόνα του γινομένου για την παραγώγιση μπορούμε να συνδυάσουμε κατάλληλα μαντεψιές. Για παράδειγμα, για την εξίσωση

$$Ly = (1 + 3x^2)\, e^{-x}\cos \pi x,$$

ας θεωρήσουμε την μαντεψιά

$$y = (A + Bx + Cx^2)\, e^{-x}\cos \pi x + (D + Ex + Fx^2)\, e^{-x}\sin \pi x$$

την οποία θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση ελπίζοντας να πάρουμε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που είναι απαραίτητο για να υπολογίσουμε τις τιμές των A, B, C, D, E, F.

Ας ξεδιαλύνουμε τον βασικό μηχανισμό της μεθόδου αυτής θεωρώντας την εξίσωση

$$y'' - 9y = e^{3x}.$$

Μια προφανής μαντεψιά είναι η $y = Ae^{3x}$, την οποία όμως αν αντικαταστήσουμε στο αριστερό μέρος θα πάρουμε

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Δεν υπάρχει τρόπος επιλογής του A έτσι ώστε το δεξιό μέρος να είναι ίσο με e^{3x}. Για να αποφύγουμε την πολλαπλότητα της συμπληρωματικής λύσης (προφανώς σε αυτή οφείλεται το πρόβλημα), μπορούμε να την πολλαπλασιάσουμε με x. Υπολογίζουμε δηλαδή πρώτα την y_c (την λύση της $Ly = 0$)

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

και παρατηρούμε ότι υπάρχει σε αυτήν ο όρος e^{3x} ο οποίος συμπίπτει με την επιθυμητή μαντεψιά μας. Μπορούμε να αποφύγουμε κάτι τέτοιο αν μετατρέψουμε την μαντεψιά μας σε $y = Axe^{3x}$.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε ως συνήθως παίρνοντας $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$ και $y'' = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$. Άρα

$$y'' - 9y = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}.$$

Για να είναι το δεξιό μέλος ίσο με e^{3x} έχουμε ότι $4A = 1$ και άρα $A = 1/4$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την γενική λύση ως εξής

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4} xe^{3x}.$$

Υπάρχει περίπτωση ο πολλαπλασιασμός της μαντεψιάς με x να μην μας επιτρέψει να αποφύγουμε σύμπτωση λύσεων. Για παράδειγμα,

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x}.$$

Σημειώστε ότι $y_c = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}$. Συνεπώς η μαντεψιά $y = Axe^{3x}$ δεν θα μας οδηγήσει πουθενά. Σε αυτή την περίπτωση ας εξετάσουμε την εξής επιλογή $y = Ax^2 e^{3x}$. Εν γένει μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την μαντεψιά μας με x όσες φορές χρειάζεται για να αποφύγουμε την σύμπτωση λύσεων. *Όχι όμως περισσότερες φορές!* Εάν πολλαπλασιάσουμε περισσότερες φορές από όσες πρέπει θα οδηγηθούμε και πάλι σε αδιέξοδο.

Τέλος ας εξετάσουμε την περίπτωση που το δεξιό μέρος είναι άθροισμα κάποιων όρων, όπως για παράδειγμα το

$$Ly = e^{2x} + \cos x.$$

Στην εν λόγω περίπτωση βρίσκουμε μια συνάρτηση u η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης $Lu = e^{2x}$ και μια συνάρτηση v η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης $Lv = \cos x$ (αντιμετωπίζουμε κάθε όρο ξεχωριστά). Κατόπιν σημειώστε ότι αν θέσουμε $y = u + v$, έχουμε $Ly = e^{2x} + \cos x$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο τελεστής L είναι γραμμικός και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπέρθεση των λύσεων. Με τον τρόπο αυτό έχουμε ότι $Ly = L(u+v) = Lu + Lv = e^{2x} + \cos x$.

Αναλυτικές επιπρόσθετες αναλυτικές τεχνικές λεπτομέρειες της παραπάνω μεθόδου μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο των *Edwards* και *Penney* [ΕΠ] αλλά και σε κάθε άλλο βιβλίο διαφορικών εξισώσεων.

2.5.3 Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών παρόλο που μας βοηθά να λύσουμε πολλά βασικά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων δυστυχώς δεν μπορεί να αντιμετωπίσει πολλά άλλα. Στην πραγματικότητα είναι αποτελεσματική μόνον στην περίπτωση που το δεξιό μέρος της εξίσωσης $Ly = f(x)$ έχει μόνον πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων παραγώγων, οπότε και είναι δυνατόν να δώσει κάποιος μια μαντεψιά που τις περιλαμβάνει όλες τους. Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα δύσκολο κάποιες φορές. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$y'' + y = \tan x.$$

Σημειώστε ότι οι παράγωγοι της $\tan x$ δείχνουν τελείως διαφορετικές μεταξύ τους και είναι αδύνατον να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός παραγώγων κατώτερης τάξης. Πράγματι έχουμε $\sec^2 x$, $2\sec^2 x \tan x$, κλπ ....

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής χρειάζεται μια νέα μέθοδος. Ας αναπτύξουμε λοιπόν την μέθοδο *διακύμανσης των παραμέτρων*, η οποία μπορεί να μας βοηθήσει να αντιμετωπίσουμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $Ly = f(x)$, αρκεί βεβαίως να είναι εφικτό να υπολογίσουμε τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα. Για να απλουστεύσουμε την συζήτηση, και φυσικά χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας περιοριστούμε σε εξισώσεις δεύτερης τάξης, έχοντας βεβαίως υπόψιν ότι η εν λόγω μέθοδος μπορεί με την ίδια ευκολία να αντιμετωπίσει εξισώσεις υψηλότερης τάξης (ενδεχομένως μέσω εύκολων αλλά βαρετών υπολογισμών).

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξής εξίσωση.

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

Πρώτα βρίσκουμε την συμπληρωματική λύση της $Ly = 0$ βρίσκοντας σχετικά εύκολα ότι $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$. Για να προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε μια λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης ας θεωρήσουμε την εξής συνάρτηση

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

όπου οι u_1 και u_2 είναι *συναρτήσεις* και όχι σταθερές. Αν προσπαθήσουμε να ικανοποιήσουμε την εξίσωση $Ly = \tan x$ θα καταλήξουμε σε μια συνθήκη που συνδέει τις u_1 και u_2. Πρώτα βεβαίως πρέπει να υπολογίσουμε (προσοχή, με τον κανόνα του γινομένου!)

$$y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2').$$

Μια και λόγω της πολυπλοκότητας της είναι συγκριτικά δύσκολο να διαχειριστούμε την παραπάνω σχέση, ας την απλοποιήσουμε θέτοντας την εξής περιοριστική σχέση $(u_1' y_1 + u_2' y_2) = 0$. Κάτι τέτοιο όχι μόνον είναι επιτρεπτό αλλά και ουσιαστικά αναγκαίο μια και πρέπει να βρούμε δύο άγνωστες συναρτήσεις γεγονός που απαιτεί και μια δεύτερη εξίσωση πέρα από την αρχική διαφορική εξίσωση. Έτσι και ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου είναι πολύ ευκολότερος.

$$\begin{aligned} y' &= u_1 y_1' + u_2 y_2', \\ y'' &= (u_1' y_1' + u_2' y_2') + (u_1 y_1'' + u_2 y_2''). \end{aligned}$$

Τώρα επειδή y_1 και y_2 είναι λύσεις της $y'' + y = 0$, γνωρίζουμε ότι $y_1'' = -y_1$ και $y_2'' = -y_2$. (Σημείωση: Αν η εξίσωση μας ήταν της μορφής $y'' + ay' + by = 0$ θα είχαμε $y_i'' = -ay_i' - by_i$.)

Άρα
$$y'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - (u_1y_1 + u_2y_2).$$
Σημειώστε ότι
$$y'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - y,$$
και συνεπώς
$$y'' + y = Ly = u_1'y_1' + u_2'y_2'.$$
Για να ικανοποιεί η y την $Ly = f(x)$ πρέπει να έχουμε $f(x) = u_1'y_1' + u_2'y_2'$.

Πρέπει να λύσουμε τις δύο εξισώσεις (συνθήκες) που θέσαμε για τις u_1 και u_2

$$\boxed{\begin{aligned} &u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \\ &u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \end{aligned}}$$

Μπορούμε τώρα να λύσουμε ως προς τις u_1' και u_2' συναρτήσει των $f(x)$, y_1 και y_2. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ίδιες για οποιασδήποτε συγκεκριμένη εξίσωση της μορφής $Ly = f(x)$. Υπάρχει συνεπώς γενικός τύπος υπολογισμού της λύσης στον οποίο αρκεί να κάνει κάποιος τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, είναι όμως καλλίτερο να επαναλάβει την παρακάτω διαδικασία. Στην περίπτωσή μας οι δύο εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} u_1'\cos x + u_2'\sin x &= 0, \\ -u_1'\sin x + u_2'\cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} u_1'\cos x\sin x + u_2'\sin^2 x &= 0, \\ -u_1'\sin x\cos x + u_2'\cos^2 x &= \tan x\cos x = \sin x. \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} &u_2'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x, \\ &u_2' = \sin x, \\ &u_1' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = -\tan x\sin x. \end{aligned}$$

Τώρα πρέπει να ολοκληρώσουμε τις u_1' και u_2' για να υπολογίσουμε τις u_1 και u_2.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\,dx = \int -\tan x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1}\right| + \sin x, \\ u_2 &= \int u_2'\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x. \end{aligned}$$

Άρα η συγκεκριμένη λύση μας είναι

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2}\cos x \ln\left|\frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1}\right| + \cos x \sin x - \cos x \sin x =$$
$$= \frac{1}{2}\cos x \ln\left|\frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1}\right|.$$

Η γενική λύση της $y'' + y = \tan x$ είναι λοιπόν

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\cos x \ln\left|\frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1}\right|.$$

2.5.4 Ασκήσεις

2.5.2 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης* $y'' - y' - 6y = e^{2x}$.

2.5.3 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης* $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

2.5.4 *Λύστε το εξής πρόβλημα* $y'' + 9y = \cos 3x + \sin 3x$ *για* $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

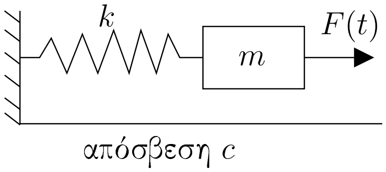
2.5.5 *Διατυπώστε την γενική μορφή μιας συγκεκριμένης λύσης της* $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$ *χωρίς να λύσετε ως προς τους συντελεστές.*

2.5.6 *Διατυπώστε την γενική μορφή και βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης* $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + x + \sin x$ *χωρίς να λύσετε ως προς τους συντελεστές.*

2.5.7 *α) Χρησιμοποιήστε την μέθοδο της διακύμανσης των παραμέτρων για να βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης* $y'' - 2y' + y = e^x$. *β) Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών. ς) Είναι οι δύο λύσεις που βρήκατε παραπάνω ίδιες; Τι συμβαίνει;*

2.5.8 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης* $y'' - 2y' + y = \sin x^2$. *Δεν χρειάζεται να υπολογίζεται τα εμπλεκόμενα ορισμένα ολοκληρώματα.*

2.6 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός



Ας επιστρέψουμε τώρα στο σύστημα μάζας ελατηρίου και ας εξετάσουμε την περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Ας εξετάσουμε δηλαδή την εξίσωση

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

για κάποια μη-μηδενική εξίσωση $F(t)$. Ας θυμηθούμε ότι στο σύστημα μάζας ελατηρίου, m είναι η μάζα του σωματιδίου, c είναι η απόσβεση, k είναι η σταθερά του ελατηρίου και $F(t)$ είναι κάποια εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σωματίδιο.

Συνήθως η εξωτερική δύναμη είναι περιοδική, όπως πχ σωματίδια περιστρεφόμενα εκτός κέντρου βάρους, ή περιοδικούς ήχους κλπ. Όταν θα αναπτύξουμε τεχνικές σειρών $Fourier$ θα δούμε ότι στην ουσία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε κάθε περιοδική συνάρτηση, οποιουδήποτε τύπου, θεωρώντας συναρτήσεις της μορφής $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (ή sin), με ουσιαστικά ακριβώς τον ίδιο τρόπο.

2.6.1 Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση και συντονισμός

Χάριν απλότητας ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση χωρίς απόσβεση ($c = 0$). Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

η οποία έχει την εξής συμπληρωματική λύση (λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης)

$$x_c = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Η ω_0 λέγεται (γωνιακή) *φυσική συχνότητα*. Είναι η συχνότητα στην οποία το σύστημα 'θέλει να ταλαντωθεί' χωρίς την επήρεια εξωτερικών παραγόντων.

Ας υποθέσουμε ότι $\omega_0 \neq \omega$, ας δοκιμάσουμε την μαντεψιά $x_p = A \cos \omega t$ και ας λύσουμε ως προς A. Σημειώστε ότι δεν είναι απαραίτητο να έχουμε όρο ημιτόνου στην μαντεψιά μας μια και στο αριστερό μέρος θα έχουμε ούτως ή άλλως συνημίτονα. Φυσικά μπορεί κάποιος να συμπεριλάβει όρους ημιτόνου στην μαντεψιά, οι συντελεστές όμως των όρων αυτών θα αποδειχθεί ότι είναι μηδέν.

Λύνοντας παρόμοια (κάντε το σαν άσκηση) με την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών και χρησιμοποιώντας την παραπάνω μαντεψιά βρίσκουμε ότι

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Η γενική λύση είναι

$$\boxed{x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.}$$

η οποία μπορεί να δοθεί στην εξής μορφή

$$x = C\cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega\, t.$$

Είναι δηλαδή υπέρθεση δύο συνημιτονοειδών κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων.

Παράδειγμα 2.6.1: Έστω ότι

$$0.5x'' + 8x = 10\cos\pi t$$

και ότι $x(0) = 0$ και $x'(0) = 0$.

Ας αναγνωρίσουμε τις παραμέτρους πρώτα: $\omega = \pi$, $\omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4$, $F_0 = 10$, $m = 1$. Άρα η γενική λύση είναι

$$x = C_1\cos 4t + C_2\sin 4t + \frac{20}{16-\pi^2}\cos\pi t.$$

Ας λύσουμε τώρα ως προς C_1 και C_2 χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $C_2 = 0$ και $C_1 = \frac{-20}{16-\pi^2}$. Άρα

$$x = \frac{20}{16-\pi^2}(\cos\pi t - \cos 4t).$$

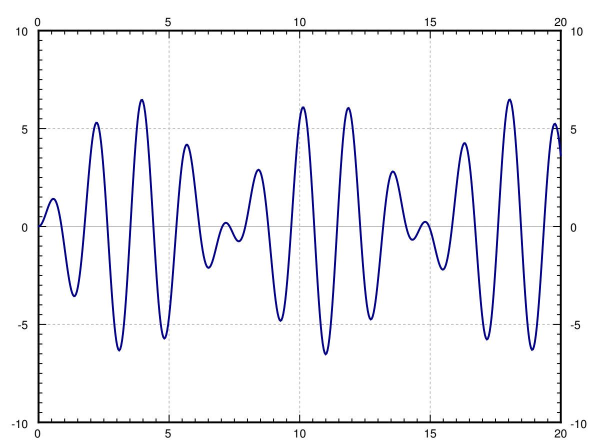
Παρατηρήστε την συμπεριφορά της λύσης στο Σχήμα 2.5 ως προς το μέγιστο πλάτος της. Πράγματι εάν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos B - \cos A$$

θα δούμε ότι

$$x = \frac{20}{16-\pi^2}\left(2\sin\left(\frac{4-\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{4+\pi}{2}t\right)\right).$$

Σημειώστε ότι το x είναι ένα υψηλής συχνότητας κύμα το εύρος του οποίου διαμορφώνεται από ένα κύμα χαμηλής συχνότητας.



Σχήμα 2.5: Η γραφική παράσταση της $\frac{20}{16-\pi^2}(\cos\pi t - \cos 4t)$.

Έστω τώρα $\omega_0 = \omega$. Προφανώς, δεν είναι δυνατόν η μαντεψιά $A\cos\omega\, t$ σε συνδυασμό με την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών να μας οδηγήσει στην λύση. Στην προκείμενη περίπτωση βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\cos\omega\, t$ αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Άρα, χρειάζεται να δοκιμάσουμε την συνάρτηση $x_p = At\cos\omega\, t + Bt\sin\omega\, t$ μια και δεύτερη παράγωγος της $t\cos\omega\, t$ εμπεριέχει ημίτονα. Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση

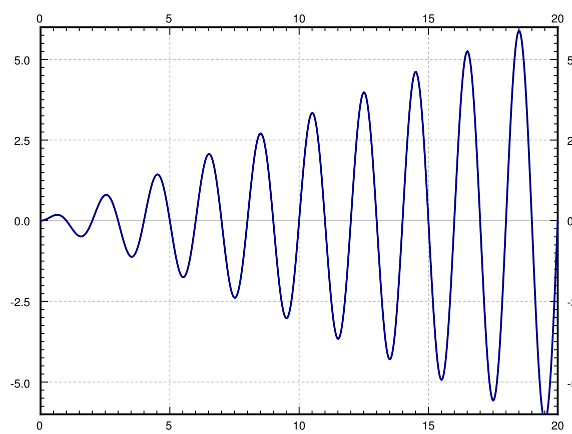
$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega\, t.$$

Αντικαθιστώντας στο αριστερό μέρος έχουμε

$$2B\omega\cos\omega\, t - 2A\omega\sin\omega\, t = \frac{F_0}{m}\cos\omega\, t.$$

Άρα $A = 0$ και $B = \frac{F_0}{2m\omega}$. Η συγκεκριμένη λύση είναι $\frac{F_0}{2m\omega}t\sin\omega\, t$ και η γενική λύση είναι

$$x = C_1\cos\omega\, t + C_2\sin\omega\, t + \frac{F_0}{2m\omega}t\sin\omega\, t.$$



Σχήμα 2.6: Η γραφική παράσταση της $\frac{1}{\pi}t\sin\pi t$.

Ο σημαντικός όρος είναι ο τελευταίος (η συγκεκριμένη λύση που βρήκαμε). Εύκολα βλέπουμε ότι ο όρος αυτός αυξάνεται χωρίς όριο όταν $t \to \infty$. Στην πραγματικότητα, ταλαντώνεται μεταξύ του $\frac{F_0 t}{2m\omega}$ και του $\frac{-F_0 t}{2m\omega}$. Οι πρώτοι δύο ταλαντώνεται μόνον μεταξύ των τιμών $\pm\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, οι οποίες γίνονται, όσο αυξάνει το t, όλο και μικρότερες σε σύγκριση με τις με τις αντίστοιχες τιμές ταλάντωσης του τελευταίου όρου. Στο Σχήμα 2.6 βλέπουμε την γραφική παράσταση της λύσης όταν $C_1 = C_2 = 0$, $F_0 = 2$, $m = 1$, $\omega = \pi$.

Ο εξαναγκασμός ενός συστήματος σε ταλάντωση σε κάποια συγκεκριμένη συχνότητα μας οδηγεί σε πολύ παράξενες ταλαντώσεις. Αυτού του είδους η συμπεριφορά ονομάζεται*συντονισμός* ή *φυσικός συντονισμός*. Κάποιες φορές ο συντονισμός βέβαια ενδεχομένως να είναι επιθυμητός. Για παράδειγμα, Θυμηθείτε ότι τα παιδιά ξεκινάν την κούνια της παιδικής χαράς με ταλαντώσεις μικρούς πλάτους για να καταλήξουν, αυξάνοντάς το, να συντονιστούν σε ταλαντώσεις με το επιθυμητό πλάτος και συχνότητα.

Άλλες φορές ο συντονισμός μπορεί να είναι καταστροφικός. Μετά από ένα σεισμό κάποια κτίρια παραμένουν σχεδόν ανέπαφα ενώ άλλα καταρρέουν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι διαφορετικά κτίρια έχουν και διαφορετικές συχνότητες συντονισμού (θυμηθείτε βεβαίως και τον ανάλογο θρύλο των τειχών της Ιεριχούς). Συνεπώς η μελέτη της συχνότητας συντονισμού ενός συστήματος μπορεί να είναι ζωτικής σημασίας.

Συχνά σαν παράδειγμα καταστροφικού συντονισμού συχνότητας αναφέρεται και η κατάρρευση της γέφυρας $TacomaNarrows$ στις αρχές του 20ου αιώνα στις Η.Π.Α.. Κάτι τέτοιο είναι όμως λάθος μια και κάποιο άλλο φαινόμενο είναι το κυρίως υπεύθυνο για την εν λόγω καταστροφή[§].

2.6.2 Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση και συντονισμός στην πράξη

Προφανώς στην πραγματικότητα τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όσο τα περιγράψαμε παραπάνω. Για παράδειγμα, υπάρχει απόσβεση οπότε και η εξίσωσή μας παίρνει την εξής μορφή

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega\, t, \tag{2.8}$$

για κάποιο $c > 0$. Έχουμε ήδη λύσει το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα. Οπότε θέτουμε

$$p = \frac{c}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (2.8) με την

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega\, t.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος είναι οι εξής $r_1, r_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$. Η μορφή της γενικής λύσης του ομογενούς προβλήματος εξαρτάται, όπως ήδη είδαμε, από το πρόσημο του $p^2 - \omega_0^2$, η ισοδύναμα από το πρόσημο του $c^2 - 4km$. Δηλαδή

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} & \text{αν } c^2 > 4km, \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt} & \text{αν } c^2 = 4km, \\ e^{-pt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) & \text{αν } c^2 < 4km\ , \end{cases}$$

όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$. Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι $x_c(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$. Επιπρόσθετα, τίποτε δεν μας εμποδίζει να προσπαθήσουμε να ολοκληρώσουμε την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών σε συνδυασμό με την μαντεψιά $x_p = A \cos \omega\, t + B \sin \omega\, t$. Σημειώστε εδώ ότι τα παραπάνω αναφερθέντα καταστροφικά σενάρια δεν είναι πιθανόν να συμβούν στην πραγματικότητα όπου υπάρχει κάποια, έστω και πολύ μικρή, απόσβεση που αποτρέπει τον συντονισμό. Αντί αυτού έχουμε φαινόμενα συντονισμού κάποιου άλλου τύπου με παραπλήσια εννοιολογική θεώρηση.

[§]K. Billah R. Scanlan, *Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, Undergraduate Physics Textbooks*, American Journal of Physics, 59(2), 1991, 118–124, `http://www.ketchum.org/billah/Billah-Scanlan.pdf`

Ας αντικαταστήσουμε λοιπόν και ας λύσουμε ως προς A και B. Μετά από πολλές και ανιαρές πράξεις έχουμε

$$\big((\omega_0^2-\omega^2)B-2\omega pA\big)\sin\omega\, t+\big((\omega_0^2-\omega^2)A+2\omega pB\big)\cos\omega\, t=\frac{F_0}{m}\cos\omega\, t.$$

Τελικά παίρνουμε

$$A=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$
$$B=\frac{2\omega pF_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι μια και $C=\sqrt{A^2+B^2}$ έχουμε

$$C=\frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}.$$

Συνεπώς η συγκεκριμένη μας λύση είναι

$$x_p=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cos\omega\, t+\frac{2\omega pF_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin\omega\, t$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο συμβολισμό έχουμε πλάτος ταλάντωσης C και μετακίνησης φάσης γ όπου (όταν $\omega\neq\omega_0$)

$$\tan\gamma=\frac{B}{A}=\frac{2\omega p}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Άρα έχουμε

$$\boxed{x_p=\frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\omega\, t-\gamma).}$$

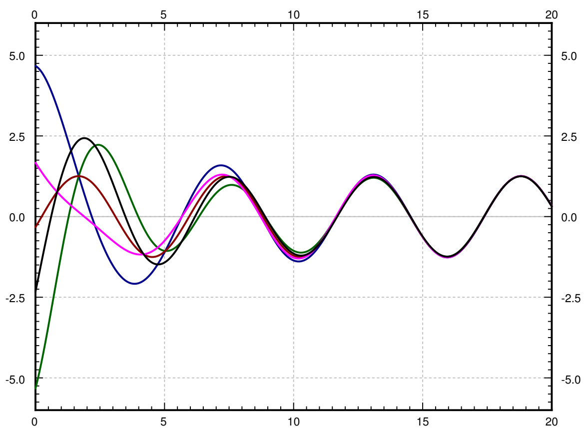
Όταν $\omega=\omega_0$ βλέπουμε ότι $A=0$, $B=C=\frac{F_0}{2m\omega p}$ και $\gamma={}^{\pi}/_{2}$.

Ο ακριβής τύπος της λύσης δεν έχει όση σπουδαιότητα έχει η βασική ιδέα από την οποία προέκυψε. Δεν χρειάζεται λοιπόν να απομνημονεύσετε τον συγκεκριμένο τύπο ενώ είναι απαραίτητο να ενθυμούμαστε την εμπλεκόμενες ιδέες. Σημειώστε ότι ακόμα και στην περίπτωση που αλλάξει έστω και λίγο το δεξιό μέρος τόσο η μορφή όσο και η συμπεριφορά της λύσης μπορεί να αλλάξει δραστικά. Συνεπώς δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος απομνημόνευσης του συγκεκριμένου αυτού τύπου και είναι σαφώς προτιμότερο να τον αναπαράγουμε κάθε φορά που θα τον χρειαστούμε.

Για λόγους που θα εξηγήσουμε σε λίγο, ας ονομάσουμε την λύση x_c *μεταβατική λύση* και ας την συμβολίσουμε με x_{tr}. Ας ονομάσουμε επίσης την x_p που βρήκαμε παραπάνω *ευσταθή περιοδική λύση* και ας την συμβολίσουμε με x_{sp}. Η γενική λύση του προβλήματος μας είναι

$$x=x_c+x_p=x_{tr}+x_{sp}.$$

Σημειώστε ότι η $x_c = x_{tr}$ τείνει στο μηδέν όταν το $t \to \infty$ σαν όρος που περιλαμβάνει την εκθετική συνάρτηση με αρνητικό όρισμα. Άρα για μεγάλα t, ο όρος x_{tr} είναι αμελητέος και ουσιαστικά επικρατεί μόνο η x_{sp} την επήρεια της οποίας είναι και το μόνο που αισθανόμαστε. Σημειώστε επίσης ότι η x_{sp} δεν εμπλέκει τυχαίες σταθερές και οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν μόνον την x_{tr}. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση των αρχικών συνθηκών θα είναι αμελητέα στην αρχή (για μικρό t). Αυτός είναι ο λόγος που ονομάσαμε παραπάνω την εν λόγω λύση μεταβατική. Εξ αιτίας της συμπεριφοράς αυτής, μπορούμε να επικεντρωθούμε στην ευσταθή περιοδική λύση και να αγνοήσουμε την μεταβατική. Έχοντας κατά νου τα παραπάνω, παρατηρήστε στο Σχήμα 2.7 τις γραφικές παραστάσεις των λύσεων για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



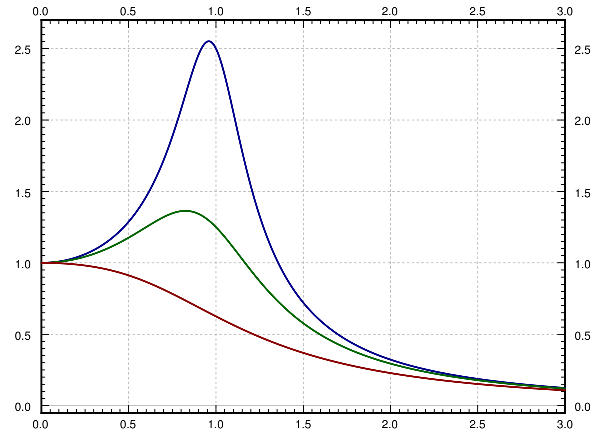
Σχήμα 2.7: Γραφικές παραστάσεις των λύσεων με διαφορετικές αρχικές συνθήκες και τις εξής παραμέτρους $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$, $c = 0.7$, και $\omega = 1.1$.

Παρατηρήστε ότι η ταχύτητα με την οποία η x_{tr} τείνει στο μηδέν εξαρτάται από το p (και άρα από το c). Όσο πιο μεγάλο είναι το p (ή όσο πιο μεγάλο είναι το c), τόσο ποιο 'γρήγορα' η x_{tr} γίνεται αμελητέα. Άρα όσο πιο μικρή είναι η απόσβεση, τόσο μεγαλύτερη είναι η ¨μεταβατική περίοδοσ'. Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνο με την παρατήρηση ότι όταν η $c = 0$, οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν την συμπεριφορά της λύσης πάντα (δηλαδή η ¨μεταβατική περίοδοσ' είναι για πάντα).

Ας περιγράψουμε τώρα τι σημαίνει συντονισμός όταν υπάρχει απόσβεση. Μια και δεν υπάρχουν αντιφάσεις κατά την επίλυση με την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, δεν υπάρχει όρος ο οποίος να τείνει στο άπειρο. Ας δούμε όμως ποια είναι η μέγιστη τιμή του πλάτους της ευσταθούς περιοδικής λύσης. Έστω C το πλάτος της ταλάντωσης της x_{sp}. Εάν κάνουμε την γραφική παράσταση του C σαν συνάρτηση του ω (θεωρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές) μπορούμε να βρούμε το μέγιστό του. Η τιμή του ω που αντιστοιχεί στο μέγιστο αυτό ονομάζεται *φυσική συχνότητα συντονισμού*. Το μέγιστο πλάτος $C(\omega)$ είναι γνωστό με το όνομα *φυσικό πλάτος συντονισμού*. Συνεπώς όταν υπάρχει απόσβεση μιλάμε για *φυσικός συντονισμός* αντί για απλό συντονισμό. Ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις για τρεις διαφορετικές τιμές του c δίδονται στο Σχήμα 2.8 στην επόμενη σελίδα. Όπως είναι φανερό το φυσικό πλάτος συντονισμού αυξάνει όταν η απόσβεση ελαττώνεται και ο φυσικός συντονισμός εξαφανίζεται όταν η απόσβεση είναι μεγάλη.

Για να βρούμε το μέγιστο πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την παράγωγο $C'(\omega)$ η οποία εύκολα βρίσκουμε ότι είναι

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m\big((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\big)^{3/2}}.$$



Σχήμα 2.8: Η γραφική παράσταση του $C(\omega)$ που αναδεικνύει συντονισμό στην πράξη με παραμέτρους $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$. Η επάνω καμπύλη είναι για $c = 0.4$, η μεσαία για $c = 0.8$, και η κάτω για $c = 1.6$.

Είναι βεβαίως μηδέν όταν $\omega = 0$ η όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$. Με άλλα λόγια όταν

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \text{ ή } 0$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\omega_0^2 - 2p^2$ είναι θετική όταν η $\sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$ είναι η φυσική συχνότητα συντονισμού (είναι δηλαδή το σημείο όπου η $C(\omega)$ έχει το μέγιστό της, όπου στην περίπτωση αυτή $C'(\omega) > 0$ για μικρές τιμές του ω). Αν το $\omega = 0$ είναι το μέγιστο τότε δεν υπάρχει ουσιαστικά φυσικός συντονισμός μια και υποθέτουμε ότι για το σύστημά μας έχουμε $\omega > 0$. Στην περίπτωση αυτή το πλάτος αυξάνει όταν η εξαναγκασμένη συχνότητα ελαττώνεται.

Παρόμοια μπορούμε να δούμε ότι εάν δεν συμβαίνει φυσικός συντονισμός, η συχνότητα είναι μικρότερη από το ω_0. Όσο η απόσβεση c (και συνεπώς και η p) ελαττώνονται, τόσο η φυσική συχνότητα συντονισμού πλησιάζει την ω_0. Άρα όταν η απόσβεση είναι πολύ μικρή, η ω_0 αποτελεί μια καλή προσέγγιση της συχνότητας συντονισμού. Η συμπεριφορά αυτή συμφωνεί με την παρατήρηση ότι όταν το $c = 0$, τότε η ω_0 είναι η συχνότητα συντονισμού.

Η παραπάνω συμπεριφορά είναι πού πιο περίπλοκη εάν η εξωτερική δύναμη δεν είναι κύμα συνημιτόνου, αλλά για παράδειγμα είναι ένα τετράγωνο κύμα. Θα εξετάσουμε την περίπτωση αυτή μόλις εξοπλιστούμε με το εργαλείο των σειρών *Fourier*.

2.6.3 Ασκήσεις

2.6.1 *Βρείτε έναν τύπο για την x_{sp} εάν η εξίσωση είναι $mx'' + cx' + kx = F_0 \sin \omega t$. Υποθέστε ότι $c > 0$.*

2.6.2 *Βρείτε έναν τύπο για την* x_{sp} *εάν η εξίσωση είναι* $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t + F_1 \cos 3\omega t$. *Υποθέστε ότι* $c > 0$.

2.6.3 *Έστω η εξίσωση* $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$ *και έστω* $m > 0$ *και* $k > 0$. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $C(\omega)$. *Για ποιες τιμές του* c *(λύστε ως προς* m, k, *και* F_0*) δεν θα υπάρχει φυσικός συντονισμός (για ποιες τιμές* c *δεν υπάρχει μέγιστο του* $C(\omega)$ *όταν* $\omega > 0$*).*

2.6.4 *Έστω η εξίσωση* $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$ *και έστω* $c > 0$ *και* $k > 0$. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $C(\omega)$. *Για ποιες τιμές του* m *(λύστε ως προς* c, k, *και* F_0*) δεν θα υπάρχει φυσικός συντονισμός (για ποιες τιμές* m *δεν υπάρχει μέγιστο του* $C(\omega)$ *για* $\omega > 0$*).*

Κεφάλαιο 3

Συστήματα ΣΔΕ

3.1 Εισαγωγή στα συστήματα ΣΔΕ

Συνήθως δεν έχουμε μόνον μια εξαρτημένη μεταβλητή και μόνον μία διαφορική εξίσωση αλλά ένα σύστημα αλληλοεξαρτώμενων διαφορικών εξισώσεων όπου εμπλέκονται πολλές εξαρτημένες μεταβλητές ως προς τις οποίες πρέπει να λύσουμε.

Στην περίπτωση που το πρόβλημα που μελετούμε εμπλέκει περισσότερες από μια εξαρτημένες μεταβλητές, έστω τις y_1, y_2, $\ldots$, y_n μπορεί να έχουμε διαφορικές εξισώσεις που να εμπλέκουν τόσο όλες αυτές τις μεταβλητές όσο και τις παραγώγους των. Για παράδειγμα, $y_1'' = f(y_1', y_2', y_1, y_2, x)$. Συνήθως όταν εμπλέκονται δύο εξαρτημένες μεταβλητές έχουμε και δύο εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned} y_1'' &= f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \\ y_2'' &= f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \end{aligned}$$

για κάποιες συναρτήσεις f_1 και f_2. Η παραπάνω δυάδα εξισώσεων ονομάζεται *σύστημα διαφορικών εξισώσεων*. Για την ακρίβεια, είναι ένα σύστημα δεύτερης τάξης. Κάποιες φορές ένα σύστημα είναι εύκολο να επιλυθεί αρκεί να λύσουμε την μια εξίσωση ως προς την μία εξαρτημένη μεταβλητή και μετά να λύσουμε ως προς την δεύτερη.

Παράδειγμα 3.1.1: Θεωρήστε το παρακάτω σύστημα πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες της μορφής $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Σημειώστε ότι η γενική λύση της πρώτης εξίσωσης είναι $y_1 = C_1 e^x$. Αντικαθιστώντας αυτή την y_1 στην δεύτερη εξίσωση, αυτή παίρνει την εξής μορφή $y_2' = C_1 e^x - y_2$, η οποία είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και συνεπώς εύκολα μπορούμε να λύσουμε ως προς y_2. Πράγματι με την μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων έχουμε

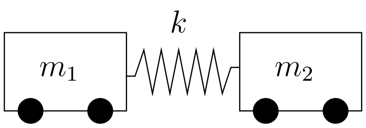
$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2,$$

ή $y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$. Συνεπώς η γενική λύση του συστήματος είναι η εξής,

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x, \\ y_2 &= \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τα C_1 και C_2 χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας το $x = 0$ βρίσκουμε ότι $C_1 = 1$ και $C_2 = {}^3/_2$.

Γενικά, δεν θα είμαστε πάντα τόσο τυχεροί να μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα βρίσκοντας έναν έναν τους αγνώστους όπως κάναμε παραπάνω, αλλά θα χρειαστεί να τους βρούμε όλους μαζί.



Σαν παράδειγμα εφαρμογής, ας θεωρήσουμε και πάλι συστήματα μάζας ελατηρίου. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ελατήριο σταθεράς k και τοποθετούμε στα άκρα του δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα σωματίδια σαν βαγονέτα τα οποία κινούνται ουσιαστικά χωρίς τριβή. Έστω x_1 η μετατόπιση του ενός βαγονέτου και x_2 η μετατόπιση του δεύτερου από την θέση ισορροπίας. Με τον όρο θέση ισορροπίας εννοούμε την θέση των σωματιδίων όταν δεν υπάρχει τάση στο ελατήριο. Δηλαδή, τοποθετούμε τα δύο βαγονέτα κάπου έτσι ώστε να μην υπάρχει καθόλου τάση στα ελατήρια και σημειώνουμε τις θέσεις τους σαν θέσεις μηδέν. Δηλαδή, $x_1 = 0$ δηλώνει διαφορετική θέση στο χώρο από την θέση που δηλώνει το $x_2 = 0$. Εάν μετακινήσουμε τα βαγονέτα από την θέση ισορροπίας τότε, επειδή το ελατήριο θα επιμηκυνθεί (η θα συμπιεστεί) κατά $x_2 - x_1$, η δύναμη που θα ασκηθεί στο πρώτο βαγονέτο θα είναι $k(x_2 - x_1)$ ενώ η δύναμη που θα ασκηθεί στο δεύτερο βαγονέτο θα είναι ίση και αντίθετης κατεύθυνσης. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= k(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' &= -k(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Δεν είναι εφικτό να λύσουμε το παραπάνω σύστημα ως προς x_1 πρώτα. Πρέπει δηλαδή να λύσουμε ταυτόχρονα ως προς το x_1 και το x_2 όπως εξάλλου και είναι αναμενόμενο μια και η κίνηση του ενός βαγονέτου εξαρτάται από την κίνηση του άλλου.

Πριν συζητήσουμε το πως θα αντιμετωπίσουμε το παραπάνω σύστημα, ας σημειώσουμε ότι, κατά κάποια έννοια, αρκεί να ασχοληθούμε μόνον με συστήματα πρώτης τάξης. Ας θεωρήσουμε μια διαφορική εξίσωση $n^{\text{στης}}$ τάξης

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

Ας ορίσουμε τώρα τις εξής μεταβλητές $u_1, \ldots, u_n$ και ας διατυπώσουμε το σύστημα ως εξής

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να προσπαθήσουμε να λύσουμε ως προς u_1, u_2, $\ldots$, u_n και μόλις τις βρούμε να 'αγνοήσουμε' τις u_2, $u_3 \ldots u_n$ και να θέσουμε $y = u_1$. Παρατηρήστε ότι η y αυτή είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

Παρόμοια είναι η διαδικασία για την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων υψηλότερης τάξης. Μπορούμε για παράδειγμα, να μετατρέψουμε ένα σύστημα k διαφορικών εξισώσεων με k αγνώστους, όλες τάξης n, σε ένα σύστημα $n \times k$ εξισώσεων πρώτης τάξης με $n \times k$ αγνώστους.

Παράδειγμα 3.1.2: Μερικές φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ιδέα με αντίστροφη φορά. Θεωρήστε το σύστημα

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η t. Θέλουμε να βρούμε την λύση που ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση έχουμε $y'' = x'$ και συνεπώς γνωρίζουμε την x' σαν συνάρτηση των x και y.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y'.$$

Άρα έχουμε τώρα την εξίσωση $y''+y'-2y = 0$ της οποίας την λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$ μπορούμε να βρούμε εύκολα. Έχοντας την y μπορούμε να αντικαταστήσουμε και να υπολογίσουμε την x ως εξής

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες $1 = x(0) = -2C_1 + C_2$ και $0 = y(0) = C_1 + C_2$. Συνεπώς, $C_1 = -C_2$ και $1 = 3C_2$. Άρα $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$ και η λύση είναι η εξής

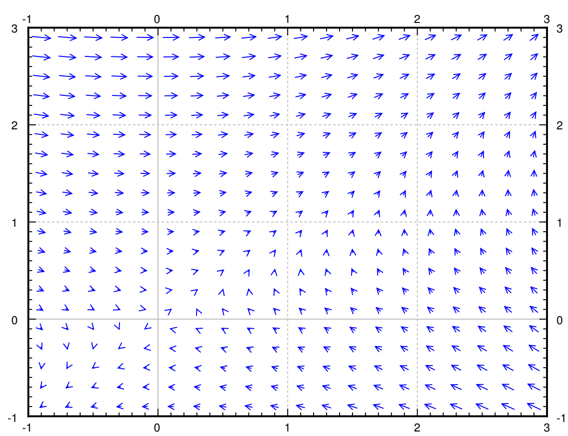
$$x = \frac{2e^{-2t} + e^t}{3}, \qquad y = \frac{-e^{-2t} + e^t}{3}.$$

3.1.1 *Επιβεβαιώστε ότι πράγματι αυτή είναι λύση.*

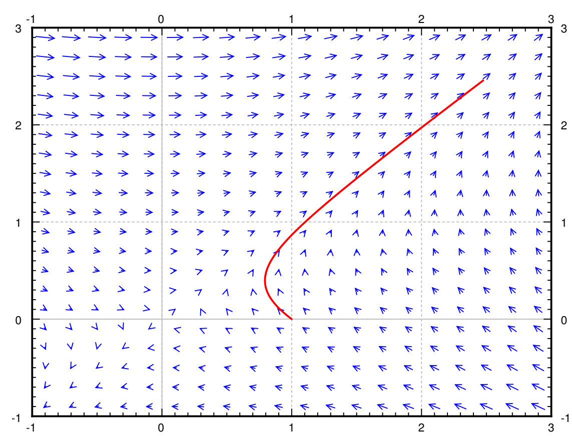
Το παραπάνω παράδειγμα είναι ένα *γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης*. Ταυτόχρονα είναι και ένα μια και οι εξισώσεις δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή t.

Μπορούμε εύκολα να κάνουμε την γραφική παράσταση του *πεδίου διευθύνσεων* ή *διανυσματικό πεδίο* κάθε αυτόνομου συστήματος. Είναι η ίδια γραφική παράσταση του πεδίου κατευθύνσεων που συναντήσαμε προηγουμένως, μόνον που τώρα αντί να ζωγραφίσουμε σε κάθε σημείο την κλίση της λύσης θα ζωγραφίσουμε τη κατεύθυνση (και το μέγεθος). Το προηγούμενο παράδειγμα $x' = 2y - x$, $y' = x$ μας δηλώνει ότι στο σημείο (x, y) η κατεύθυνση στην οποία οφείλουμε να βαδίσουμε για να ικανοποιήσουμε τις εξισώσεις του συστήματος είναι η κατεύθυνση που ορίζει το εξής διάνυσμα $(2y - x, x)$. Η ταχύτητα με την οποία πρέπει να βαδίσουμε πρέπει να είναι ίση με το μέτρο του εν λόγω διανύσματος. Ζωγραφίζουμε λοιπόν το διάνυσμα $(2y-x, x)$ στο σημείο (x, y) και κάνουμε το ίδιο για όποιο σημείο του xy-επιπέδου επιθυμούμε. Ενδεχομένως βεβαίως να χρειασθεί να αλλάξουμε κλίμακα στο γράφημά μας εάν θέλουμε να προσθέσουμε πολλά σημείο στο ίδιο πεδίο κατευθύνσεων. Δείτε στο Σχήμα 3.1.

Μπορούμε τώρα να ζωγραφίσουμε την διαδρομή της λύσης στο επίπεδο. Συγκεκριμένα, υποθέστε ότι η λύση δίδεται από τις $x = f(t)$, $y = g(t)$, οπότε και μπορούμε να επιλέξουμε ένα διάστημα του t (ας επιλέξουμε για παράδειγμα $0 \leq t \leq 2$) και να ζωγραφίσουμε όλα τα σημεία $(f(t), g(t))$ για t μέσα στο διάστημα που επιλέξουμε. Η εικόνα που θα πάρουμε με τον τρόπο αυτό συνήθως ονομάζεται *παράσταση φάσεων* (ή παράσταση φάσης επιπέδου). Την συγκεκριμένη καμπύλη που παίρνουμε ονομάζουμε *τροχιά* ή *καμπύλη επίλυσης*. Μπορείτε να δείτε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στο Σχήμα 3.2. Στο Σχήμα αυτό η καμπύλη ξεκινά από το σημείο $(1, 0)$ και κινείται πάνω στο πεδίο διευθύνσεων για απόσταση 2 μονάδες του t. Μια και έχουμε ήδη λύσει το εν λόγω σύστημα ξέρουμε τα $x(2)$ και $y(2)$. Έχουμε λοιπόν ότι $x(2) \approx 2.475$ και $y(2) \approx 2.457$. Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στο άνω δεξιά άκρο της γραφικής παράστασης της λύσης στο Σχήμα.



Σχήμα 3.1: Το πεδίο κατευθύνσεων του συστήματος $x' = 2y - x$, $y' = x$.



Σχήμα 3.2: Το πεδίο κατευθύνσεων του συστήματος $x' = 2y - x$, $y' = x$ με την τροχιά της λύσης που ξεκινά από το σημείο ωιτη $(1, 0)$ για $0 \leq t \leq 2$.

Παρατηρήστε την ομοιότητα των παραπάνω σχημάτων με αυτά που συναντήσαμε για τα αυτόνομα συστήματα μιας διάστασης. Φανταστείτε τώρα πόσο πιο περίπλοκα θα γίνουν τα πράγματα εάν προσθέσουμε ακόμα μια διάσταση.

Σημειώστε επίσης ότι μπορούμε να ζωγραφίσουμε παραστάσεις φάσεων και τροχιών στο xy-επίπεδο ακόμα και για μη αυτόνομα συστήματα. Στην περίπτωση αυτή όμως δεν μπορούμε να ζωγραφίσουμε πεδία διευθύνσεων, μια και τα εν λόγω πεδία αλλάζουν όταν το t αλλάζει. Μπορούμε βεβαίως να έχουμε για κάθε t και ένα διαφορετικό πεδίο διευθύνσεων.

3.1.1 Ασκήσεις

3.1.2 *Βρείτε την γενική λύση του συστήματος* $x_1' = x_2 - x_1 + t$, $x_2' = x_2$.

3.1.3 *Βρείτε την γενική λύση του συστήματος* $x_1' = 3x_1 - x_2 + e^t$, $x_2' = x_1$.

3.1.4 *Γράψτε την εξίσωση* $ay'' + by' + cy = f(x)$ *σαν ένα σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης.*

3.1.5 *Γράψτε τις εξισώσεις* $x'' + y^2y' - x^3 = \sin(t)$, $y'' + (x' + y')^2 - x = 0$ *σαν ένα σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης.*

3.2 Γραμμικά συστήματα ΣΔΕ

Πριν ξεκινήσετε την μελέτη της παραγράφου αυτής είναι αναγκαίο να κάνετε μια σύντομη επανάληψη της Γραμμικής Άλγεβρας. Θα χρειασθείτε κάποια βασικά στοιχεία όπως πολλαπλασιασμός πινάκων, ορίζουσες και ιδιοτιμές.

Ας ασχοληθούμε πρώτα με συναρτήσεις διανυσμάτων και πινάκων. Αυτές δεν είναι τίποτε παραπάνω παρά διανύσματα και πίνακες τα στοιχεία των οποίων εξαρτώνται από κάποια μεταβλητή η οποία ας υποθέσουμε ότι είναι η t. Τότε μια *διάνυσμα συναρτήσεων* $\vec{x}(t)$ είναι κάτι που έχει την εξής μορφή

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια ένας *πίνακας συναρτήσεων* είναι κάτι που έχει την εξής μορφή

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Η παράγωγος $A'(t)$ ή $\frac{dA}{dt}$ είναι και αυτή ένας πίνακας συναρτήσεων ο οποίος στην $ij^{\sigma\tau\eta}$ θέση έχει την συνάρτηση $a'_{ij}(t)$.

Για τις πίνακες συναρτήσεων ισχύουν οι ίδιοι κανόνες παραγώγισης με αυτούς των συμβατικών συναρτήσεων. Δηλαδή για κάθε πίνακες συναρτήσεων A και B, για κάθε σταθερό πραγματικό αριθμό c και για κάθε συμβατικό σταθερό πίνακα C ισχύουν (υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις των πινάκων είναι συνεπείς με τις πράξεις και τις ισότητες βεβαίως) οι ταυτότητες

$$\begin{aligned} (A+B)' &= A' + B' \\ (AB)' &= A'B + AB' \\ (cA)' &= cA' \\ (CA)' &= CA' \\ (AC)' &= A'C \end{aligned}$$

Ένα *γραμμικό σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης* είναι ένα σύστημα το οποίο μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t).$$

P είναι ένας πίνακας συναρτήσεων, και $\vec{x}$ και $\vec{f}$ είναι διανύσματα συναρτήσεων. Συχνά θα αποκρύβουμε την εξάρτηση από το t και θα γράφουμε $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$. Η λύση είναι προφανώς ένα διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}$ το οποίο ικανοποιεί το σύστημα.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις

$$x_1' = 2tx_1 + e^t x_2 + t^2,$$
$$x_2' = \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t,$$

μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ {}^1\!/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Θα επικεντρωθούμε κυρίως σε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μόνον γραμμικές, αλλά και με *σταθερούς συντελεστές*. Δηλαδή, ο πίνακας P είναι ένας συμβατικός πίνακας και στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και δεν εξαρτάται από το t.

Όταν $\vec{f} = \vec{0}$ (το μηδενικό διάνυσμα), τότε λέμε ότι το σύστημα είναι *ομογενές*. Η αρχή της υπέρθεσης ισχύει και για ομογενή γραμμικά συστήματα όπως ακριβώς ισχύει και για μια μόνο ομογενή εξίσωση.

Θεώρημα 3.2.1 (Υπέρθεση)**.** *Έστω $\vec{x}\,' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ. Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η*

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{3.1}$$

είναι επίσης λύση. Αν επιπρόσθετα, είναι ένα σύστημα n εξισώσεων (P είναι $n \times n$), και τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή της εξίσωσης (3.1)*.*

Η έννοια της γραμμική ανεξαρτησία συναρτήσεων με διανύσματα είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτή των συμβατικών διανυσμάτων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή, τα διανύσματα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν η

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

έχει μόνον μια λύση, την $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ο γραμμικός συνδυασμός $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$ μπορεί πάντα να γραφθεί στην μορφή

$$X(t)\,\vec{c},$$

όπου $X(t)$ είναι ένας πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, και όπου $\vec{c}$ είναι το στηλοδιάνυσμα με στοιχεία $c_1, \ldots, c_n$. Ο $X(t)$ ονομάζεται *θεμελιώδης πίνακας*, ή *θεμελιώδης πίνακας επίλυσης*.

Μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα ομογενών γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης με την ίδια πρακτική που χρησιμοποιήσαμε για μια μόνη εξίσωση του ίδιου τύπου.

Θεώρημα 3.2.2. *Εάν $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$ είναι ένα γραμμικό σύστημα ΣΔΕ και εάν $\vec{x}_p$ μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση του, τότε κάθε λύση του μπορεί να γραφθεί στην μορφή*

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p,$$

όπου $\vec{x}_c$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης ($\vec{x}\,' = P\vec{x}$).

Συνεπώς η διαδικασία είναι ίδια με προηγουμένως. Βρίσκουμε μια συγκεκριμένη λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, μετά βρίσκουμε μια γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και τέλος προσθέτουμε τις δύο αυτές λύσεις.

Έστω ότι έχουμε βρει την εξής γενική λύση $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$ και θέλουμε να βρούμε την λύση που ικανοποιεί κάποιες αρχικές συνθήκες της μορφής $\vec{x}(t_0) = \vec{b}$ όπου $\vec{b}$ κάποιο σταθερό διάνυσμα. Έστω επίσης ότι το $X(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας επίλυσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (δηλαδή οι στήλες του X είναι λύσεις). Τότε η γενική λύση έχει την εξής μορφή

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Ακολούθως πρέπει να βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{c}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{b} = \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0).$$

Με άλλα λόγια πρέπει να λύσουμε το εξής μη-ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$X(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0)$$

ως προς $\vec{c}$.

Παράδειγμα 3.2.1: Στο §3.1 λύσαμε το εξής σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

Μια και πρόκειται για ένα ομογενές σύστημα, έχουμε $\vec{f} = \vec{0}$. Γράφουμε το σύστημά μας ως εξής

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Βρήκαμε ότι η γενική λύση είναι η $x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$. Άρα σε μορφή πινάκων, ο θεμελιώδης πίνακας επίλυσης είναι ο εξής

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι οι στήλες του πίνακα αυτού είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Συνεπώς για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$X(0)\vec{c} = \vec{b},$$

ή με άλλα λόγια,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Μετά από μια απλή πράξη μεταξύ των γραμμών βρίσκουμε ότι $\vec{c} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3/2 \end{smallmatrix}\right]$. Άρα η λύση μας είναι

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Είναι όπως βλέπουμε ίδια με την λύση που ήδη βρήκαμε παραπάνω.

3.2.1 Ασκήσεις

3.2.1 *Γράψτε το σύστημα* $x_1' = 2x_1 - 3tx_2 + \sin t$, $x_2' = e^t x_1 + 3x_2 + \cos t$ *στην μορφή* $\vec{x}\,' = P(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$.

3.2.2 *α) επιβεβαιώστε ότι το σύστημα* $\vec{x}\,' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right] \vec{x}$ *έχει δύο λύσεις* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] e^{4t}$ *και* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] e^{-2t}$. *β) Δώστε την γενική λύση. ς) Δώστε την γενική λύση στην μορφή* $x_1 = ?$, $x_2 = ?$ *(δηλαδή δώστε την μορφή κάθε στοιχείου της λύσης).*

3.2.3 *Επιβεβαιώστε ότι τα* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] e^t$ *και* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] e^t$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Υπόδειξη: Αντικαταστήστε το* $t = 0$.

3.2.4 *Επιβεβαιώστε ότι τα* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] e^t$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] e^t$ *και* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] e^{2t}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Υπόδειξη: Πρέπει προφανώς να δράσετε ποιο έξυπνα από ότι στην προηγούμενη άσκηση.*

3.2.5 *Επιβεβαιώστε ότι τα* $\left[\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right]$ *και* $\left[\begin{smallmatrix} t^3 \\ t^4 \end{smallmatrix}\right]$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

3.3 Μέθοδος ιδιοτιμών

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε πώς θα μπορούμε να λύνουμε γραμμικά ομογενή συστήματα ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ιδιοτιμών. Έστω το εξής γραμμικό ομογενές σύστημα

$$\vec{x}' = P\vec{x}.$$

Ας προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την μέθοδο που ήδη χρησιμοποιήσαμε για μια εξίσωση σταθερών συντελεστών χρησιμοποιώντας την μαντεψιά $e^{\lambda t}$. Επειδή όμως το $\vec{x}$ είναι διάνυσμα, είναι λογικό να προτιμήσουμε την εξής μαντεψιά $\vec{v}e^{\lambda t}$, όπου $\vec{v}$ είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα. Την αντικαθιστούμε λοιπόν στην εξίσωση και έχουμε

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = P\vec{v}e^{\lambda t}.$$

Διαιρούμε με $e^{\lambda t}$ και παρατηρούμε ότι πρέπει να βρούμε ένα αριθμό λ και ένα διάνυσμα $\vec{v}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\lambda\vec{v} = P\vec{v}.$$

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θα χρειασθούμε μερικά βασικά στοιχεία γραμμικής άλγεβρα.

3.3.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων

Έστω ο τετραγωνικός και σταθερός πίνακας A. Έστω επίσης ότι υπάρχει ένας αριθμός λ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ τέτοια ώστε

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ονομάζουμε το εν λόγω λ *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το $\vec{v}$ το *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο λ.

Παράδειγμα 3.3.1: Ο πίνακας $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ έχει μια ιδιοτιμή $\lambda = 2$ το οποίο αντιστοιχεί στο εξής ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ επειδή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας ξαναγράψουμε την παραπάνω εξίσωση στην εξής μορφή

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μη-μηδενική λύση $\vec{v}$ μόνον όταν ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι μη-αντιστρέψιμος. Εάν ήταν αντιστρέψιμος θα μπορούσαμε να έχουμε $(A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\vec{v} = (A - \lambda I)^{-1}\vec{0}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\vec{v} = \vec{0}$. Άρα ο A έχει το λ ιδιοτιμή αν και μόνον αν το λ είναι λύση της εξίσωσης

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Σημειώστε ότι η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε μια ιδιοτιμή χωρίς να πρέπει απαραίτητα να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε αργότερα, αφού έχουμε ήδη υπολογίσει το λ πρώτα.

Παράδειγμα 3.3.2: Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Έχουμε

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (2-\lambda)^2\big((2-\lambda)^2 - 1\big) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

και συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, και $\lambda = 3$.

Σημειώστε ότι για έναν $n\times n$ πίνακα, το πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ είναι βαθμού n, και συνεπώς θα έχουμε γενικά n ιδιοτιμές.

Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ, χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

και λύνουμε για ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$. Αν το λ είναι πράγματι ιδιοτιμή τότε κάτι τέτοιο είναι πάντα εφικτό.

Παράδειγμα 3.3.3: Βρείτε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$ του πίνακα $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Έχουμε

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $v_1 - v_2 = 0$, $v_3 = 0$, όπου η v_2 είναι μια ελεύθερη μεταβλητή. Μπορούμε να επιλέξουμε μια οποιαδήποτε τιμή για το v_2 και να θέσουμε $v_1 = v_2$ και φυσικά $v_3 = 0$. Για παράδειγμα, $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ας δοκιμάσουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι λοιπόν σωστό.

3.3.1(εύκολη) *Είναι τα ιδιοδιανύσματα μοναδικά; Μπορείτε να βρείτε ένα διαφορετικό από αυτό που βρήκατε παραπάνω ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων;*

3.3.2 Η μέθοδος των ιδιοτιμών με πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

Θεωρήστε την εξίσωση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του πίνακα P, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Παρατηρήστε τώρα ότι οι συναρτήσεις $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$, $\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$, $\ldots$, $\vec{v}_n e^{\lambda_n t}$ είναι λύσεις της εξίσωσης και συνεπώς η $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}$ είναι μια λύση.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $\vec{x}\,' = P\vec{x}$. Αν P είναι ένας $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ τότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, και η γενική λύση της ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής*

$$\boxed{\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}.}$$

Παράδειγμα 3.3.4: Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Έχουμε ήδη βρει ότι οι ιδιοτιμές είναι οι $1, 2, 3$. Βρήκαμε ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 είναι το $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Παρόμοια μπορούμε να βρούμε ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 είναι το $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ ενώ αυτό που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι το $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ (ελέγξτε το σαν άσκηση). Άρα η γενική λύση μας είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} + c_3 e^{3t} \\ -c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ -c_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

3.3.2 *Επιβεβαιώστε ότι η παραπάνω πράγματι αποτελεί λύση του συστήματος.*

Σημείωση: Εάν γράφουμε μια γραμμική ομογενή εξίσωση $n^{\text{στης}}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές σαν ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης (όπως ήδη κάναμε στην παράγραφο §3.1) τότε η εξίσωση ιδιοτιμών

$$\det(P - \lambda I) = 0.$$

είναι ουσιαστικά το ίδιο με την χαρακτηριστική εξίσωση που συναντήσαμε στις παραγράφους §2.2 και §2.3.

3.3.3 Μιγαδικές ιδιοτιμές

Ένας πίνακας μπορεί να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές ακόμα και στην περίπτωση που όλα τα στοιχεία του είναι πραγματικοί αριθμοί. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lambda = 1 \pm i$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι βεβαίως και αυτά μιγαδικά

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$
$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

Προφανώς από τις δύο εξισώσεις $iv_1 + v_2 = 0$ και $-v_1 + iv_2 = 0$ θα επιλέξουμε να λύσουμε μόνον την μία (η άλλη είναι πολλαπλάσιά της). Εάν επιπρόσθετα επιλέξουμε για παράδειγμα, $v_2 = 1$ θα καταλήξουμε στο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι στην ιδιοτιμή $1+i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την λύση ως εξής

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} + c_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} c_1 i e^{(1-i)t} - c_2 i e^{(1+i)t} \\ c_1 e^{(1-i)t} + c_2 e^{(1+i)t} 1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα όμως πρέπει να ψάξουμε για ποίες μιγαδικές τιμές των c_1 και c_2 ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την πρακτική που βασίζεται στον τύπο του *Euler* και την οποία συναντήσαμε παραπάνω αλλά ας εργαστούμε κάπως πιο έξυπνα πρώτα.

Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα (ούτε με την δεύτερη ιδιοτιμή) μια και όλες οι μιγαδικές ιδιοτιμές (ενός πραγματικού πίνακα) συναντιόνται σε ζεύγη συζυγών. Μπορείτε εάν Θέλετε να αποδείξετε την ενδιαφέρουσα αυτή ιδιότητα σαν άσκηση.

Πρώτα ας θυμηθούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού z ως εξής $\frac{z+\bar{z}}{2}$, όπου η γραμμή πάνω από τον z σημαίνει $\overline{a+ib} = a - ib$. Έτσι παίρνουμε τον *συζυγή μιγαδικό* αριθμό του z. Σημειώστε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a έχουμε ότι $\bar{a} = a$. Παρόμοια μπορούμε να πάρουμε τον συζυγή διανυσμάτων και πινάκων. Εάν ο P είναι πραγματικός τότε $\overline{P} = P$. Σημειώστε επίσης ότι $\overline{P\vec{x}} = \overline{P}\,\overline{\vec{x}} = P\overline{\vec{x}}$ ή

$$\overline{(P - \lambda I)\vec{v}} = (P - \bar{\lambda} I)\overline{\vec{v}}.$$

Συνεπώς αν το $\vec{v}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $a+ib$, τότε το $\overline{\vec{v}}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $a-ib$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a+ib$ είναι μια μιγαδική ιδιοτιμή του P η οποία αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$ οπότε και έχουμε ότι η

$$\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(a+ib)t}$$

είναι μια λύση (με μιγαδικές τιμές) του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$. Τότε παρατηρήστε ότι και η $\overline{e^{a+ib}} = e^{a-ib}$ και συνεπώς και η

$$\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1} = \overline{\vec{v}}e^{(a-ib)t}$$

είναι επίσης λύση. Η συνάρτηση

$$\vec{x}_3 = \operatorname{Re}\vec{x}_1 = \operatorname{Re}\vec{v}e^{(a+ib)t} = \frac{\vec{x}_1 + \overline{\vec{x}_1}}{2} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$$

είναι και αυτή λύση και μάλιστα με πραγματικές τιμές. Παρόμοια μια και το $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ είναι το φανταστικό μέρος η

$$\vec{x}_4 = \operatorname{Im}\vec{x}_1 = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2i}.$$

είναι μια λύση πραγματικών τιμών επίσης. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι $\vec{x}_3$ και $\vec{x}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Επιστρέφοντας τώρα στο πρόβλημά μας έχουμε

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι

$$\operatorname{Re}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{Im}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix},$$

είναι οι λύσεις που ψάχνουμε.

Η γενική λύση είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t \\ c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Όταν τα c_1 και c_2 είναι πραγματικοί αριθμοί τότε η λύση αυτή έχει πραγματικές τιμές. Μπορούμε τώρα να λύσουμε ως προς οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες μας δοθούν ως εξής.

Όταν έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές τότε αυτές έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Επιλέγουμε μια από αυτές, έστω την $\lambda = a + ib$ και βρίσκουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$. Σημειώστε ότι τα $\operatorname{Re} \vec{v} e^{(a+ib)t}$ και $\operatorname{Im} \vec{v} e^{(a+ib)t}$ είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και με πεδίο τιμών τους πραγματικούς. Συνεχίζουμε την διαδικασία επιλέγοντας το ένα από το επόμενο ζεύγος των μιγαδικών ιδιοτιμών ή την επόμενη πραγματική ιδιοτιμή και υπολογίζω τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Με τον τρόπο αυτό οι n διαφορετικές μεταξύ τους (πραγματικές ή μιγαδικές) ιδιοτιμές θα μας οδηγήσουν σε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Μπορούμε λοιπόν τώρα να βρούμε γενικές λύσεις με πεδίο τιμών τους πραγματικούς κάθε ομογενούς συστήματος του οποίου ο πίνακας έχει διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές. Η περίπτωση που υπάρχουν ιδιοτιμές κάποιας πολλαπλότητας είναι πιο περίπλοκη και με αυτήν θα ασχοληθούμε στην παράγραφο §3.6.

3.3.4 Ασκήσεις

3.3.3 *Έστω ο 3×3 πίνακας A με μια ιδιοτιμή 3 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Βρείτε το $A\vec{v}$.*

3.3.4 *α) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος $x_1' = 2x_1$, $x_2' = 3x_2$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ιδιοτιμών (γράψτε πρώτα το σύστημα στην μορφή $\vec{x}\,' = A\vec{x}$). β) Λύστε το σύστημα λύνοντας την κάθε εξίσωση μόνη της και συγκρίνατέ την γενική λύση που θα βρείτε με τον τρόπο αυτό με αυτή που βρήκατε παραπάνω.*

3.3.5 *Βρείτε την γενική λύση του συστήματος $x_1' = 3x_1 + x_2$, $x_2' = 2x_1 + 4x_2$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ιδιοτιμών.*

3.3.6 *Βρείτε την γενική λύση του συστήματος $x_1' = x_1 - 2x_2$, $x_2' = 2x_1 + x_2$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ιδιοτιμών. Προσπαθήστε έτσι ώστε η λύση σας να μην συμπεριλαμβάνει μιγαδικά εκθετικά.*

3.3.7 *α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 6 \\ 10 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. β) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.*

3.3.8 *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.*

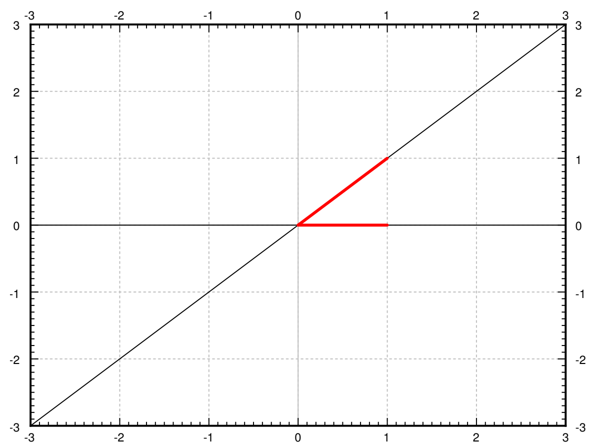
3.4 Συστήματα δύο διαστάσεων και τα διανυσματικά πεδία τους

Ας επικεντρωθούμε για λίγο σε ομογενή συστήματα στο επίπεδο. Συγκεκριμένα ας εξετάσουμε την μορφή των διανυσματικών πεδίων και την εξάρτησή τους από τις ιδιοτιμές. Έχουμε λοιπόν έναν 2×2 πίνακα P και το εξής σύστημα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Ας δούμε πως μπορούμε, με βάση τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα, να ανακαλύψουμε οπτικά πως μοιάζει το διανυσματικό πεδίο.

Περίπτωση 1. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και θετικές. Ας βρούμε τις δύο ιδιοτιμές και ας κάνουμε την γραφική τους παράσταση. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον εξής πίνακα $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Οι ιδιοτιμές είναι 1 και 2 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Δείτε το Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Τα ιδιοδιανύσματα του P.

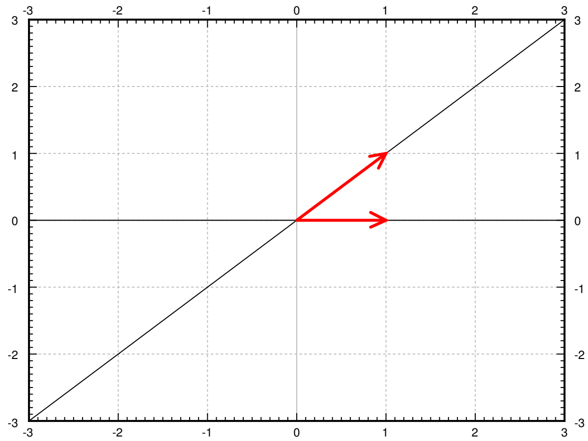
Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα x και y είναι συνευθειακά με την γραμμή που ορίζει ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$ κάποιας ιδιοτιμής λ. Δηλαδή έχουμε $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = a\vec{v}$ για κάποιο αριθμό a. Τότε έχουμε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P(a\vec{v}) = a(P\vec{v}) = a\lambda\vec{v}.$$

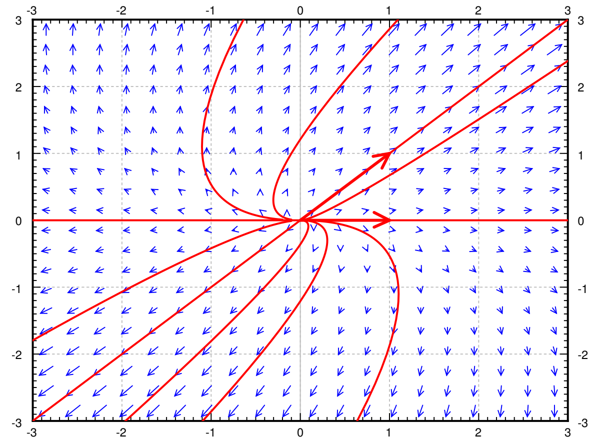
Η παράγωγος λοιπόν είναι πολλαπλάσιο του $\vec{v}$ και συνεπώς καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το $\vec{v}$. Όταν $\lambda > 0$, η διεύθυνση της παραγώγου ταυτίζεται με την διεύθυνση του $\vec{v}$ όταν το a είναι θετικό, ενώ όταν είναι αρνητικό η διεύθυνση είναι ακριβώς αντίθετη. Ας χρησιμοποιήσουμε βέλη για να παραστήσουμε τις κατευθύνσεις. Δείτε το Σχήμα 3.4 στην παρούσα σελίδα.

Συμπληρώνουμε το σχήμα προσθέτοντας μερικά ακόμα βέλη και προσθέτοντας την γραφική παράσταση μερικών λύσεων. Δείτε το Σχήμα 3.5 στην επόμενη σελίδα. Παρατηρήστε ότι η εικόνα φαίνεται σαν να υπάρχει μια πηγή από την οποία ξεπηδάν βέλη. Για τον λόγο αυτό ονομάζουμε το τύπο αυτό της γραφικής παράστασης *πηγή* ή μερικές φορές *ασταθή κόμβοασταθής κόμβος*.

Περίπτωση 2. Έστω τώρα ότι και οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πίνακα της περίπτωσης 1 με αλλαγμένα όλα του τα πρόσημα, $\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$. Οι ιδιοτιμές του είναι -1 και -2 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια, δηλαδή $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και

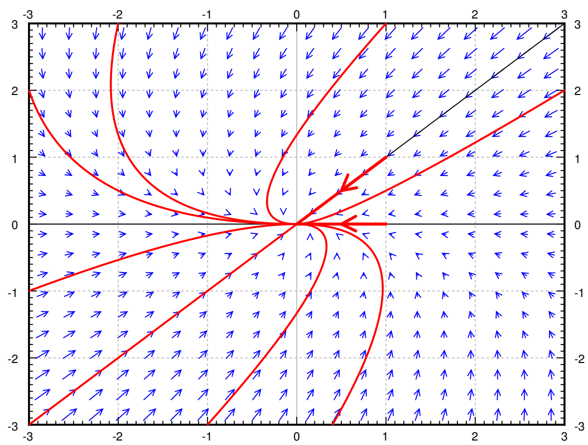


Σχήμα 3.4: Τα ιδιοδιανύσματα του P με τις κατευθύνσεις.

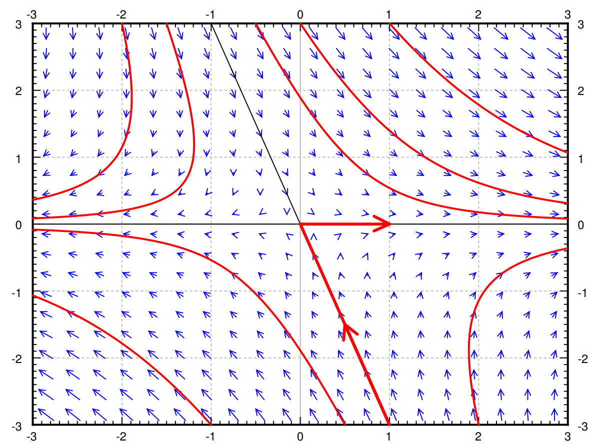


Σχήμα 3.5: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου πηγής μαζί με τα ιδιοδιανύσματα και τις λύσεις.

$\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$. Τόσο οι υπολογισμοί μας όσο και οι εικόνες είναι παρόμοιες με την περίπτωση 1. Η μόνη διαφορά είναι το ότι οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές και συνεπώς η φορά των βελών έχει αντιστραφεί. Παίρνουμε λοιπόν την εικόνα του Σχήματος 3.6. Κάθε τέτοιου είδους εικόνα την ονομάζουμε *καταβόθρα* η μερικές φορές *ευσταθή κόμβοευσταθής κόμβος*.



Σχήμα 3.6: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου καταβόθρας μαζί με τα ιδιοδιανύσματα και τις λύσεις.



Σχήμα 3.7: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου σαγματικού σημείου μαζί με τα ιδιοδιανύσματα και τις λύσεις.

Περίπτωση 3. Έστω ότι μια ιδιοτιμή είναι θετική και η άλλη αρνητική, όπως για παράδειγμα ο πίνακας $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ οποίος έχει ιδιοτιμές 1 και -2 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα ίδια με παραπάνω, δηλαδή $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$. Αντιστρέφουμε λοιπόν τα βέλη σε μια γραμμή (αυτή που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή) και παίρνουμε την εικόνα του Σχήματος 3.7 στην προηγούμενη σελίδα. Εικόνες αυτού του είδους ονομάζονται *σαγματικά σημείασαγματικό σημείο.*

Στις επόμενες τρεις περιπτώσεις θα υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές. Βεβαίως στις περιπτώσεις αυτές και τα ιδιοδιανύσματα είναι μιγαδικά και συνεπώς δεν θα μπορέσουμε να κάνουμε την γραφική τους παράσταση στο επίπεδο.

Περίπτωση 4. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές, δηλαδή έχουν την μορφή $\pm ib$. Έστω λοιπόν ο πίνακας $P = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ οι ιδιοτιμές του οποίου είναι $\pm 2i$ και τα ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2i \end{smallmatrix}\right]$. Ας θεωρήσουμε την ιδιοτιμή $2i$ και το ιδιοδιάνυσμα της $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$ και σημειώστε ότι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $\vec{v}e^{i2t}$ είναι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} &= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix}, \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{i2t} &= \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

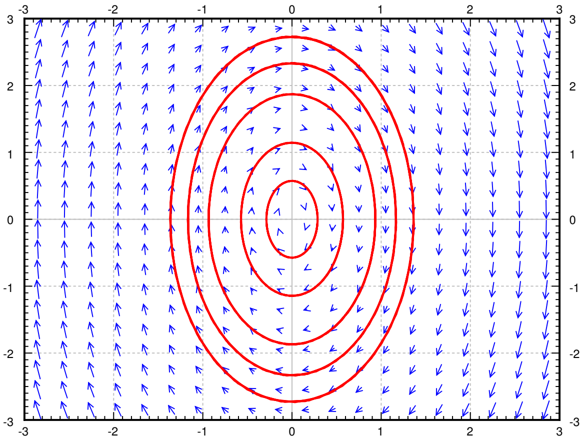
Μπορούμε βεβαίως να πάρουμε όποιο γραμμικό συνδυασμό τους θέλουμε. Τον ποιόν συγκεκριμένα από αυτούς θα επιλέξουμε θα μας το καθορίσουν οι αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα, το πραγματικό μέρος είναι μια παραμετρική εξίσωση έλλειψης όπως και το φανταστικό μέρος και συνεπώς κάθε γραμμικός συνδυασμός τους. Δεν είναι δύσκολο να συνειδητοποιήσουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν γενικά για την περίπτωση που έχουμε καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές οπότε και λέμε ότι έχουμε λύσεις *ελλειπτικών (διανυσματικών πεδίων).* Ο τύπος αυτός της εικόνας συχνά λέγετε *κέντρο.* Δείτε το Σχήμα 3.8 στην παρούσα σελίδα.

Περίπτωση 5. Έστω τώρα ότι οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Έστω λοιπόν ότι οι ιδιοτιμές είναι $a \pm ib$ για κάποιο $a > 0$. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ οι ιδιοτιμές του οποίου είναι $1 \pm 2i$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2i \end{smallmatrix}\right]$. Παίρνουμε την ιδιοτιμή $1+2i$ και το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$ και σημειώνουμε ότι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της $\vec{v}e^{(1+2i)t}$ είναι

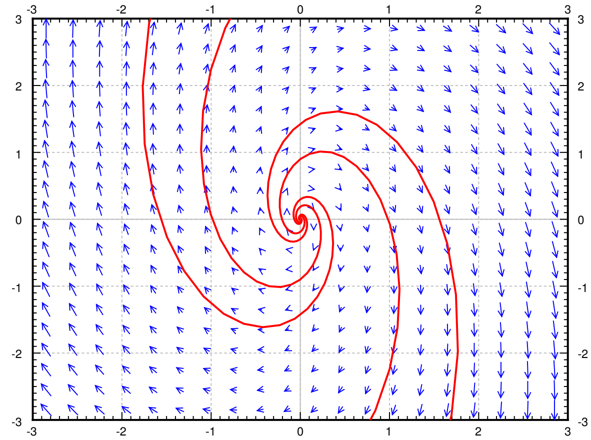
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} &= e^t \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix}, \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} &= e^t \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε το e^t στην αρχή της λύσης. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις αυξάνουν σε μέγεθος σπειροειδώς όσο απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς έχουμε μια *σπειροειδή πηγήσπειροειδής πηγή.* Δείτε το Σχήμα 3.9 στην επόμενη σελίδα.

Περίπτωση 6. Τέλος ας θεωρήσουμε την περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών με αρνητικό ακέραιο μέρος. Δηλαδή θα έχουμε ιδιοτιμές της μορφής $-a \pm ib$ για κάποιο $a > 0$. Για



Σχήμα 3.8: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου κέντρου.



Σχήμα 3.9: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου σπειροειδούς πηγής.

παράδειγμα έστω ο πίνακας $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ οι ιδιοτιμές του $-1 \pm 2i$ και τα ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2i \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$. Παίρνουμε την ιδιοτιμή $-1-2i$ και το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right]$ και το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $\vec{v}e^{(1+2i)t}$ τα οποία είναι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix}, \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{(-1-2i)t} &= e^{-t} \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

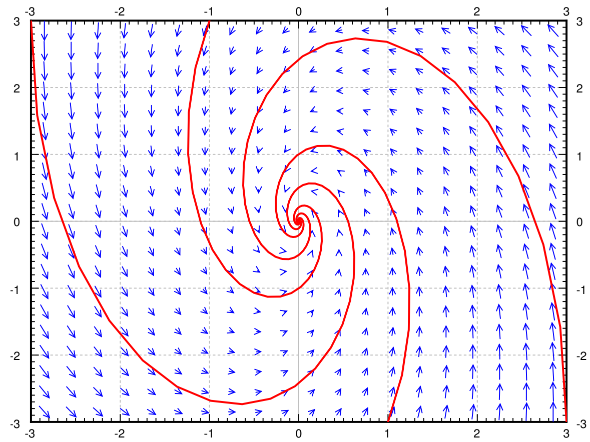
Παρατηρήστε το e^{-t} στην αρχή της λύσης. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις ελαττώνουν το μέγεθός τους όσο απομακρύνονται σπειροειδώς από την αρχή των αξόνων. Άρα έχουμε μια *σπειροειδή καταβόθρασπειροειδής καταβόθρα*. Δείτε το Σχήμα 3.10 στην επόμενη σελίδα.

Ας συνοψίσουμε την συμπεριφορά των γραμμικών ομογενών δισδιάστατων συστημάτων στον εξής Πίνακα 3.1.

3.4.1 Ασκήσεις

3.4.1 *θεωρήστε την εξής εξίσωση ενός συστήματος μάζας ελατηρίου* $mx'' + cx' + kx = 0$, *με* $m > 0$, $c \geq 0$ *και* $k > 0$. *α) Μετατρέψτε την εξίσωση αυτή σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. β) Καθορίστε την συμπεριφορά του συστήματος για διαφορετικές τιμές των* m, c, k. *ς) Μπορείτε να εξηγήσετε, με βάση την φυσική σας αντίληψη, γιατί εμφανίζονται όλες τα διαφορετικά είδη των συμπεριφορών της λύσης στο εν λόγω σύστημα;*

3.4.2 *Μπορείτε να ανακαλύψετε τι συμβαίνει στην περίπτωση που* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ *όπου έχουμε μια διπλή ιδιοτιμή και μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα; Πως θα μοιάζει η αντίστοιχη εικόνα;*



Σχήμα 3.10: Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου σπειροειδούς καταβόθρας.

Ιδιοτιμές	Συμπεριφορά
Πραγματικές και αμφότερες θετικές	πηγή / ασταθής κόμβος
Πραγματικές και αμφότερες αρνητικές	καταβόθρα / ευσταθής κόμβος
Πραγματικές και με αντίθετα πρόσημα	σαγματικό
Καθαρά φανταστικές	ςεντερ ποιντ / έλλειψη
Μιγαδικές με θετικό ακέραιο μέρος	σπειροειδής πηγή
Μιγαδικές με αρνητικό ακέραιο μέρος	σπειροειδής καταβόθρα

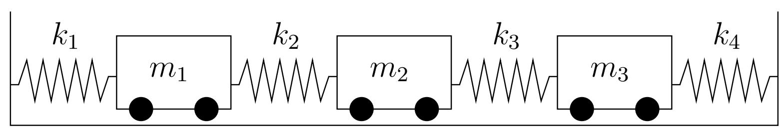
Πίνακας 3.1: Σύνοψη της συμπεριφοράς γραμμικών ομογενών δισδιάστατων συστημάτων.

3.4.3 *Μπορείτε να ανακαλύψετε τι συμβαίνει στην περίπτωση που* $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. *Σε ποια από τις γνωστές εικόνες αντιστοιχεί;*

3.5 Συστήματα δεύτερης τάξης και εφαρμογές

3.5.1 Συστήματα μάζας ελατηρίου χωρίς υστέρηση

Παρόλο που όπως έχουμε αναφέρει, συνήθως εξετάζουμε συστήματα πρώτης τάξης μόνον, μερικές φορές είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό να μελετούμε φαινόμενα όπως ακριβώς εμφανίζονται στην πράξη και τα οποία ενδεχομένως να είναι δεύτερης τάξης. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε 3 σωματίδια συνδεδεμένα με ελατήρια μεταξύ δύο τοίχων. Προφανώς το πλήθος των σωματιδίων (και των ελατηρίων) να είναι πολύ μεγαλύτερο αλλά χάριν απλότητας ας περιοριστούμε στα 3. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η τριβή είναι αμελητέα, δηλαδή έχουμε ένα σύστημα χωρίς υστέρηση. Έστω επίσης ότι τα σωματίδια έχουν μάζα m_1, m_2, και m_3 και τα ελατήρια έχουν σταθερές k_1, k_2, k_3, και k_4. Έστω τέλος ότι x_1 είναι η μετατόπιση του πρώτου σωματιδίου από την θέση ισορροπίας ενώ τα x_2 και x_3 είναι οι μετατόπισης του δεύτερου και τρίτου σωματιδίου. Ας θεωρήσουμε όπως συνηθίζουμε, ότι η κίνηση προς τα δεξιά αντιστοιχεί σε θετικές τιμές μετατόπισης (όσο το x_1 αυξάνει τόσο το πρώτο σωματίδιο μετακινείται δεξιά). Δείτε το Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Σύστημα σωματιδίων με ελατήρια.

Το απλό αυτό σύστημα εμφανίζεται σε απροσδόκητα ίσως πολλές εφαρμογές με παράξενο τρόπο. Ίσως αυτό να οφείλεται στο ότι ο κόσμος μας αποτελείται ουσιαστικά από άπειρα το πλήθος μικρά αλληλεπιδρώντα σωματίδια ή τμήματα ύλης.

Ας επικεντρωθούμε σε εξισώσεις που αφορούν συστήματα τριών σωματιδίων. Με βάση τον νόμο του *Hooke* έχουμε ότι η δύναμη που εφαρμόζει ένα ελατήριο σε κάποιο σωματίδιο ισούται με το γινόμενο της σταθεράς του ελατηρίου επί την μετατόπισή του. Με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η δύναμη ισούται με την μάζα επί την επιτάχυνση. Συνεπώς, εάν αθροίσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σωματίδιο, προσέχοντας να βάλουμε το σωστό πρόσημο σε κάθε όρο ανάλογα με την κατεύθυνση στην οποία δρα η δύναμη, καταλήγουμε στο εξής σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{aligned}
m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) && = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2,\\
m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) && = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3,\\
m_3x_3'' &= -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3 && = k_3x_2 - (k_3 + k_4)x_3.
\end{aligned}$$

Ας ορίσουμε τους πίνακες

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad K = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) \end{bmatrix}$$

και ας γράψουμε τις παραπάνω εξισώσεις στην εξής μορφή

$$M\vec{x}'' = K\vec{x}.$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε 3 νέες μεταβλητές και να καταλήξουμε σε ένα σύστημα 6 εξισώσεων πρώτης τάξης. Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι το νέο σύστημα είναι πιο απλό να επιλυθεί συγκρινόμενο με το αρχικό σύστημα δεύτερης τάξης. Ας ονομάσουμε το $\vec{x}$ *διάνυσμα μετατόπισης*, το M *πίνακα μάζας*, και το K *πίνακα ακαμψίας*.

3.5.1 *Επαναλάβατε την παραπάνω διαδικασία (βρείτε τους πίνακες M και K) για 4 σωματίδια και για 5 σωματίδια και περιγράψτε την περίπτωση των n σωματιδίων;*

Ο αντίστροφος του πίνακα M είναι ο

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}$$

οπότε θέτοντας $A = M^{-1}K$ έχουμε το σύστημα στην εξής μορφή $\vec{x}'' = M^{-1}K\vec{x}$, ή στην εξής

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Πολλά συστήματα του πραγματικού κόσμου μας μπορούν να μοντελοποιηθούν με αυτή την εξίσωση. Για λόγους απλούστευσης, θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα μαζών-ελατηρίων. Ας προσπαθούμε μια λύση της μορφής

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t}.$$

Για την μαντεψιά μας αυτήν έχουμε, $\vec{x}'' = \alpha^2\vec{v}e^{\alpha t}$. Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$\alpha^2\vec{v}e^{\alpha t} = A\vec{v}e^{\alpha t}.$$

Διαιρώντας με $e^{\alpha t}$ έχουμε $\alpha^2\vec{v} = A\vec{v}$. Συνεπώς μια ιδιοτιμή του A είναι α^2 και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\vec{v}$ και άρα βρήκαμε μια λύση.

Στο παράδειγμά μας, όπως και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, ο προκύπτον πίνακας A έχει αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές (μαζί ενδεχομένως με μια μηδενική ιδιοτιμή). Ας μελετήσουμε λοιπόν μόνον την περίπτωση αυτή εδώ. Όταν μια ιδιοτιμή λ είναι αρνητική, σημαίνει ότι το $\alpha^2 =$

λ είναι αρνητικό. Συνεπώς υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός ω τέτοιος ώστε $-\omega^2 = \lambda$. Τότε $\alpha = \pm i\omega$. και η λύση που μαντέψαμε είναι

$$\vec{x} = \vec{v}(\cos\omega\, t + i\sin\omega\, t).$$

Παίρνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη (σημειώστε ότι το $\vec{v}$ είναι πραγματικό), βρίσκουμε ότι τα $\vec{v}\cos\omega\, t$ και $\vec{v}\sin\omega\, t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Εάν μια ιδιοτιμή είναι μηδέν, τότε τα $\vec{v}$ και $\vec{v}t$ είναι επίσης λύσεις εάν το $\vec{v}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

3.5.2 *Δείξτε ότι αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική τιμή με $\vec{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε το $\vec{x} = \vec{v}(a + bt)$ είναι λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x}$ όπου a και b είναι τυχαίες σταθερές.*

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω ο $n\times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές τις οποίες συμβολίζουμε με $-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2$, ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύματά τους με $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε*

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i (a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

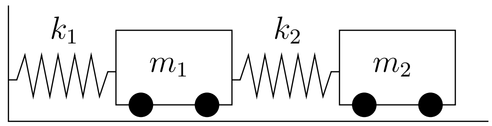
για κάποιες σταθερές a_i και b_i. Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, δηλαδή $\omega_1 = 0$, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση έχει την εξής μορφή

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1(a_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i (a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t).}$$

Σημειώστε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα για να βρούμε την γενική λύση προβλημάτων όπως αυτά που περιγράψαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου, ακόμα και στην περίπτωση που κάποια από τα σωματίδια ή/και κάποια από τα ελατήρια δεν υπάρχουν. Για παράδειγμα, όταν μας δοθεί ότι έχουμε 2 σωματίδια με 2 ελατήρια, απλά παίρνουμε μόνον τις εξισώσεις που αναλογούν στα σωματίδια και θέτουμε ίσες με μηδέν όλες τις σταθερές των ελατηρίων που δεν υπάρχουν.

3.5.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.5.1: Έστω ότι έχουμε το σύστημα που περιγράφεται στο Σχήμα 3.12 στην επόμενη σελίδα, όπου $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και όπου $k_2 = 2$.



Σχήμα 3.12: Σύστημα μάζας ελατηρίου.

Οι εξισώσεις που διέπουν το σύστημα είναι οι εξής

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}'' = \begin{bmatrix} -(4+2) & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x},$$

ή

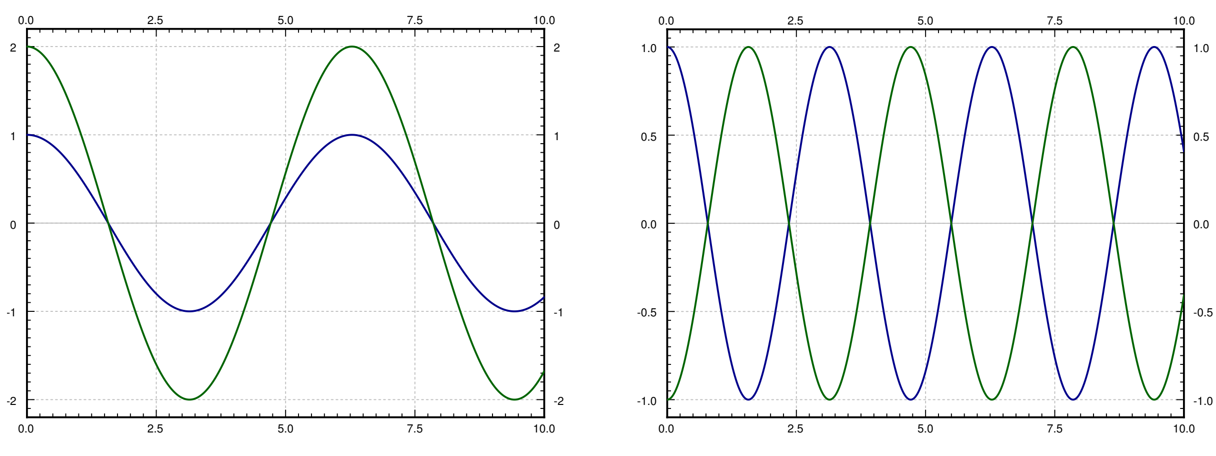
$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = -1, -4$ (άσκηση) και τα ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ αντίστοιχα (άλλη άσκηση).

Με βάση το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 2$. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Οι δύο όροι της λύσης παριστούν τις δύο *φυσικούς τρόπους ταλάντωσης* και οι δύο (γωνιακές) συχνότητες είναι οι . Η γραφική παράσταση των δύο αυτών όρων δίδεται στο Σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13: Οι δύο τρόποι ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας ελατηρίου. Στα αριστερά τα σωματίδια κινούνται στην ίδια κατεύθυνση ενώ στα δεξιά σε αντίθετη κατεύθυνση.

Ας διατυπώσουμε την εξίσωση ως εξής

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} c_1 \cos(t - \alpha_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_2 \cos(2t - \alpha_1).$$

Ο πρώτος όρος,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} c_1 \cos(t - \alpha_1) = \begin{bmatrix} c_1 \cos(t - \alpha_1) \\ 2c_1 \cos(t - \alpha_1) \end{bmatrix},$$

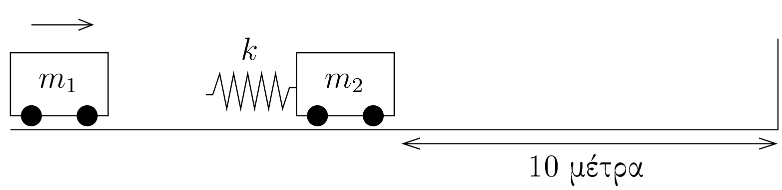
αναλογεί στην περίπτωση που τα σωματίδια κινούνται συγχρονισμένα στην ίδια κατεύθυνση. Ο δεύτερος όρος,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_2 \cos(2t - \alpha_2) = \begin{bmatrix} c_2 \cos(2t - \alpha_2) \\ -c_2 \cos(2t - \alpha_2) \end{bmatrix},$$

αναλογεί στην περίπτωση που τα σωματίδια κινούνται συγχρονισμένα αλλά σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Η γενική λύση είναι ένας συνδυασμός των δύο αυτών όρων. Δηλαδή, οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν το πλάτος και την διαφορά φάσης του κάθε όρου.

Παράδειγμα 3.5.2: Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα όπου έχουμε δύο βαγονέτα. Το ένα έχει μάζα 2 κγ και ταξιδεύει με ταχύτητα 3 μ/ς προς το δεύτερο το οποίο έχει μάζα 1 κγ. Στο δεύτερο βαγονέτο υπάρχει ένας προφυλακτήρας ο οποίος αποσβένει βεβαίως την σύγκρουση και ταυτόχρονα τα συνδέει (ενώνει τα δύο βαγονέτα) και μετά τα αφήνει να κινηθούν ελεύθερα. Ο προφυλακτήρας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ελατήριο σταθεράς $k = 2\,{}^{\mathrm{N}}\!/\!{}_{\mathrm{m}}$. Το δεύτερο βαγονέτο απέχει από έναν τοίχο 10 μέτρα. Δείτε το Σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14: Σύγκρουση δύο βαγονέτων.

Μπορούμε να θέσουμε διάφορα ερωτήματα. Σε πόσο χρόνο μετά την ένωσή τους τα βαγονέτα θα συγκρουστούν στον τοίχο; Ποια θα είναι η ταχύτητα του δεύτερου βαγονέτου όταν θα συγκρουστεί στον τοίχο;

Ας κατασκευάσουμε το σύστημα πρώτα. Ας υποθέσουμε ότι τα βαγονέτα ενώνονται την χρονική στιγμή $t = 0$. Έστω x_1 η συνάρτηση που μας δίνει την απομάκρυνση του πρώτου σωματιδίου από την θέση που είχε την χρονική στιγμή $t = 0$, και έστω x_2 η συνάρτηση που μας δίνει την απομάκρυνση του δεύτερου σωματιδίου από την αρχική θέση του. Είναι σαφές ότι η σύγκρουση θα επέλθει ακριβώς όταν $x_2(t) = 10$. Για την χρονική στιγμή t της σύγκρουσης, η ταχύτητα βεβαίως είναι $x_2'(t)$. Το σύστημα συμπεριφέρεται ακριβώς όπως συμπεριφερόταν το σύστημα του προηγουμένου παραδείγματος χωρίς όμως το k_1. Άρα η εξίσωση είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}'' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

ή

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι 0 και -3 (άσκηση) ενώ τα ιδιοδιανύσματα είναι $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$ αντίστοιχα (άλλη άσκηση). Σημειώνουμε ότι $\omega_2 = \sqrt{3}$ και χρησιμοποιούμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος για να βρούμε ότι η γενική λύση είναι

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (a_1 + b_1 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \left(a_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 t + a_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \\ a_1 + b_1 t - 2a_2 \cos \sqrt{3}\, t - 2b_2 \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες. Τα βαγονέτα ξεκινάνε από το σημείο 0 δηλαδή $x_1(0) = 0$ και $x_2(0) = 0$. Το πρώτο ταξιδεύει με ταχύτητα $3\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$, άρα $x_1'(0) = 3$ και το δεύτερο ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα, δηλαδή $x_2'(0) = 0$. Οι πρώτες συνθήκες μας δίνουν ότι

$$\vec{0} = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \end{bmatrix}.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το παραπάνω μας δίνει $a_1 = a_2 = 0$. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των a_1 και a_2 και παραγωγίζουμε για να πάρουμε ότι

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{3}\, b_2 \cos \sqrt{3}\, t \\ b_1 - 2\sqrt{3}\, b_2 \cos \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

Άρα

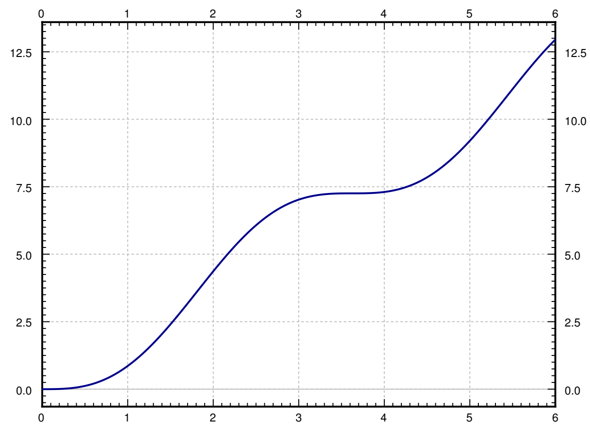
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{x}'(0) = \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{3}\, b_2 \\ b_1 - 2\sqrt{3}\, b_2 \end{bmatrix}.$$

Δεν είναι δύσκολο να βρούμε λύνοντας την παραπάνω ότι $b_1 = 2$ και $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Άρα η θέση των βαγονέτων είναι (μέχρι να συγκρουσθούν στον τοίχο)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε πως η παρουσία της μηδενικής ιδιοτιμής είχε σαν αποτέλεσμα έναν όρο που περιέχει το t. Αυτό σημαίνει ότι τα βαγονέτα θα ταξιδεύουν στην θετική κατεύθυνση όσο ο χρόνος αυξάνει, πράγμα το οποίο αναμένουμε βεβαίως.

Αυτό που πραγματικά μας ενδιαφέρει είναι η δεύτερη έκφραση, αυτή που αφορά το x_2. Έχουμε ότι $x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t$. Δείτε στο Σχήμα 3.15 την γραφική παράσταση του x_2 ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 3.15: Η θέση του δεύτερου βαγονέτου σαν συνάρτηση του χρόνου (αγνοώντας τον τοίχο).

Παρατηρώντας το γράφημα μπορούμε να δούμε ότι η σύγκρουση θα επέλθει σε περίπου 5 δευτερόλεπτα μετά την χρονική στιγμή μηδέν. Πράγματι εάν λύσουμε την εξίσωση $10 = x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t$ θα βρούμε ότι $t_{\text{σύγκρουση}} \approx 5.22$

Όσον αφορά την ταχύτητα έχουμε ότι $x_2' = 2 - 2\cos\sqrt{3}\, t$. Την στιγμή της σύγκρουσης (5.22 δευτερόλεπτα από την στιγμή $t = 0$) βρίσκουμε ότι $x_2'(t_{\text{ιμπαστ}}) \approx 3.85$.

Επιπρόσθετα παρατηρούμε ότι η μέγιστη δυνατή ταχύτητα ισούται με την μέγιστη τιμή της παράστασης $2 - 2\cos\sqrt{3}\, t$, δηλαδή με 4. Συνεπώς η σύγκρουση γίνεται με σχεδόν την μέγιστη ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε την δυνατότητα να απομακρύνουμε το δεύτερο βαγονέτο από τον τοίχο (ή να πλησιάσουμε στον τοίχο) χωρίς όμως να μπορούμε να αποφύγουμε την επαφή με το πρώτο βαγονέτο. Μπορούμε να αποφύγουμε την σύγκρουση με τον τοίχο μετακινώντας το βαγονέτο; Πόσο πρέπει να το μετακινήσουμε για να καταφέρουμε κάτι τέτοιο;

Παρατηρώντας το Σχήμα 3.15, βλέπουμε ένα 'πλατό' μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 3$ και $t = 4$. Εκεί υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η ταχύτητα είναι μηδέν. Για να βρούμε αυτό το σημείο πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x_2'(t) = 0$. Δηλαδή $\cos\sqrt{3}\, t = 1$ οπότε έχουμε $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \ldots$. Αντικαθιστώντας την πρώτη τιμή παίρνουμε $x_2\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \approx 7.26$. Άρα η 'ασφαλήσ' απόσταση είναι περίπου 7,30 μέτρα από τον τοίχο.

Αυτή βεβαίως είναι και η μικρότερη ασφαλής απόσταση μια και εάν αντικαταστήσουμε τις υπόλοιπές τιμές του t για τις οποίες βρήκαμε ότι αντιστοιχούν σε $x_2'(t) = 0$ και άλλες ασφαλείς αποστάσεις όπως η $\frac{8\pi}{\sqrt{3}} \approx 14.51$. Βεβαίως και η $t = 0$ για την οποία έχουμε $x_2 = 0$ κάτι που αντιστοιχεί στην περίπτωση που το δεύτερο βαγονέτο ακουμπάει στον τοίχο.

3.5.3 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Τελειώνοντας ας ασχοληθούμε με την περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Έστω λοιπόν ότι το σύστημά μας είναι το εξής

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{3.3}$$

Δηλαδή έχουμε προσθέσει στο σύστημα μια περιοδική δύναμη στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{F}$.

Προφανώς αρκεί να βρούμε μια συγκεκριμένη λύση $\vec{x}_p$ του παραπάνω μη ομογενούς προβλήματος την οποία προσθέτοντας στην γενική λύση $\vec{x}_c$ του ομογενούς προβλήματος θα πάρουμε την γενική λύση του παραπάνω μη-ομογενούς προβλήματος (3.3). Αν υποθέσουμε ότι το ω δεν είναι ίσο με κάποια από τις φυσικές συχνότητες του $\vec{x}'' = A\vec{x}$, τότε μπορούμε να μαντέψουμε ότι

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

όπου $\vec{c}$ είναι κάποιο άγνωστο σταθερό διάνυσμα. Παρατηρήστε ότι η μαντεψιά μας δεν περιέχει ημίτονο μια και η εξίσωσή μας εμπλέκει μόνον την δεύτερη παράγωγο. Εάν υπολογίσουμε το $\vec{c}$ έχουμε βρει την $\vec{x}_p$. Στην ουσία λοιπόν έχουμε την μέθοδο των *απροσδιόριστων συντελεστών* για συστήματα. Παραγωγίζουμε δύο φορές την $\vec{x}_p$ και έχουμε

$$\vec{x}_p{}'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

Αντικαθιστούμε τώρα στην εξίσωση

$$-\omega^2\vec{c}\cos\omega t = A\vec{c}\cos\omega t + \vec{F}\cos\omega t$$

Απαλείφοντας το συνημίτονο έχουμε

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}.$$

Οπότε

$$\vec{c} = (A + \omega^2 I)^{-1}(-\vec{F}).$$

Προφανώς πρέπει να υποθέσουμε ότι ο πίνακας $(A+\omega^2 I) = (A - (-\omega^2)I)$ είναι αντιστρέψιμος. Ο εν λόγω πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν καμιά ιδιοτιμή του A δεν είναι ίση με $-\omega^2$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν το ω δεν είναι μια φυσική συχνότητα του συστήματος.

Παράδειγμα 3.5.3: Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του Σχήματος 3.12 στη σελίδα 108 με τις ίδιες όπως και προηγουμένως παραμέτρους, δηλαδή: $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε επιπρόσθετα και μια δύναμη $2\cos 3t$ η οποία δρα στο δεύτερο βαγονέτο.

Η εξίσωση λοιπόν είναι η εξής

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Όπως έχουμε ήδη δει λύνοντας το αναλογούν ομογενές πρόβλημα η συμπληρωματική λύση είναι

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Παρατηρούμε ότι μια και οι φυσικές συχνότητες είναι 1 και 2 και βεβαίως δεν είναι ίσες με την εξωτερική συχνότητα η οποία ισούται με 3, μπορούμε να δοκιμάσουμε την $\vec{c}\cos 3t$. Παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας καταλήγουμε στο εξής γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}$$

Δηλαδή

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3^2 I \right) \vec{c} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα παίρνουμε

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix}.$$

Εύκολα τώρα καταλήγουμε στην παρακάτω γενική λύση της εξίσωσης $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Οι σταθερές a_1, a_2, b_1, και b_2 θα προσδιοριστούν βεβαίως χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Αν το ω συμπέσει με μια φυσική συχνότητα του συστήματος τότε έχουμε το φαινόμενο του *συντονισμού* επειδή θα πρέπει να προσπαθήσουμε μια συγκεκριμένη λύση της μορφής (υποθέτοντας ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα των συντελεστών είναι διαφορετικές μεταξύ τους)

$$\vec{x}_p = \vec{c}\, t \sin\omega t + \vec{d}\cos\omega t.$$

Σημειώστε ότι όσο το t αυξάνει τόσο και το πλάτος ταλάντωσης της λύσης αυτής αυξάνει, χωρίς κανένα όριο.

3.5.4 Ασκήσεις

3.5.3 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος*

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2t.$$

3.5.4 *Θεωρήστε το παράδειγμα του Σχήματος 3.12 στη σελίδα 108 με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων όπως και προηγουμένως: $m_1 = 2$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$, εκτός από την m_2 την τιμή της οποίας δεν γνωρίζουμε. Έστω ότι η δύναμη $\cos 5t$ δρα στο πρώτο σωματίδιο. Βρείτε μια τιμή της m_2 τέτοια ώστε να υπάρχει συγκεκριμένη λύση για την οποία το πρώτο σωματίδιο παραμένει ακίνητο.*

Σημείωση: Η παραπάνω ιδέα είναι γνωστή με τον όρο δυναμική απόσβεση*. Στην πράξη βεβαίως πάντα υπάρχει μια έστω και μικρή απόσβεση η οποία θα ακινητοποιήσει το πρώτο σωματίδιο σε κάθε περίπτωση, ενδεχομένως μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα.*

3.5.5 *Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα 3.5.2 στη σελίδα 109, υποθέτοντας τώρα ότι την στιγμή της εμπλοκής των δύο βαγονέτων το δεύτερο βαγονέτο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα 3μ/ς. α) Βρείτε την συμπεριφορά του συστήματος μετά την εμπλοκή. β) Θα συγκρουσθεί το δεύτερο βαγονέτο στον τοίχο ή όσο περνά ο καιρός θα απομακρύνεται από αυτόν; γ) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται το πρώτο όχημα έτσι ώστε το σύστημα να παραμείνει ακίνητο μετά την εμπλοκή των δύο οχημάτων;*

3.5.6 *Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του Σχήματος 3.12 στη σελίδα 108 με παραμέτρους $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$. Υπάρχει συνδυασμός αρχικών συνθηκών για τον οποίο το πρώτο όχημα κινείται ενώ το δεύτερο παραμένει ακίνητο; Εάν υπάρχει βρείτε τον και εάν δεν υπάρχει εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.*

3.6 Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα

Μπορεί φυσικά να τύχει ό πίνακάς μας να έχει ιδιοτιμές που 'επαναλαμβάνονται'. Δηλαδή, η χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ μπορεί να έχει επαναλαμβανόμενες ρίζες. Όπως ήδη αναφέραμε, κάτι τέτοιο είναι μάλλον απίθανο να συμβεί για κάποιον τυχαίο πίνακα. Εάν διαταράξουμε λίγο τον πίνακα A (εάν δηλαδή αλλάξουμε λίγο τα στοιχεία του A) θα πάρουμε έναν πίνακα με διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές. Όπως και σε κάθε σύστημα όμως, θέλουμε να ελέγξουμε τι θα μπορούσε να συμβεί σε οριακές καταστάσεις, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι στις καταστάσεις αυτές βεβαίως μόνον ασυμπτωτικά πλησιάζουμε.

3.6.1 Γεωμετρική πολλαπλότητα

Θεωρήστε τον εξής διαγώνιο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ο οποίος προφανώς έχει ιδιοτιμή 3 με πολλαπλότητα 2. Συνήθως ονομάζουμε την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών μιας χαρακτηριστικής εξίσωσης *αλγεβρική πολλαπλότητα*. Στην περίπτωση που εξετάζουμε τώρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Αυτό σημαίνει ότι η ονομαζόμενη *γεωμετρική πολλαπλότητα* τις ιδιοτιμής αυτής είναι 2.

Σε όσα από τα παραπάνω θεωρήματα απαιτούσαμε ο πίνακας να έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, ουσιαστικά θέλαμε να έχουμε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, το σύστημα $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ έχει την εξής γενική λύση

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Ας επαναδιατυπώνουμε το θεώρημα που αφορά πραγματικές ιδιοτιμές. Στο παρακάτω θεώρημα θα επαναλαμβάνουμε κάθε ιδιοτιμή όσες φορές είναι η (αλγεβρική) πολλαπλότητά της. Δηλαδή για τον παραπάνω πίνακα A θα λέμε ότι έχει ιδιοτιμές το 3 και το 3.

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω $\vec{x}\,' = P\vec{x}$. Αν P είναι ένα $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει τις εξής n πραγματικές ιδιοτιμές (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους), $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και αν σε αυτές αντιστοιχούν τα εξής n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, τότε η γενική λύση του συστήματος ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής*

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής αλγεβρικής πολλαπλότητας n ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της που μπορούμε να βρούμε. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μικρότερη ή ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Παραπάνω αντιμετωπίσαμε την περίπτωση όπου οι δύο πολλαπλότητες είναι ίσες. Στην περίπτωση αυτή που η αλγεβρική πολλαπλότητα ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα η εν λόγω ιδιοτιμή είναι *πλήρης*.

Άρα το παραπάνω θεώρημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί απαιτώντας όλες οι ιδιοτιμές του P να είναι πλήρεις οπότε και τα n ιδιοδιανύσματα θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς θα έχουμε την γενική λύση που περιγράφει το θεώρημα.

Σημειώστε ότι αν η γεωμετρική πολλαπλότητα μια ιδιοτιμής είναι μεγαλύτερη ή ίση με 2, τότε το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων δεν είναι μοναδικό (ως προς κάποια σταθερά) όπως αναφέραμε προηγουμένως. Για παράδειγμα για τον διαγώνιο πίνακα A θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τις ιδιοτιμές $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, ή στην πραγματικότητα οποιαδήποτε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

3.6.2 Ατελείς ιδιοτιμές

Εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει λιγότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε λέγετε *ατελής*. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή της οποίας η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη από την γεωμετρική. Μια τέτοια ιδιοτιμή λέγεται *ατελής* την δε διαφορά των πολλαπλοτήτων ονομάζουμε *ατέλεια*.

Παράδειγμα 3.6.1: Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

έχει την ιδιοτιμή 3 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Πρέπει να έχουμε $v_2 = 0$. Άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα πρέπει να είναι της μορφής $\left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Οποιαδήποτε δύο τέτοια διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 1. Συνεπώς, η ατέλεια είναι 1 και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω μεθοδολογία για να βρούμε την λύση του συστήματος των ΣΔΕ τα οποία έχουν πίνακα συντελεστών με αυτή την ιδιότητα.

Μια καίρια παρατήρηση, κομβικής σπουδαιότητας, είναι ότι εάν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα A αλγεβρικής πολλαπλότητα m, τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0}$. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*.

Ας συνεχίσουμε με το παράδειγμα $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ και την εξίσωση $\vec{x}\,' = A\vec{x}$. Έχουμε μια ιδιοτιμή $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1. Έχουμε ήδη βρει ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ από την οποία παίρνουμε την λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Στην περίπτωση αυτή, ας δοκιμάσουμε (στο πνεύμα των επαναλαμβανόμενων ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης μια ΣΔΕ) μια λύση της εξής μορφής

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Το $\vec{x}_2{}'$ πρέπει να ισούται με $A\vec{x}_2$, οπότε

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Παρατηρώντας τους συντελεστές των e^{3t} και te^{3t} βλέπουμε ότι $3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$. Αυτό σημαίνει ότι

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \qquad \text{και} \qquad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Εάν αυτές οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται, τότε το $\vec{x}_2$ είναι μία λύση. Γνωρίζουμε ότι η πρώτη από τις εξισώσεις ικανοποιείται επειδή το $\vec{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα. Αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη βρίσκουμε ότι

$$(A - 3I)(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{0}, \qquad \text{ή} \qquad (A - 3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Αν μπορούμε λοιπόν να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ το οποίο να αποτελεί λύση του $(A - 3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$, και να ικανοποιεί την σχέση $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$, τότε τελειώσαμε. Πρέπει λοιπόν να λύσουμε δύο αλγεβρικά γραμμικά συστήματα, πράγμα αρκετά εύκολο.

Παρατηρήστε ότι για την απλή περίπτωση που ασχολούμαστε ο $(A-3I)^2$ είναι ένας μηδενικός πίνακας (άσκηση). Συνεπώς, κάθε διάνυσμα $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A - 3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$. Άρα αρκεί να σιγουρευτούμε ότι $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$. Ας γράψουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας θέσουμε $a = 0$ (το a μπορεί να πάρει όποια τιμή θέλουμε) και $b = 1$. Οπότε έχουμε $\vec{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Άρα η γενική λύση του συστήματος $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Ας περιγράψουμε τώρα τον γενικό αλγόριθμο. Πρώτα για λ πολλαπλότητας 2 και ατέλειας 1. Πρώτα βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ που αντιστοιχεί στο λ. Μετά πρέπει να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} (A - 3I)^2\vec{v}_2 &= \vec{0}, \\ (A - 3I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1. \end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda t},\\ \vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να γενικευθεί για μεγαλύτερους πίνακες και μεγαλύτερες ατέλειες. Παρόλο που δεν θα ασχοληθούμε συστηματικά με το θέμα ας δώσουμε την γενική ιδέα. Έστω ότι ο A έχει μια ιδιοτιμή λ πολλαπλότητας m. Βρίσκουμε διανύσματα τέτοια ώστε

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Τα διανύσματα αυτά λέγονται *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*. Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρίσκουμε μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)\vec{v}_1 &= \vec{0},\\ (A - \lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1,\\ &\vdots\\ (A - \lambda I)\vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda t},\\ \vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{\lambda t},\\ &\vdots\\ \vec{x}_k &= \left(\vec{v}_k + \vec{v}_{k-1} t + \cdots + \vec{v}_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \vec{v}_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Προχωρούμε στην εύρεση σειρών έως ότου κατασκευάσουμε m γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις (m είναι η πολλαπλότητα). Ενδεχομένως να χρειασθεί να βρεθούν αρκετές σειρές για κάθε ιδιοτιμή.

3.6.3 Ασκήσεις

3.6.1 *Έστω $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Λύστε την εξίσωση $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.*

3.6.2 *Έστω $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. α) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές; β) Ποια/ποιές είναι οι ατέλειες των ιδιοδιανυσμάτων; ς) Λύστε την εξίσωση $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.*

3.6.3 *Έστω $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. α) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές; β) Ποια/ποιές είναι οι ατέλειες των ιδιοδιανυσμάτων; γ) Λύστε την εξίσωση $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους και επιβεβαιώστε ότι πράγματι βρήκατε σωστά την λύση.*

3.6.4 *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. *α) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές; β) Ποια/ποιές είναι οι ατέλειες των ιδιοδιανυσμάτων; γ) Λύστε την εξίσωση* $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

3.6.5 *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. *α) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές; β) Ποια/ποιές είναι οι ατέλειες των ιδιοδιανυσμάτων; γ) Λύστε την εξίσωση* $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

3.6.6 *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. *α) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές; β) Ποια/ποιές είναι οι ατέλειες των ιδιοδιανυσμάτων; γ) Λύστε την εξίσωση* $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

3.6.7 *Έστω* A *ένας* 2×2 *πίνακας με ιδιοτιμή* λ *πολλαπλότητας 2. Έστω επίσης ότι υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αποδείξτε ότι ο πίνακας είναι διαγώνιος και συγκεκριμένα* $A = \lambda I$.

3.7 Εκθετικά Πινάκων

3.7.1 Ορισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσης των θεμελιωδών λύσεων ενός συστήματος. Ως συνήθως, θεωρήστε το εξής σύστημα σταθερών συντελεστών

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

Αν το παραπάνω σύστημα αποτελείτο από μία μόνον εξίσωση (το P είναι ένας 1×1 πίνακας, δηλαδή ένας αριθμός) τότε η λύση θα είχε την μορφή

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

Παρόμοια μπορούμε να γενικεύσουμε ορίζοντας κατάλληλα την έκφραση e^{Pt}. Ας θυμηθούμε ο ανάπτυγμα σειράς $Taylor$ της συνάρτησης e^{at} για κάποιο αριθμό a.

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{6} + \frac{(at)^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}.$$

Θυμηθείτε ότι $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$, και $0! = 1$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$a + a^2 t + \frac{a^3 t^2}{2} + \frac{a^4 t^3}{6} + \cdots = a\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{6} + \cdots\right) = ae^{at}.$$

Ας κάνουμε κάτι παρόμοιο για πίνακες. Ας ορίσουμε πρώτα για κάθε $n \times n$ πίνακα A τον *εκθετικό πίνακα* ως εξής

$$\boxed{e^{A} \overset{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots}$$

Φυσικά και πρέπει η παραπάνω σειρά να συγκλίνει αλλά ας μην μας απασχολήσει το θέμα αυτό τώρα. Ας υποθέσουμε δηλαδή ότι όλες οι σειρές που θα ακολουθήσουν συγκλίνουν. Προφανώς για κάθε πίνακα P έχουμε $Pt = tP$ οπότε και παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}.$$

Ο P και κατά συνέπεια και ο e^{tP} είναι ένας πίνακας $n \times n$. Αυτό που μένει να βρούμε είναι απλώς ένα διάνυσμα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που ο πίνακας είναι 1×1 ουσιαστικά μας μένει να πολλαπλασιάσουμε με μια τυχαία σταθερά για να βρούμε την γενική λύση. Στην περίπτωση των $n \times n$ πινάκων απλά πολλαπλασιάζουμε την λύση που βρήκαμε παραπάνω με ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{c}$.

Θεώρημα 3.7.1. *Εάν P είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε η γενική λύση του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$ είναι*

$$\vec{x} = e^{tP}\vec{c},$$

όπου $\vec{c}$ είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα. Μάλιστα ισχύει η σχέση $\vec{x}(0) = \vec{c}$.

Ας το επιβεβαιώσουμε.

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{c}\right) = Pe^{tP}\vec{c} = P\vec{x}.$$

Άρα ο e^{tP} είναι ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων του ομογενούς συστήματος. Εάν βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού του εκθετικού ενός πίνακα τότε θα έχουμε μια άλλη μέθοδο επίλυσης ομογενών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές. Η εν λόγω μέθοδος μάλιστα αντιμετωπίζει την διαδικασία επιλογής της συγκεκριμένης λύσης που ικανοποιεί δοθείσες αρχικές συνθήκες με πολύ πιο εύκολο τρόπο. Πράγματι, για να λύσουμε το $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \vec{b}$, παίρνουμε την λύση

$$\vec{x} = e^{tA}\vec{b}.$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $e^{0A} = I$, οπότε $\vec{x}(0) = e^{0A}\vec{b} = \vec{b}$.

Υπάρχει ένα μικρό πρόβλημα με τα εκθετικά πινάκων. Γενικά έχουμε ότι $e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει σοβαρό ενδεχόμενο δύο πίνακες να μην αντιμετατίθενται, δηλαδή να έχουμε $AB \neq BA$. Η μη-αντιμεταθετικότητα αυτή των πινάκων συνεπάγεται ότι $e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$ γεγονός που μας δημιουργεί σοβαρά προβλήματα όταν προσπαθούμε να λύσουμε ένα σύστημα χρησιμοποιώντας σειρές $Taylor$. Φυσικά όταν $AB = BA$, όταν δηλαδή οι A και B αντιμετατίθενται, τότε $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$ πράγμα ιδιαίτερα βολικό όπως θα δούμε. Ας διατυπώσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σε μορφή θεωρήματος.

Θεώρημα 3.7.2. *Εάν $AB = BA$ τότε $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$. Ειδάλλως έχουμε $e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$.*

3.7.2 Απλές περιπτώσεις

Σε μερικές περιπτώσεις αρκεί να αντικαταστήσουμε τιμές στις μεταβλητές των σειρών. Μια τέτοια περίπτωση είναι και αυτή που ο πίνακας είναι διαγώνιος. Για παράδειγμα, $D = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right]$. Τότε

$$D^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix},$$

και

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο

$$e^I = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad e^{aI} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}.$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας βοηθάνε στο να υπολογίσουμε εύκολα τα εκθετικά άλλων πιο γενικών πινάκων. Για παράδειγμα σημειώστε ότι ο πίνακας $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ μπορεί να γραφθεί ως $2I + B$ όπου $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right]$. Σημειώστε ότι οι $2I$ και B αντιμετατίθενται, και ότι $B^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Οπότε $B^k = 0$ για κάθε $k \geq 2$. Συνεπώς, $e^B = I + B$. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον e^{tA}. Οι $2tI$ και tB αντιμετατίθενται (επιβεβαιώστε το σαν άσκηση) και $e^{tB} = I + tB$, επειδή $(tB)^2 = t^2B^2 = 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{2tI+tB} = e^{2tI}e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}(I + tB) = \\ = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+3t)\,e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)\,e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Βρήκαμε λοιπόν τον θεμελιώδη πίνακα των λύσεων του συστήματος $\vec{x}' = A\vec{x}$. Σημειώστε ότι ο πίνακας A έχει μια ατελή ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2, υπάρχει δηλαδή μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα για την εν λόγω ιδιοτιμή. Έχουμε λοιπόν βρει μια εν δυνάμει μέθοδο αντιμετώπισης τέτοιων περιπτώσεων. Πράγματι, εάν ο πίνακας A είναι 2×2 και έχει μια ιδιοτιμή λ πολλαπλότητας 2, τότε είτε είναι διαγώνιος, είτε $A = \lambda I + B$ όπου $B^2 = 0$. Η παρακάτω είναι μια πολύ καλή και ενδεχομένως λίγο δύσκολη άσκηση.

3.7.1 *Έστω ότι ο 2×2 πίνακας A έχει μόνον μια ιδιοτιμή, την λ. Αποδείξτε ότι $(A-\lambda I)^2 = 0$. Τότε μπορείτε να γράψετε ότι $A = \lambda I + B$, όπου $B^2 = 0$. Υπόδειξη: Πρώτα γράψτε την εξίσωση που προκύπτει από το γεγονός ότι η ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα 2 και μετά υπολογίστε το B^2.*

3.7.3 Γενικοί πίνακες

Γενικά ο υπολογισμός του εκθετικού ενός πίνακα δεν είναι τόσο εύκολο όσο είδαμε παραπάνω. Δεν μπορούμε συνήθως να γράψουμε έναν πίνακα σαν άθροισμα αντιτιθέμενων πινάκων όποτε και μπορούμε να συνεχίσουμε την διαδικασία επίλυσης εύκολα. Μην απογοητεύεστε όμως ειδικά αν μπορούμε να βρούμε αρκετά ιδιοδιανύσματα. Θα στηριχθούμε στο εξής εργαλείο της γραμμικής άλγεβρας. Για κάθε τετραγωνικούς πίνακες A και B έχουμε ότι

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}.$$

Μπορούμε να δούμε την ορθότητα της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιώντας αναπτύγματα $Taylor$. Πριν όμως παρατηρήστε ότι

$$(BAB^{-1})^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BAIAB^{-1} = BA^2B^{-1}.$$

Κατέπέκταση ισχύει ότι $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. Άρα ας γράψουμε το ανάπτυγμα $Taylor$ για την $e^{BAB^{-1}}$

$$\begin{aligned}
e^{BAB^{-1}} &= I + BAB^{-1} + \frac{1}{2}(BAB^{-1})^2 + \frac{1}{6}(BAB^{-1})^3 + \cdots \\
&= BB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2}BA^2B^{-1} + \frac{1}{6}BA^3B^{-1} + \cdots \\
&= B\big(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots\big)B^{-1} \\
&= Be^AB^{-1}.
\end{aligned}$$

Τώρα ας γράψουμε τον πίνακα A σαν EDE^{-1}, όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *διαγωνιοποίηση*. Εάν μπορούμε να την φέρουμε εις πέρας τότε ο υπολογισμός του εκθετικού μας γίνετε εύκολα. Προσθέτοντας κατάλληλα το t παρατηρούμε ότι

$$e^{tA} = Ee^{tD}E^{-1}.$$

Για να βρούμε τα E και D χρειαζόμαστε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Στην περίπτωση που δεν τα έχουμε θα πρέπει να προσπαθήσουμε κάτι ποιο περίπλοκο. Δεν αξίζει όμως να ασχοληθούμε στο μάθημα αυτό με μια τέτοια περίπτωση. Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Έστω επίσης $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα ιδιοδιανύσματα του A. Τότε έχουμε $E = [\,\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n\,]$. Έστω τέλος D ο διαγώνιος πίνακας που έχει σαν διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A. Τότε έχουμε

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
AE &= A[\,\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n\,] \\
&= [\,A\vec{v}_1 \quad A\vec{v}_2 \quad \cdots \quad A\vec{v}_n\,] \\
&= [\,\lambda_1\vec{v}_1 \quad \lambda_2\vec{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\vec{v}_n\,] \\
&= [\,\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n\,]D \\
&= ED.
\end{aligned}$$

Οι στήλες του E είναι γραμμικά ανεξάρτητες επειδή υποθέσαμε ότι τα ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα ο E είναι αντιστρέψιμος. Επειδή $AE = ED$, πολλαπλασιάζοντας με E^{-1} έχουμε

$$A = EDE^{-1}.$$

Δηλαδή $e^A = Ee^D E^{-1}$. Προσθέτοντας και το t καταλήγουμε ότι

$$\boxed{e^{tA} = Ee^{tD}E^{-1} = E \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} E^{-1}.} \tag{3.4}$$

Συνεπώς η σχέση (3.4) μας προσφέρει έναν τύπο για τον υπολογισμό του πίνακα των θεμελιωδών λύσεων e^{tA} του συστήματος $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Σημειώστε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί άμεσα να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές (και τα ιδιοδιανύσματα προφανώς) είναι μιγαδικές. Απλά οι πράξεις μας θα γίνονται με μιγαδικούς αριθμούς. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι εάν ο πίνακας A είναι πραγματικός, τότε και ο e^{tA} θα είναι πραγματικός. Τέλος θυμηθείτε ότι εφαρμόζοντας τον τύπο του $Euler$ μπορούμε να απλοποιήσουμε τα μιγαδικά αποτελέσματά μας μετατρέποντας τον πίνακα A έτσι ώστε αυτός να μην περιέχει κάποιον μιγαδικό αριθμό.

Παράδειγμα 3.7.1: Υπολογίστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος χρησιμοποιώντας εκθετικά πινάκων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε επίσης και την συγκεκριμένη λύση η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες $x(0) = 4$ και $y(0) = 2$.

Έστω A ο πίνακας των συντελεστών $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Πρώτα βρίσκουμε (άσκηση) ότι οι ιδιοτιμές του είναι 3 και -1 και ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. Άρα μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = 4$ και $y(0) = 2$. Άρα με βάση την ιδιότητα $e^{0A} = I$ βρίσκουμε ότι η συγκεκριμένη λύση που ψάχνουμε είναι η $e^{tA}\vec{b}$ όπου $\vec{b}$ είναι $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Η συγκεκριμένη λύση που ψάχνουμε λοιπόν είναι η εξής

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-t} + e^{3t} - e^{-t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-t} + e^{3t} + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

3.7.4 Πίνακας θεμελιωδών λύσεων

Σημειώστε ότι εάν καταφέρετε να υπολογίσετε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων με κάποιον διαφορετικό τρόπο, μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε για να βρείτε τον e^{tA}. πίνακα των θεμελιωδών λύσεων ενός συστήματος ΣΔΕ δεν είναι μοναδικός. Ο εκθετικός πίνακας είναι ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων ο οποίος για $t = 0$ γίνεται ο ταυτοτικός πίνακας. Πρέπει λοιπόν να βρούμε τον κατάλληλο πίνακα των θεμελιωδών λύσεων. Εάν X είναι ένας οποιοσδήποτε πίνακας των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ τότε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι

$$e^{tA} = X(t)\,[X(0)]^{-1}.$$

Προφανώς εάν θέσουμε $t = 0$ στο $X(t)\,[X(0)]^{-1}$ παίρνουμε τον ταυτοτικό. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα θεμελιωδών λύσεων από τα δεξιά με οποιονδήποτε σταθερό αντιστρέψιμο πίνακα και να καταλήξουμε σε έναν άλλο πίνακα των θεμελιωδών λύσεων. Δηλαδή η παραπάνω διαδικασία ισοδυναμεί με αλλαγή των τυχαίων σταθερών της γενικής λύσης $\vec{x}(t) = X(t)\vec{c}$.

3.7.5 Ασκήσεις

3.7.2 *Βρείτε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος* $x' = 3x + y$, $y' = x + 3y$.

3.7.3 *Υπολογίστε τον πίνακα* e^{At} *όπου* $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

3.7.4 *Βρείτε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος* $x_1' = 7x_1 + 4x_2 + 12x_3$, $x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3$, $x_3' = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3$. *Βρείτε μετά την λύση που ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες* $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

3.7.5 *Υπολογίστε τον πίνακα* e^A *όταν* $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

3.7.6 *Έστω* $AB = BA$ *(αντιμετατιθέμενοι πίνακες). Δείξτε ότι* $e^{A+B} = e^A e^B$.

3.7.7 *Χρησιμοποιήστε την άσκηση 3.7.6 για να δείξετε ότι* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *γεγονός που σημαίνει ότι ο* e^A *είναι αντιστρέψιμος ακόμα και στην περίπτωση που ο* A *δεν είναι.*

3.7.8 *Έστω ότι ο πίνακας* A *έχει ιδιοτιμές* -1, *1, και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. *α) Βρείτε έναν πίνακα* A *που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. β) Βρείτε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος* $\vec{x}' = A\vec{x}$. *ς) Λύστε το σύστημα με τις εξής αρχικές συνθήκες* $\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.

3.7.9 *Έστω ότι* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας με ιδιοτιμή* λ *πολλαπλότητας* n *και* n *γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Δείξτε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγώνιος, και συγκεκριμένα* $A = \lambda I$. *Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε διαγωνιοποίηση και το γεγονός ότι ο ταυτοτικός πίνακας αντιμετατίθεται με οποιονδήποτε άλλο πίνακα.*

3.8 Μη-ομογενή συστήματα

3.8.1 Πρώτης τάξης συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Ολοκληρωτικός παράγοντας

Ας επικεντρωθούμε πρώτα στην μη-ομογενή εξίσωση πρώτης τάξης

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t),$$

όπου ο A είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το t). Η πρώτη μέθοδος που θα εξετάσουμε είναι η *μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα*. Απλά ξαναγράφουμε την εξίσωση ως εξής.

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

όπου $P = -A$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με e^{tP}

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Σημειώστε ότι $Pe^{tP} = e^{tP}P$. Αυτό προκύπτει εύκολα εάν γράψουμε τον ορισμό του e^{tP} σαν σειρά,

$$\begin{aligned} Pe^{tP} = P\left(I + tP + \frac{1}{2}(tP)^2 + \cdots\right) = P + tP^2 + \frac{1}{2}t^2P^3 + \cdots = \\ = \left(I + tP + \frac{1}{2}(tP)^2 + \cdots\right)P = e^{tP}P. \end{aligned}$$

Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$. Συνεπώς,

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{tP}\vec{x}(t)\Big) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε. Ολοκληρώνοντας βεβαίως κάθε συνιστώσα των διανυσμάτων ξεχωριστά.

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t)\,dt + \vec{c}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(e^{tP})^{-1} = e^{-tP}$ έχουμε

$$\vec{x}(t) = e^{-tP}\int e^{tP}\vec{f}(t)\,dt + e^{-tP}\vec{c}.$$

Ίσως όλα τα παραπάνω να είναι πιο κατανοητά αν χρησιμοποιήσουμε ορισμένα ολοκληρώματα. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα θα μπορέσουμε να βρούμε τις λύσεις που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες ευκολότερα. Έστω λοιπόν η παρακάτω εξίσωση και αρχικές συνθήκες.

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

Η λύση τώρα μπορεί να γραφθεί στην εξής μορφή

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\, ds + e^{-tP}\vec{b}.} \tag{3.5}$$

Μην ξεχνάτε ότι το ολοκλήρωμα του διανύσματος $e^{sP}\vec{f}(s)$ προκύπτει ολοκληρώνοντας κάθε συνιστώσα του ξεχωριστά. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (3.5) πραγματικά ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\vec{x}(0) = \vec{b}$.

$$\vec{x}(0) = e^{-0P} \int_0^0 e^{sP} \vec{f}(s)\, ds + e^{-0P}\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}.$$

Παράδειγμα 3.8.1: Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\ x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \end{aligned}$$

και τις εξής αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

Ας διατυπώσουμε το σύστημα στην εξής μορφή

$$\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει το e^{tP} για $P = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το e^{-tP}, δίνοντας αρνητικό πρόσημο στο t.

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1+3t)\,e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)\,e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad e^{-tP} = \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)\,e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Αντί να υπολογίσουμε όλον το τύπο μονομιάς ας τον υπολογίσουμε σταδιακά. Αρχίζουμε με

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\, ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)\,e^{2s} & -3se^{2s} \\ 3se^{2s} & (1-3s)\,e^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)\,e^{3s} \\ 3se^{3s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)\,e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\, ds + e^{-tP} \vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} (1-3t)\, e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)\, e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)\, e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\, e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)\, e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}+t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\, e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-2t)\, e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}-2t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ούφ!

Ας επιβεβαιώσουμε την ορθότητα αυτού που μόλις βρήκαμε.

$$x_1' + 5x_1 - 3x_2 = (4te^{-2t} - 4e^{-2t}) + 5(1-2t)\, e^{-2t} + e^t - (1-6t)\, e^{-2t} = e^t.$$

Παρομοίως μπορούμε να δούμε ότι (άσκηση) $x_2' + 3x_1 - x_2 = 0$. Τέλος εύκολα διαπιστώνουμε (άλλη άσκηση) ότι και οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται.

Η μέθοδος των ολοκληρωτικών παραγόντων για συστήματα είναι αποτελεσματική μόνον όταν ο πίνακας P δεν εξαρτάται από το t, δηλαδή ο P είναι σταθερός. Το πρόβλημα βεβαίως είναι ότι εν γένει έχουμε

$$\frac{d}{dt} e^{\int P(t)\, dt} \neq P(t)\, e^{\int P(t)\, dt},$$

επειδή οι δύο πίνακες μπορούν κάλλιστα να μην αντιμετατίθενται.

Παραγοντοποίηση Ιδιοδιανυσμάτων

Η θεωρία αλλά και η πρακτική της παρακάτω μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα μας δίνουν τις κατευθύνσεις στις οποίες ο εν λόγω πίνακας δρα σαν αριθμός. Εάν λύσουμε το σύστημά μας στις κατευθύνσεις αυτές τότε οι λύσεις αυτές θα είναι απλούστερες μια και θα μπορούμε να διαχειριζόμαστε τον πίνακα σαν αριθμό. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις απλές αυτές λύσεις με κατάλληλο τρόπο και να πάρουμε την γενική λύση.

Θεωρήστε την εξίσωση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t). \tag{3.6}$$

Υποθέστε ότι ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Ας γράψουμε

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t). \tag{3.7}$$

Θέλουμε δηλαδή να γράψουμε την λύση μας σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων του A. Για να υπολογίσουμε την λύση μας $\vec{x}$, αρκεί να βρούμε τις συναρτήσεις ξ_1 έως ξ_n. Ας υπολογίσουμε και την $\vec{f}$ συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων. Ας γράψουμε

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t). \tag{3.8}$$

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε τις g_1 έως g_n οι οποίες ικανοποιούν την σχέση (3.8). Σημειώστε ότι επειδή όλα τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ο πίνακας $E = [\,\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n\,]$ είναι αντιστρέψιμος. Βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουν την (3.8) ως εξής $\vec{f} = E\vec{g}$, όπου οι συνιστώσες της $\vec{g}$ είναι οι συναρτήσεις g_1 έως g_n. Τότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{f}$. Συνεπώς είναι πάντα εφικτό να βρούμε το $\vec{g}$ αρκεί να υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Αντικαθιστούμε την (3.7) στην (3.6), και παρατηρούμε ότι $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$.

$$
\begin{aligned}
\vec{x}\,' &= \vec{v}_1\,\xi_1' + \vec{v}_2\,\xi_2' + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n' \\
&= A\,(\vec{v}_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n) + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= A\vec{v}_1\,\xi_1 + A\vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,\lambda_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\lambda_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\lambda_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,(\lambda_1\,\xi_1 + g_1) + \vec{v}_2\,(\lambda_2\,\xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n\,(\lambda_n\,\xi_n + g_n).
\end{aligned}
$$

Εάν εξισώσουμε τους συντελεστές των διανυσμάτων $\vec{v}_1$ έως $\vec{v}_n$ των δύο μερών της παραπάνω εξίσωσης καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1\,\xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2\,\xi_2 + g_2, \\
&\ \ \vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n\,\xi_n + g_n.
\end{aligned}
$$

Η κάθε μια από τις εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητη από τις άλλες. Είναι όλες γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης και μπορούμε εύκολα να τις λύσουμε με την βασική μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων. Για παράδειγμα για την $k^{\tau\eta}$ εξίσωση έχουμε

$$
\xi_k'(t) - \lambda_k\,\xi_k(t) = g_k(t).
$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{-\lambda_k t}$ παίρνουμε

$$
\frac{d}{dt}\Big[\xi_k(t)\,e^{-\lambda_k t}\Big] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).
$$

Ολοκληρώνοντας και λύνοντας ως προς ξ_k καταλήγουμε στο

$$
\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int e^{-\lambda_k t} g_k(t)\ dt + C_k e^{\lambda_k t}.
$$

Σημειώστε ότι εάν ενδιαφέρεστε για μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση τότε θα βόλευε πολύ να θέσετε το C_k ίσο με το μηδέν. Εάν δεν δώσουμε τιμές στις σταθερές, τότε απλά έχουμε την γενική λύση. Συγκεκριμένα την $\vec{x}(t) = \vec{v}_1\,\xi_1(t) + \vec{v}_2\,\xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n(t)$.

είναι ίσως προτιμότερο αν, όπως και προηγουμένως, γράψουμε τα ολοκληρώματα σαν ορισμένα ολοκληρώματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την εξής αρχική συνθήκη $\vec{x}(0) = \vec{b}$.

Παίρνουμε $\vec{c} = E^{-1}\vec{b}$ και παρατηρούμε ότι, όπως ακριβώς και πριν, έχουμε $\vec{b} = \vec{v}_1\, a_1 + \cdots + \vec{v}_n\, a_n$. Μετά γράφουμε

$$\boxed{\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s)\; dt + a_k e^{\lambda_k t},}$$

και έτσι στην ουσία θα πάρουμε την συγκεκριμένη λύση $\vec{x}(t) = \vec{v}_1\xi_1(t) + \vec{v}_2\xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\xi_n(t)$ η οποία ικανοποιεί την $\vec{x}(0) = \vec{b}$, επειδή $\xi_k(0) = a_k$.

Παράδειγμα 3.8.2: Έστω $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Λύστε το σύστημα $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right]$ για $\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right]$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι -2 και 4 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ αντίστοιχα (άσκηση). Ας γράψουμε τον πίνακα E και ας υπολογίσουμε τον αντίστροφό του.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αναζητούμε μια λύση της μορφής $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\xi_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\xi_2$. Θέλουμε να εκφράσουμε και το $\vec{f}$ συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων. Θέλουμε δηλαδή να γράψουμε $\vec{f} = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] g_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] g_2$. Άρα

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1}\begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}.$$

Άρα $g_1 = e^t - t$ και $g_2 = e^t + t$.

Θέλουμε επιπλέον να εκφράσουμε το $\vec{x}(0)$ συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων. Θέλουμε δηλαδή να γράψουμε $\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] a_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] a_2$. Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = E^{-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{-5}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{16} \end{bmatrix}.$$

Άρα $a_1 = 1/4$ και $a_2 = -1/16$. Αντικαθιστούμε το $\vec{x}$ στην εξίσωση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\xi_1' + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\xi_2' &= A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\xi_1 + A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\xi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(-2\xi_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 4\xi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(e^t - t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(e^t - t). \end{aligned}$$

Παίρνουμε λοιπόν τις εξής εξισώσεις

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = a_1 = \frac{1}{4},$$
$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = a_2 = \frac{-1}{16}.$$

Εάν λύσουμε με ολοκληρωτικό παράγοντα (άσκηση, προσοχή θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση κατά μέρη) έχουμε

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t}\left(e^t - t\right)\, dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

C_1 είναι η σταθερά ολοκλήρωσης Επειδή $\xi_1(0) = {}^1\!/\!_4$ έχουμε ότι ${}^1\!/\!_4 = {}^1\!/\!_3 + {}^1\!/\!_4 + C_1$ και συνεπώς $C_1 = {}^{-1}\!/\!_3$. Παρόμοια έχουμε

$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t}\left(e^t + t\right)\, dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_2(0) = {}^1\!/\!_{16}$ έχουμε ότι ${}^{-1}\!/\!_{16} = {}^{-1}\!/\!_3 - {}^1\!/\!_{16} + C_2$ και συνεπώς $C_2 = {}^1\!/\!_3$. Η λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\frac{e^t - e^{-2t}}{3} + \frac{1-2t}{4} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{e^{4t} - e^t}{3} - \frac{4t+1}{16} \right) = \begin{bmatrix} \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{3} + \frac{3-12t}{16} \\ \frac{e^{-2t}+e^{4t}+2e^t}{3} + \frac{4t-5}{16} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, $x_1 = \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{3} + \frac{3-12t}{16}$ και $x_2 = \frac{e^{-2t}+e^{4t}+2e^t}{3} + \frac{4t-5}{16}$.

3.8.1 *Επιβεβαιώστε ότι τα x_1 και x_2 είναι λύσεις του συστήματος, ικανοποιούν δηλαδή και την διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη.*

Απροσδιόριστοι συντελεστές

Μπορούμε βεβαίως να επεκτείνουμε την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για συστήματα. Αυτό μπορεί να γίνει ιδιαίτερα εύκολα μια και η μόνη διαφορά θα είναι το ότι θα προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την τιμή ενός διανύσματος και όχι ενός μόνον αριθμού. Προφανώς ότι προβλήματα αντιμετωπίσαμε στην περίπτωση της μιας εξίσωσης περιμένουμε να αντιμετωπίσουμε και στην περίπτωση των συστημάτων. Η μέθοδος αυτή λοιπόν δεν μπορεί να αντιμετωπίσει όλα τα προβλήματα ενώ είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη όταν το δεξιό μέρος της εξίσωσης είναι κάπως περίπλοκο. Επειδή η μέθοδος δεν διαφέρει ουσιαστικά καθόλου από την αντίστοιχη μέθοδος μιας εξίσωσης ας ασχοληθούμε αμέσως με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.8.3: Έστω $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Υπολογίστε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \left[\begin{smallmatrix} e^t \\ t \end{smallmatrix}\right]$. Οι ιδιοτιμές του A είναι -1 και 1 και τα ιδιοδιανύσματα είναι $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ αντίστοιχα. Συνεπώς η συμπληρωματική λύση μας είναι

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

για κάποιες σταθερές α_1 και α_2.

Τώρα θέλουμε να μαντέψουμε μια συγκεκριμένη λύση του

$$\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}t + \vec{c}.$$

Όμως, κάποιος όρος της μορφής $\vec{a}e^t$ φαίνεται να υπάρχει στην συμπληρωματική λύση. Επειδή δεν γνωρίζουμε ακόμα εάν το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο (πολλαπλάσιο δηλαδή) του $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ δεν γνωρίζουμε εάν θα υπάρξει πρόβλημα. Ενδεχομένως βέβαια να μην υπάρξει πρόβλημα. Για να είμαστε ασφαλής όμως θα πρέπει να δοκιμάσουμε και την $\vec{b}te^t$. Ας δοκιμάσουμε λοιπόν *και την* $\vec{a}e^t$ και την $\vec{b}te^t$ σαν μαντεψιές, και όχι μόνον την $\vec{b}te^t$. Συνεπώς έχουμε

$$\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d}.$$

Άρα έχουμε 8 αγνώστους. Ας γράψουμε $\vec{a} = \left[\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\end{smallmatrix}\right]$, $\vec{b} = \left[\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\end{smallmatrix}\right]$, $\vec{c} = \left[\begin{smallmatrix}c_1\\c_2\end{smallmatrix}\right]$, και $\vec{d} = \left[\begin{smallmatrix}d_1\\d_2\end{smallmatrix}\right]$, Ας αντικαταστήσουμε τις παραπάνω στην εξίσωση. Πρώτα ας υπολογίσουμε $\vec{x}\,'$.

$$\vec{x}\,' = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}.$$

Τώρα η $\vec{x}\,'$ πρέπει να είναι ίση με $A\vec{x} + \vec{f}$ άρα

$$\begin{aligned} A\vec{x} + \vec{f} &= A\vec{a}e^t + A\vec{b}te^t + A\vec{c}t + A\vec{d} + \vec{f} = \\ &= \begin{bmatrix} -a_1 \\ -2a_1 + a_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ας εξισώσουμε τώρα τους συντελεστές των e^t, te^t, t και τους σταθερούς όρους.

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= -a_1 + 1, \\ a_2 + b_2 &= -2a_1 + a_2, \\ b_1 &= -b_1, \\ b_2 &= -2b_1 + b_2, \\ 0 &= -c_1, \\ 0 &= -2c_1 + c_2 + 1, \\ c_1 &= -d_1, \\ c_2 &= -2d_1 + d_2. \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω εξισώσεις σαν ένα 8×9 πίνακα και να λύσουμε το σύστημα με απαλοιφή. Στην περίπτωσή μας βέβαια το σύστημα είναι τόσο απλό που μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $d_1 = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις εξισώσεις βρίσκουμε ότι $c_2 = -1$ και $d_2 = -1$. Οι υπόλοιπες χρήσιμες εξισώσεις είναι οι εξής

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_1 + 1, \\ a_2 + b_2 &= -2a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Άρα $a_1 = \frac{1}{2}$ και $b_2 = -1$. Το a_2 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μια και ψάχνουμε μια οποιαδήποτε λύση ας επιλέξουμε $a_2 = 0$. Τότε,

$$\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,e^t \\ -te^t - t - 1 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, $x_1 = \frac{1}{2}\,e^t$, $x_2 = -te^t - t - 1$. Η γενική λύση του συστήματος είναι όπως γνωρίσουμε το άθροισμα τις συγκεκριμένης λύσης που μόλις βρήκαμε και τις συμπληρωματικής λύσης. Παρατηρήστε ότι μας χρειάσθηκαν και η $\vec{a}e^t$ και η $\vec{b}te^t$.

3.8.2 *Εξετάστε εάν οι x_1 και x_2 είναι πράγματι λύσεις. Επίσης δοκιμάστε να θέσετε $a_2 = 1$ και δοκιμάστε εάν οι προκύπτουσες συναρτήσεις είναι λύσεις. Ποια είναι η διαφορά των δύο λύσεων που υπολογίζουμε με τον τρόπο αυτό*

3.8.2 Εξισώσεις πρώτης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

Υπάρχει βεβαίως και η μέθοδος των μεταβλητών παραμέτρων , την οποία ήδη χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε απλές εξισώσεις. Για την περίπτωση συστημάτων με σταθερούς συντελεστές η μέθοδος αυτή ουσιαστικά ταυτίζεται με την μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων με την οποία ασχοληθήκαμε παραπάνω. Η μέθοδος αυτή αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον για συστήματα με μη-σταθερούς συντελεστές και ιδιαίτερα στην περίπτωση που ήδη έχουμε την λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \tag{3.9}$$

και ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη λύσει την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$ και βρήκαμε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων $X(t)$. Η γενικευμένη λύση του ομογενούς προβλήματος είναι βεβαίως $X(t)\vec{c}$ για κάποιο σταθερό διάνυσμα $\vec{c}$. Όπως ακριβώς στην περίπτωση της μίας εξίσωσης ας προσπαθήσουμε να βρούμε την λύση της μη-ομογενούς χρησιμοποιώντας μια μαντεψιά της μορφής

$$\vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t),$$

όπου $\vec{u}(t)$ είναι ένα διάνυσμα τα στοιχεία του οποίου αντί για σταθερές είναι συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας στην (3.9) έχουμε

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Επειδή ο X είναι ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων του ομογενούς έχουμε ότι $X'(t) = A(t)X(t)$, και συνεπώς

$$X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Άρα $X(t)\,\vec{u}\,'(t) = \vec{f}(t)$. Εάν υπολογίσουμε το $[X(t)]^{-1}$, τότε $\vec{u}\,'(t) = [X(t)]^{-1}\,\vec{f}(t)$. Ας ολοκληρώσουμε τώρα για να πάρουμε το $\vec{u}$ και κατ' επέκταση την $\vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t)$. Μπορούμε βεβαίως να γράψουμε την λύση ως εξής

$$\boxed{\vec{x}_p = X(t)\int [X(t)]^{-1}\,\vec{f}(t)\;dt.}$$

Σημειώστε ότι αν ο A είναι σταθερός και προσπαθήσουμε την μαντεψιά $X(t) = e^{tA}$, έχουμε ότι $[X(t)]^{-1} = e^{-tA}$ και συνεπώς παίρνουμε την λύση $\vec{x}_p = e^{tA}\int e^{-tA}\,\vec{f}(t)\,dt$ δηλαδή ότι ακριβώς πήραμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Παράδειγμα 3.8.4: Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{3.10}$$

Στην περίπτωση αυτή ο $A = \frac{1}{t^2+1}\left[\begin{smallmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{smallmatrix}\right]$ προφανώς δεν είναι σταθερός πίνακας. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε (η μαντεύουμε) ότι ο $X = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right]$ αποτελεί λύση του $X'(t) = A(t)X(t)$. Από την στιγμή που έχουμε την συμπληρωματική λύση είναι εύκολο να υπολογίσουμε την γενικευμένη λύση του (3.10). Πρώτα διαπιστώνουμε ότι

$$[X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Μια συγκεκριμένη λύση του (3.10) όπως γνωρίσουμε είναι η

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p &= X(t)\int [X(t)]^{-1}\,\vec{f}(t)\;dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1)\;dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2+1 \end{bmatrix}\;dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}\,t^3+t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,t^4 \\ \frac{2}{3}\,t^3+t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας σε αυτήν την συμπληρωματική λύση παίρνουμε την εξής γενικευμένη λύση του (3.10).

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,t^4 \\ \frac{2}{3}\,t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 t + \frac{1}{3}\,t^4 \\ c_2 + (c_1+1)\,t + \frac{2}{3}\,t^3 \end{bmatrix}.$$

3.8.3 *Επιβεβαιώστε ότι πράγματι οι* $x_1 = \frac{1}{3}\,t^4$ *και* $x_2 = \frac{2}{3}\,t^3 + t$ *αποτελούν λύση του* (3.10).

3.8.3 Συστήματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Απροσδιόριστοι συντελεστές

Έχουμε ήδη επιλύσει συστήματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών στο § 3.5. Η μέθοδος είναι ουσιαστικά η ίδια με την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών για συστήματα πρώτης τάξης. Μπορούμε να κάνουμε κάποιες χρήσιμες απλοποιήσεις, σαν αυτές που κάναμε στην § 3.5. Θεωρήστε την εξίσωση

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

όπου ο πίνακας A είναι σταθερός. Αν το διάνυσμα $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$, τότε μπορούμε να πάρουμε σαν μαντεψιά της λύσης την εξής

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t,$$

και προφανώς δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε ημίτονα.

Αν το $\vec{F}$ είναι άθροισμα συνημιτόνων, τότε με βάση την αρχή της υπέρθεσης, αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$, μπορούμε να δοκιμάσουμε την μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ για να λύσουμε το $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t$, μπορούμε να δοκιμάσουμε την μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ για να λύσουμε το $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_1 t$. Μετά μπορούμε απλώς να προσθέσουμε τις λύσεις.

Την περίπτωση να υπάρχει ήδη κάποιος όρος της μαντεψιάς μας και στην συμπληρωματική λύση, ή η εξίσωση να είναι της μορφής $\vec{x}'' = A\vec{x}' + B\vec{x} + \vec{F}(t)$, μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που χρησιμοποιήσαμε για τα συστήματα πρώτης τάξης.

Όπως έχουμε τέλος ήδη διαπιστώσει δεν θα χάσουμε τίποτε εάν στην μαντεψιά μας συμπεριλάβουμε και όρους της συμπληρωματικής λύσης, απλά οι συντελεστών των όρων αυτών θα διαπιστώσουμε ότι έχουν τιμή μηδέν και απλώς θα έχουμε ταλαιπωρηθεί χωρίς λόγο με κάποιες επιπρόσθετες πράξεις που δεν ήταν αναγκαίες.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Για να λύσουμε το σύστημα

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων*, με ακριβώς τον ίδιο τρόπο με τα συστήματα πρώτης τάξης.

Έστω οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ και τα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Όπως και πριν με βάση το $E = [\, \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n \,]$ έχουμε.

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \, \xi_1(t) + \vec{v}_2 \, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \, \xi_n(t).$$

Αναλύουμε το $\vec{F}$ με όρους ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1 \, g_1(t) + \vec{v}_2 \, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \, g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

Αντικαθιστούμε και όπως και πριν έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{x}\,'' &= \vec{v}_1\,\xi_1'' + \vec{v}_2\,\xi_2'' + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n'' \\
&= A\,(\vec{v}_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n) + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= A\vec{v}_1\,\xi_1 + A\vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,\lambda_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\lambda_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\lambda_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,(\lambda_1\,\xi_1 + g_1) + \vec{v}_2\,(\lambda_2\,\xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n\,(\lambda_n\,\xi_n + g_n).
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\xi_1'' &= \lambda_1\,\xi_1 + g_1, \\
\xi_2'' &= \lambda_2\,\xi_2 + g_2, \\
&\;\;\vdots \\
\xi_n'' &= \lambda_n\,\xi_n + g_n.
\end{aligned}$$

Κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ανεξάρτητη από τις άλλες και συνεπώς μπορούμε να την λύσουμε με μεθόδους του κεφαλαίου 2. Γράφουμε λοιπόν $\vec{x}(t) = \vec{v}_1\,\xi_1(t) + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n(t)$, και έχουμε συνεπώς υπολογίσει μια συγκεκριμένη λύση.

Παράδειγμα 3.8.5: Ας λύσουμε το σύστημα του παραδείγματος § 3.5 χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$\vec{x}\,'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Οι ιδιοτιμές είναι -1 και -4, και τα ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. Άρα $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ και $E^{-1} = \frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Συνεπώς,

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1}\vec{F}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cos 3t \\ \frac{-2}{3}\cos 3t \end{bmatrix}.$$

Τέλος αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi_1'' &= -\xi_1 + \frac{2}{3}\cos 3t, \\
\xi_2'' &= -4\,\xi_2 - \frac{2}{3}\cos 3t.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, μαντεύοντας ότι $C_1 \cos 3t$ είναι η λύση της πρώτης εξίσωσης και $C_2 \cos 3t$ είναι η λύση της δεύτερης εξίσωση και αντικαθιστώντας έχουμε

$$-9C_1 \cos 3t = -C_1 \cos 3t + \frac{2}{3} \cos 3t,$$
$$-9C_2 \cos 3t = -4C_2 \cos 3t - \frac{2}{3} \cos 3t.$$

Μπορούμε να λύσουμε κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις ξεχωριστά και να πάρουμε ότι $-9C_1 = -C_1 + 2/3$ και $-9C_2 = -4C_2 - 2/3$. Άρα $C_1 = -1/12$ και $C_2 = 2/15$. Συνεπώς η συγκεκριμένη λύση μας είναι

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{-1}{12} \cos 3t \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\frac{2}{15} \cos 3t \right) = \begin{bmatrix} 1/20 \\ -3/10 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Βεβαίως η λύση μας αυτή ταυτίζεται με αυτήν που βρήκαμε στην § 3.5.

3.8.4 Ασκήσεις

3.8.4 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος $x' = x + 2y + 2t$, $y' = 3x + 2y - 4$, α) χρησιμοποιώντας την μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, β) χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανάλυσης ιδιοδιανυσμάτων, γ) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.*

3.8.5 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος $x' = 4x + y - 1$, $y' = x + 4y - e^t$, α) χρησιμοποιώντας την μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, β) χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανάλυσης ιδιοδιανυσμάτων, γ) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.*

3.8.6 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος $x_1'' = -6x_1 + 3x_2 + \cos t$, $x_2'' = 2x_1 - 7x_2 + 3\cos t$, α) χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανάλυσης ιδιοδιανυσμάτων, β) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.*

3.8.7 *Βρείτε μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος $x_1'' = -6x_1 + 3x_2 + \cos 2t$, $x_2'' = 2x_1 - 7x_2 + 3\cos 2t$, α) χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανάλυσης ιδιοδιανυσμάτων, β) χρησιμοποιώντας την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.*

3.8.8 *Θεωρήστε την εξίσωση*

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ 1 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ -t \end{bmatrix}.$$

α) Επιβεβαιώστε ότι η

$$\vec{x}_c = c_1 \begin{bmatrix} t \sin t \\ -t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{bmatrix}$$

είναι η συμπληρωματική λύση. β) Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων για να βρείτε μια συγκεκριμένη λύση.

Κεφάλαιο 4

Σειρές *Fourier*

4.1 Προβλήματα συνοριακών τιμών

4.1.1 Προβλήματα συνοριακών τιμών

Πριν ασχοληθούμε με τις σειρές *Fourier*, πρέπει να μελετήσουμε τα *προβλήματα συνοριακών τιμών* Για παράδειγμα, έστω ότι για κάποια σταθερά λ έχουμε

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0,$$

όπου το $x(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Σε αντίθεση με προηγουμένως, όπου καθορίζαμε την τιμή και την παράγωγο της λύσης σε ένα σημείο, τώρα ορίσουμε την τιμή της λύσης σε δύο διαφορετικά σημεία. Σημειώστε ότι η $x = 0$ είναι προφανώς μια λύση της εξίσωσης, οπότε και το θέμα της ύπαρξης λύσεων δεν μας απασχολεί. Η μοναδικότητα της λύσης όμως είναι ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα. Περιμένουμε ότι στην γενική λύση του $x'' + \lambda x = 0$ θα εμπλέκονται δύο τυχαίες σταθερές. Είναι λοιπόν λογικό (αλλά λάθος!) να πιστεύουμε ότι ικανοποιώντας τις δύο συνοριακές συνθήκες θα οδηγηθούμε σε μοναδική λύση.

Παράδειγμα 4.1.1: Έστω $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = \pi$. Δηλαδή έχουμε,

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προφανώς η $x = \sin t$ είναι μια άλλη λύση (επιπρόσθετα της $x = 0$) η οποία βεβαίως ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Υπάρχουν όμως και άλλες λύσεις; Ας γράψουμε την γενική λύση της εξίσωσης η οποία γνωρίσουμε ότι είναι η $x = A\cos t + B\sin t$. Η συνθήκη $x(0) = 0$ μας αναγκάζει να θέσουμε $A = 0$. Η άλλη συνθήκη $x(\pi) = 0$ δεν μας προσφέρει κάποια επιπρόσθετη πληροφορία μια και η $x = B\sin t$ την ικανοποιεί για οποιαδήποτε τιμή του B. Υπάρχουν δηλαδή άπειρες λύσεις της μορφής $x = B\sin t$, όπου B είναι μια τυχαία σταθερά.

Παράδειγμα 4.1.2: Ας εξετάσουμε την περίπτωση του $\lambda = 2$.

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Η γενική λύση είναι $x = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t$. Θέτοντας $x(0) = 0$ έχουμε $A = 0$. Για να ικανοποιήσουμε την δεύτερη συνθήκη πρέπει να έχουμε $0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{2}\,\pi$. Επειδή $\sin\sqrt{2}\,\pi \neq 0$ παίρνουμε ότι $B = 0$. Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος.

Τι συμβαίνει λοιπόν με τα προβλήματα αυτά; Μας ενδιαφέρει προφανώς να ανακαλύψουμε για ποιες σταθερές λ έχουμε μη-μηδενικές λύσεις, και φυσικά να υπολογίσουμε τις λύσεις αυτές. Το πρόβλημα αυτό είναι ανάλογο με το πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα.

4.1.2 Προβλήματα ιδιοτιμών

Για να αναπτύξουμε τα βασικά στοιχεία των σειρών *Fourier* θα χρειαστεί να μελετήσουμε τα παρακάτω τρία προβλήματα ιδιοτιμών.

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{4.1}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(a) = 0, \quad x'(b) = 0, \tag{4.2}$$

και

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \tag{4.3}$$

Ένας αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του (4.1) (αντίστοιχα του (4.2) ή (4.3)) αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενική λύση (λύση που δεν είναι ταυτοτικά μηδέν) του (4.1) (αντίστοιχα του (4.2) ή (4.3)) με δεδομένο το συγκεκριμένο λ. Η μη-μηδενική αυτή λύση που βρίσκουμε λέγεται το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα*.

Σημειώστε την ομοιότητα με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα πινάκων. Η ομοιότητα αυτή δεν είναι καθόλου τυχαία. Εάν φανταστούμε τις αλγεβρικές εξισώσεις σαν διαφορικούς τελεστές, τότε ακολουθούμε ακριβώς τη ίδια διαδικασία. Για παράδειγμα θέτουμε $L = -\frac{d^2}{dt^2}$. Αναζητούμε μη-μηδενικές συναρτήσεις f οι οποίες να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες και αποτελούν λύσεις της $(L - \lambda)f = 0$. Μεγάλο μέρος του φορμαλισμού της γραμμικής άλγεβρας μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί και για τα προβλήματα του κεφαλαίου αυτού. Δεν θα επεκταθούμε όμως στο θέμα αυτό.

Παράδειγμα 4.1.3: Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του εξής προβλήματος

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Για λόγους που σύντομα θα κατανοήσουμε, ας ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ ξεχωριστά. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $\lambda > 0$, για την οποία η γενική λύση της εξίσωσης $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t.$$

Η συνθήκη $x(0) = 0$ αμέσως συνεπάγεται ότι $A = 0$. Επίσης

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda}\, \pi.$$

Αν το B είναι μηδέν τότε η x δεν είναι μη-μηδενική λύση. Άρα για να πάρουμε μια μη-μηδενική λύση πρέπει να έχουμε $\sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$. Άρα, η $\sqrt{\lambda}\, \pi$ πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π. Με άλλα λόγια, πρέπει να ισχύει $\sqrt{\lambda} = k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Συνεπώς οι θετικές ιδιοτιμές είναι k^2 για όλους του ακέραιους $k \geq 1$. Μπορούμε να επιλέξουμε εύκολα σαν αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις τις $x = \sin kt$. Προφανώς, όπως και στην γραμμική άλγεβρα, κάθε πολλαπλάσιο ενός ιδιοδιανύσματος είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα, άρα αρκεί να επιλέξουμε μόνον ένα από αυτά.

Εάν $\lambda = 0$ η εξίσωση εκφυλίζεται στην $x'' = 0$ και βεβαίως η γενική λύση είναι $x = At + B$. Η συνθήκη $x(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $B = 0$, και η $x(\pi) = 0$ ότι $A = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda = 0$ $\delta\epsilon\nu$ είναι ιδιοτιμή.

Τέλος ας υποθέσουμε ότι $\lambda < 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε την εξής γενική λύση

$$x = A \cosh \sqrt{-\lambda}\, t + B \sinh \sqrt{-\lambda}\, t.$$

Θέτοντας $x(0) = 0$ παίρνουμε ότι $A = 0$ (θυμηθείτε ότι $\cosh 0 = 1$ και $\sinh 0 = 0$). Άρα η λύση μας πρέπει να είναι της μορφής $x = B \sinh \sqrt{-\lambda}\, t$ και να ικανοποιεί την συνθήκη $x(\pi) = 0$. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν μόνον εάν το B είναι μηδέν. Γιατί; Επειδή η $\sinh \xi$ είναι μηδέν μόνον για $\xi = 0$, κάντε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $sinh$ για να επιβεβαιώσετε την παρατήρηση αυτή. Εναλλακτικά μπορούμε να την επιβεβαιώσουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $sinh$ με βάση τον οποίο έχουμε $0 = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Άρα $e^t = e^{-t}$, το οποίο μας δίνει $t = -t$ και το οποίο ισχύει μόνον όταν $t = 0$. Άρα δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.

Συμπερασματικά, οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\lambda_k = k^2 \qquad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \qquad x_k = \sin kt \qquad \text{για κάθε ακέραιο } k \geq 1.$$

Παράδειγμα 4.1.4: Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του εξής προβλήματος

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0.$$

Ας εξετάσουμε και πάλι κάθε μια από τις περιπτώσεις $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ ξεχωριστά. Πρώτα ας υποθέσουμε ότι $\lambda > 0$. Η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι $x = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t$. Άρα

$$x' = -A \sin \sqrt{\lambda}\, t + B \cos \sqrt{\lambda}\, t.$$

Η συνθήκη $x'(0) = 0$ συνεπάγεται $B = 0$. Επιπρόσθετα έχουμε

$$0 = x'(\pi) = -A \sin \sqrt{\lambda}\, \pi.$$

Επειδή ο A δεν μπορεί να είναι μηδενικός εάν θέλουμε το λ να είναι ιδιοτιμή, και το $\sin \sqrt{\lambda}\, \pi$ είναι μηδέν μόνον όταν $\sqrt{\lambda} = k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Συνεπώς οι θετικές ιδιοτιμές είναι και πάλι οι k^2 για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ ενώ σαν αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να πάρουμε τις $x = \cos kt$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\lambda = 0$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση εκφυλίζεται στην $x'' = 0$ και η γενική λύση είναι $x = At + B$ οπότε έχουμε $x' = A$. Η $x'(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $A = 0$. Προφανώς θέτοντας $x'(\pi) = 0$ δεν παίρνουμε κάποια επιπρόσθετη πληροφορία σχετικά με την λύση. Αυτό σημαίνει ότι το B μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή (ας επιλέξουμε λοιπόν την τιμή 1). Άρα η $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή και η $x = 1$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Τέλος, αν $\lambda < 0$ η γενική λύση έχει την μορφή $x = A\cosh\sqrt{-\lambda}\,t + B\sinh\sqrt{-\lambda}\,t$ και συνεπώς

$$x' = A\sinh\sqrt{-\lambda}\,t + B\cosh\sqrt{-\lambda}\,t.$$

Είδαμε ήδη ότι (τα A και B ανταλλάσσουν τους ρόλους τους) για να είναι η λύση μηδέν για $t = 0$ και $t = \pi$ πρέπει $A = B = 0$. Δεν υπάρχουν λοιπόν αρνητικές ιδιοτιμές.

Συμπερασματικά, οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\lambda_k = k^2 \qquad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \qquad x_k = \sin kt \qquad \text{για κάθε ακέραιο } k \geq 1,$$

και υπάρχει και μια ακόμα ιδιοτιμή

$$\lambda_0 = 0 \qquad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \qquad x_0 = 1.$$

Το παρακάτω πρόβλημα είναι αυτό που μας οδηγεί στις γενικές σειρές *Fourier*.

Παράδειγμα 4.1.5: Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του εξής προβλήματος

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(-\pi) = x(\pi), \quad x'(-\pi) = x'(\pi).$$

Ας παραλείψουμε την περίπτωση $\lambda < 0$ την οποία μπορούμε εύκολα να αντιμετωπίσουμε όπως παραπάνω καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.

Για $\lambda = 0$, η γενική λύση είναι $x = At + B$. Η συνθήκη $x(-\pi) = x(\pi)$ συνεπάγεται ότι $A = 0$ (η $A\pi + B = -A\pi + B$ συνεπάγεται ότι $A = 0$). Η δεύτερη συνθήκη $x'(-\pi) = x'(\pi)$ δεν επιβάλει κάποιον περιορισμό στις τιμές του B και συνεπώς η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x = 1$.

Για $\lambda > 0$ έχουμε ότι $x = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$. Τώρα

$$A\cos -\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin -\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi.$$

Αν θυμηθούμε ότι $\cos -\theta = \cos\theta$ και $\sin -\theta = -\sin\theta$ παίρνουμε

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi.$$

και συνεπώς είτε $B = 0$ ή $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$. Παρόμοια (άσκηση) αν παραγωγίσουμε την x και αντικαταστήσουμε στην δεύτερη συνθήκη βρίσκουμε ότι είτε $A = 0$ ή $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$. Άρα για να έχουμε και το A και το B μηδέν πρέπει να ισχύει $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Συνεπώς, η $\sqrt{\lambda}$ είναι κάποιος ακέραιος και όπως και προηγουμένως οι ιδιοτιμές είναι ξανά $\lambda = k^2$ για κάθε ακέραιο $k \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή όμως η $x = A\cos kt + B\sin kt$ είναι ιδιοσυνάρτηση για κάθε τιμή του A και του B. Άρα έχουμε τις εξής δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις $\sin kt$ και $\cos kt$.

Συμπερασματικά, οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\begin{array}{llll} \lambda_k = k^2 & \text{με ιδιοδιανύσματα} & \cos kt \quad \text{και} \quad \sin kt & \text{για κάθε ακέραιο } k \geq 1, \\ \lambda_0 = 0 & \text{με ιδιοδιάνυσμα} & x_0 = 1. & \end{array}$$

4.1.3 Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων

Θεώρημα 4.1.1. *Εάν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος* (4.1), (4.2) *ή* (4.3) *που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 τότε αυτές είναι* ορθογώνιες *με την εξής έννοια*

$$\int_a^b x_1(t)x_2(t)\ dt = 0.$$

Το θεώρημα αυτό έχει την εξής πολύ απλή, κομψή και διαφωτιστική απόδειξη. Ξεκινούμε με τις εξής δύο εξισώσεις

$$x_1'' + \lambda_1 x_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad x_2'' + \lambda_2 x_2 = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με x_2 και την δεύτερη με x_1 και αφαιρούμε για να καταλήξουμε στην σχέση

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2 = x_2''x_1 - x_2x_1''.$$

Ας ολοκληρώσουμε τώρα και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b x_1x_2\ dt &= \int_a^b x_2''x_1 - x_2x_1''\ dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(x_2'x_1 - x_2x_1'\right)\ dt \\ &= \Big[x_2'x_1 - x_2x_1'\Big]_{t=a}^b = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει εξ αιτίας των συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε την (4.1) έχουμε $x_1(a) = x_1(b) = x_2(a) = x_2(b) = 0$ και άρα $x_2'x_1 - x_2x_1'$ είναι μηδέν και στο a και στο b. Μια και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

4.1.1(εύκολη) *Ολοκληρώστε πλήρως την απόδειξη του θεωρήματος (ελέγξτε την τελευταία ισότητα της απόδειξης) για τις περιπτώσεις* (4.2) *και* (4.3).

Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η $\sin nt$ είναι ιδιοδιάνυσμα του προβλήματος $x''+\lambda x = 0$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$. Άρα έχουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi (\sin mt)(\sin nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n.$$

Παρόμοια έχουμε

$$\int_0^\pi (\cos mt)(\cos nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n.$$

και τελικά έχουμε

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin mt)(\sin nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^\pi (\cos mt)(\cos nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

και

$$\int_{-\pi}^\pi (\cos mt)(\sin nt)\ dt = 0.$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε (δείτε το την απόδειξη) ότι ισχύει για τις $x'(a) = x'(b) = 0$, ή για τις $x(a) = x'(b) = 0$ ή για τις $x'(a) = x(b) = 0$.

Μπορούμε, με βάση τα παραπάνω, να εφαρμόσουμε το θεώρημα για να βρούμε τις τιμές των εξής ολοκληρωμάτων

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin mt)(\sin nt)\ dt = 0 \qquad \text{και} \qquad \int_{-\pi}^\pi (\cos mt)(\cos nt)\ dt = 0,$$

όταν $m \neq n$, και

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin mt)(\cos nt)\ dt = 0,$$

για κάθε m και n.

4.1.4 Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Ας ασχοληθούμε για λίγο με ένα ιδιαίτερα χρήσιμο θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων. Το θεώρημα αυτό ισχύει για πολύ πιο γενικά προβλήματα από αυτό που θα ασχοληθούμε εμείς. Η απλή μορφή του, που θα παρουσιάσουμε παρακάτω, όμως καλύπτει πλήρως τις ανάγκες μας.

Θεώρημα 4.1.2 (εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm* *)**.** *Είτε το πρόβλημα*

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4.4}$$

*Πήρε το όνομά του από τον Σουηδό μαθηματικό *Erik Ivar Fredholm* (1866 – 1927).

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το πρόβλημα

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4.5}$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή συνάρτηση f.

Το θεώρημα ισχύει και για τις υπόλοιπες (διαφορετικού τύπου) συνοριακές συνθήκες που έχουμε συναντήσει παραπάνω. Το θεώρημα ουσιαστικά μας δηλώνει ότι εάν το λ δεν είναι ιδιοτιμή, τότε το μη-ομογενές πρόβλημα (4.5) έχει μοναδική λύση για κάθε δεξιό μέλος. Μας δηλώνει επίσης ότι αν η λ είναι ιδιοτιμή τότε το πρόβλημα (4.5) μπορεί να μην έχει λύση για κάποιες f, και επιπρόσθετα, ακόμα και εάν έχει λύση τότε αυτή δεν θα είναι μοναδική.

4.1.5 Ασκήσεις

Υπόδειξη: Για όλες τις παρακάτω ασκήσεις σημειώστε ότι οι $\cos\sqrt{\lambda}\,(t-a)$ και $\sin\sqrt{\lambda}\,(t-a)$ είναι επίσης λύσης του ομογενούς προβλήματος.

4.1.2 *Υπολογίστε όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του προβλήματος*

- $x'' + \lambda x = 0,\ x(a) = 0,\ x(b) = 0.$
- $x'' + \lambda x = 0,\ x'(a) = 0,\ x'(b) = 0.$
- $x'' + \lambda x = 0,\ x'(a) = 0,\ x(b) = 0.$
- $x'' + \lambda x = 0,\ x(a) = x(b),\ x'(a) = x'(b).$

4.1.3 *Ελέγξτε αναλυτικά την περίπτωση του $\lambda < 0$ για το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών $x'' + \lambda x = 0,\ x(-\pi) = x(\pi),\ x'(-\pi) = x'(\pi)$. Ειδικότερα δείξτε ότι δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.*

4.2 Τριγωνομετρικές σειρές

4.2.1 Περιοδικές συναρτήσεις

Η μελέτη του προβλήματος

$$x'' + \omega_0^2 x = f(t), \tag{4.6}$$

όπου $f(t)$ είναι κάποια περιοδική συνάρτηση θα μας δώσει ένα σαφές κίνητρο για να μελετήσουμε τις σειρές $Fourier$. Ήδη έχουμε λύσει την εξίσωση

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega\, t. \tag{4.7}$$

Ένας τρόπος για να λύσουμε την (4.6) είναι να αναλύσουμε την $f(t)$ σαν άθροισμα ημιτόνων (ενδεχομένως και συνημιτόνων) και κατόπιν να λύσουμε πολλά προβλήματα της μορφής (4.7). Μετά αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης, για να αθροίσουμε όλες τις λύσεις που πήραμε και έτσι να αποκτήσουμε την λύση της (4.6).

Πριν προχωρήσουμε παραπέρα, ας ασχοληθούμε για λίγο με μερικά θέματα των περιοδικών συναρτήσεων. Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t. Εν συντομία θα λέμε ότι η $f(t)$ είναι P-περιοδική. Σημειώστε ότι μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική και ούτω καθ' εξής. Για παράδειγμα, οι $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική όπως βεβαίως είναι και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο αριθμό k. Οι σταθερές συναρτήσεις αποτελούν ακραία παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων. Είναι περιοδικές ως προς οποιαδήποτε περίοδο (γιατί;).

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ την οποία επιθυμούμε να *επεκτείνουμε περιοδικά* έτσι ώστε να την κάνουμε $2L$-περιοδική συνάρτηση. Μπορούμε να κάνουμε την επέκταση αυτή ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε για t στο διάστημα $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$. Για t στο διάστημα $[L, 3L]$, ορίζουμε $F(t) = f(t - 2L)$, για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$, και ούτω το καθεξής.

Παράδειγμα 4.2.1: Ορίστε την $f(t) = 1 - t^2$ στο διάστημα $[-1, 1]$ και επεκτείνετε την περιοδικά έτσι ώστε να πάρετε μια 2-περιοδική συνάρτηση. Δείτε το Σχήμα 4.1 στην επόμενη σελίδα.

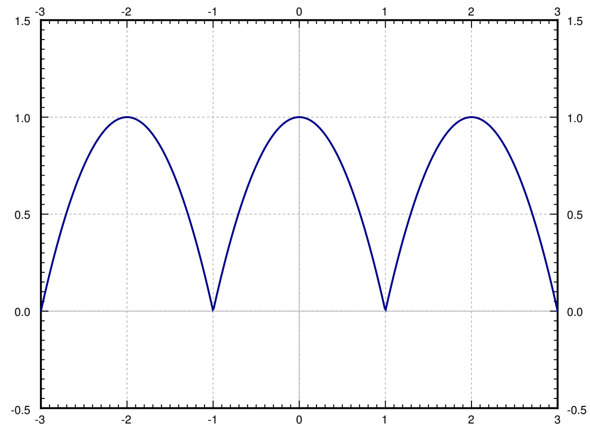
Προσοχή! Η $f(t)$ δεν ταυτίζεται με την επέκτασή της. Για παράδειγμα η $f(t)$ μπορεί να είναι επίσης περιοδική με άλλη περίοδο από την επέκτασή της $F(t)$.

4.2.1 *Ορίστε την $f(t) = \cos t$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Κατασκευάστε την π-περιοδική επέκτασή της και κάντε την γραφική της παράσταση. Συγκρίνετε την με την γραφική παράσταση της $\cos t$.*

4.2.2 Εσωτερικό γινόμενο και ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Για να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{v}$ σε συνδυασμό διανυσμάτων $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ ορθογώνιων μεταξύ τους έχουμε

$$\vec{v} = a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2.$$



Σχήμα 4.1: Περιοδική επέκταση της συνάρτησης $1 - t^2$.

Ας υπολογίσουμε έναν τύπο για τα a_1 και a_2. Πρώτα ας υπολογίσουμε

$$\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle = \langle a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = a_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle + a_2 \langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = a_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle.$$

Άρα,

$$a_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}.$$

Παρόμοια έχουμε

$$a_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle}.$$

Πιθανώς να θυμάστε τον παραπάνω τύπο από το μάθημα του Λογισμού.

Παράδειγμα 4.2.2: Γράψτε το $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\vec{w}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Ξεκινήστε σημειώνοντας ότι τα $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους μια και $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0$. Τότε

$$a_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$a_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \frac{2 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.2.3 Τριγωνομετρικές σειρές

Τώρα, αντί να αναλύσουμε ένα διάνυσμα ως προς τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα, ας αναλύσουμε μια συνάρτηση ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις ενός προβλήματος ιδιοτιμών. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(-\pi) = x(\pi), \quad x'(-\pi) = x'(\pi)$$

του οποίου τα ιδιοδιανύσματα ξέρουμε ότι είναι 1, $\cos kt$ και $\sin kt$. Θέλουμε να παραστήσουμε μια 2π-περιοδική συνάρτηση $f(t)$ ως εξής

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Η παραπάνω σειρά λέγετε *σειρά Fourier*[†] ή *τριγωνομετρική σειρά* του $f(t)$. Σημειώστε ότι, για δικιά μας ευκολία, χρησιμοποιήσαμε την ιδιοσυνάρτηση $\frac{1}{2}$ αντί για την 1. Μπορούμε βεβαίως να θεωρήσουμε ότι $1 = \cos 0t$, και συνεπώς να ασχοληθούμε μόνον με τις $\cos kt$ και $\sin kt$.

Ας ορίσουμε τώρα το *εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων*. Για παράδειγμα, για να βρούμε το a_n πρέπει να υπολογίσουμε το $\langle\, f(t)\,,\, \cos nt\,\rangle$. Ορίσουμε λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο ως εξής

$$\langle\, f(t)\,,\, g(t)\,\rangle \overset{\text{δεφ}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\; dt.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό αυτόν, βλέπουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις $\cos kt$ (συμπεριλαμβανομένου του σταθερού ιδιοδιανύσματος), και $\sin kt$ είναι, όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, *ορθογώνιες* με την εξής έννοια

$$\begin{aligned}
\langle\, \cos mt\,,\, \cos nt\,\rangle &= 0 \qquad \text{για } m \neq n,\\
\langle\, \sin mt\,,\, \sin nt\,\rangle &= 0 \qquad \text{για } m \neq n,\\
\langle\, \sin mt\,,\, \cos nt\,\rangle &= 0 \qquad \text{για κάθε } m \text{ και } n.
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\langle\, \cos nt\,,\, \cos nt\,\rangle = 1$ (εκτός από την περίπτωση $n = 0$) και $\langle\, \sin nt\,,\, \sin nt\,\rangle = 1$. Για την σταθερά έχουμε $\langle\, 1\,,\, 1\,\rangle = 2$. Οι συντελεστές λοιπόν δίνονται από τις σχέσεις

$$\boxed{\begin{aligned}
a_n &= \frac{\langle\, f(t)\,,\, \cos nt\,\rangle}{\langle\, \cos nt\,,\, \cos nt\,\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\; dt,\\
b_n &= \frac{\langle\, f(t)\,,\, \sin nt\,\rangle}{\langle\, \sin nt\,,\, \sin nt\,\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\; dt.
\end{aligned}}$$

[†] Από το όνομα του Γάλλου μαθηματικού *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830).

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και για $n = 0$, οπότε έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt.$$

Ας ελέγξουμε τους τύπου που πήραμε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ορθογωνιότητας. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Τότε για $m \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle\, f(t)\, ,\, \cos mt\, \rangle &= \Big\langle\, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\, ,\, \cos mt\, \Big\rangle \\ &= \frac{a_0}{2}\langle\, 1\, ,\, \cos mt\, \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle\, \cos nt\, ,\, \cos mt\, \rangle + b_n\langle\, \sin nt\, ,\, \cos mt\, \rangle \\ &= a_m\langle\, \cos mt\, ,\, \cos mt\, \rangle.\end{aligned}$$

και συνεπώς $a_m = \frac{\langle\, f(t)\, ,\, \cos mt\, \rangle}{\langle\, \cos mt\, ,\, \cos mt\, \rangle}$.

4.2.2 *Υπολογίστε αναλυτικά τα a_0 και b_m.*

Παράδειγμα 4.2.3: Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

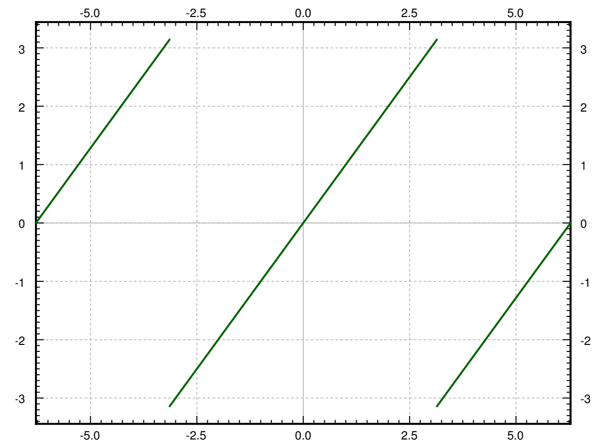
για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς $Fourier$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή με το όνομα *πριονωτή*.

Η γραφική παράσταση της επεκταμένης περιοδικής συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 4.2 στην επόμενη σελίδα. Ας υπολογίσουμε τώρα τους συντελεστές ξεκινώντας από το a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\ dt = 0.$$

Θα κάνουμε συχνή χρήση του γεγονότος ότι το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν. Θυμηθείτε ότι λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι περιττή αν $\varphi(-t) = -\varphi(t)$. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις t, $\sin t$, και εν προκειμένω $t \cos mt$ είναι όλες περιττές.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt\ dt = 0.$$



Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση της πριονωτής συνάρτησης.

Ας υπολογίσουμε τώρα τα b_m. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα μιας άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα. Θυμηθείτε ότι λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι άρτια αν $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Για παράδειγμα η $t \sin mt$ είναι άρτια.

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \; dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \sin mt \; dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-t \cos mt}{m} \right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \cos mt \; dt \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos m\pi}{m} + 0 \right) \\
&= \frac{-2 \cos m\pi}{m} = \frac{2\,(-1)^{m+1}}{m}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\cos m\pi = (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{αν το } m \text{ είναι άρτιο,} \\ -1 & \text{αν το } m \text{ είναι περιττό.} \end{cases}$$

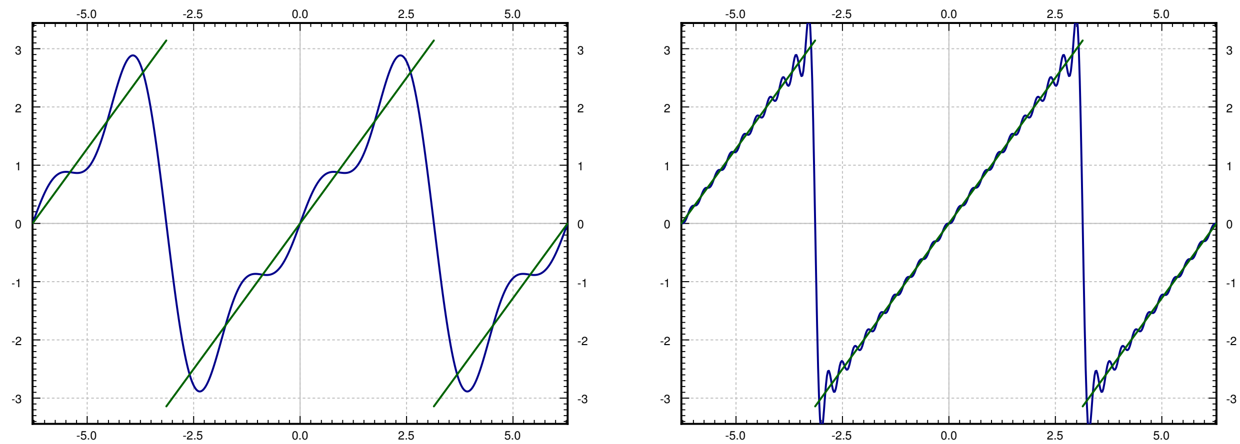
Άρα οι σειρές είναι

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \; \sin nt.$$

Ας γράψουμε τις 3 πρώτες αρμονικές των σειρών του $f(t)$.

$$f(t) = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3}\sin 3\,t + \cdots$$

Η γραφική παράσταση των πρώτων τριών αυτών όρων των σειρών, μαζί με αυτή των πρώτων 20 δίδεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Οι πρώτες 3 (αριστερό γράφημα) και οι πρώτες 20 (δεξιό γράφημα) αρμονικές της πριονωτής συνάρτησης.

Παράδειγμα 4.2.4: Να επεκταθεί περιοδικά η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \le 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \le \pi. \end{cases}$$

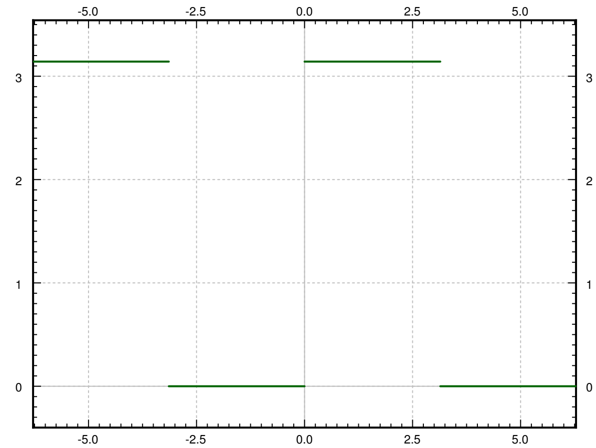
και να γραφθεί σαν σειρά $Fourier$. Η εν λόγω συνάρτηση, και οι παραλλαγές της, εμφανίζεται συχνά σε πολλές εφαρμογές και είναι γνωστή με το όνομα *τετραγωνικό κύμα*.

Η γραφική παράσταση της επεκταμένη περιοδικής συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 4.4 στην επόμενη σελίδα. Ας υπολογίσουμε τώρα τους συντελεστές ξεκινώντας από το a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\; dt = \pi.$$

Ακολούθως,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\; dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos mt\; dt = 0.$$



Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης του τετραγωνικού κύματος.

και τελικά

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi \sin mt\ dt \\ &= \left[\frac{-\cos mt}{m}\right]_{t=0}^{\pi} \\ &= \frac{1-\cos \pi m}{m} = \frac{1-(-1)^m}{m} = \begin{cases} \frac{2}{m} & \text{αν το } m \text{ είναι περιττό,} \\ 0 & \text{αν το } m \text{ είναι άρτιο.} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα οι σειρές είναι

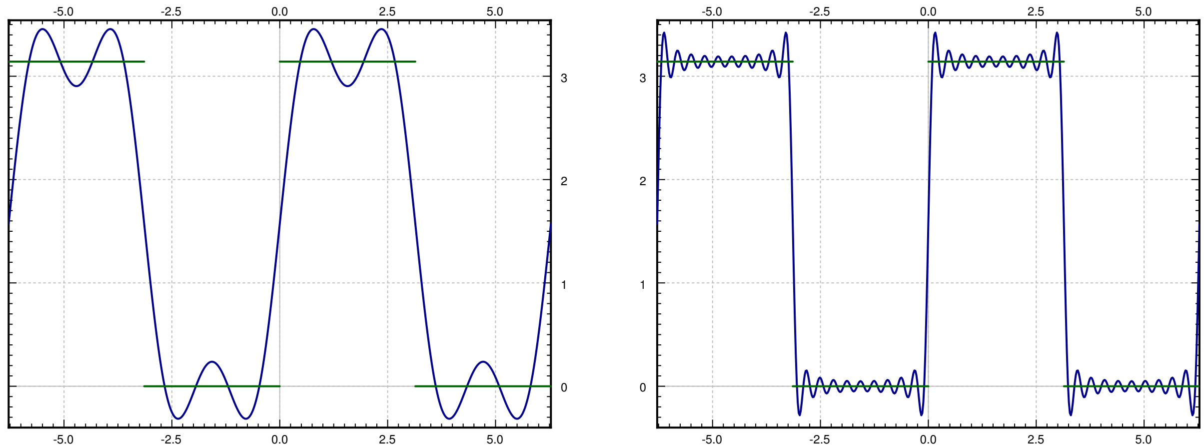
$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nt = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\sin{(2k-1)}\,t.$$

Ας γράψουμε τις 3 πρώτες αρμονικές των σειρών του $f(t)$.

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + 2\sin t + \frac{2}{3}\sin 3t + \cdots$$

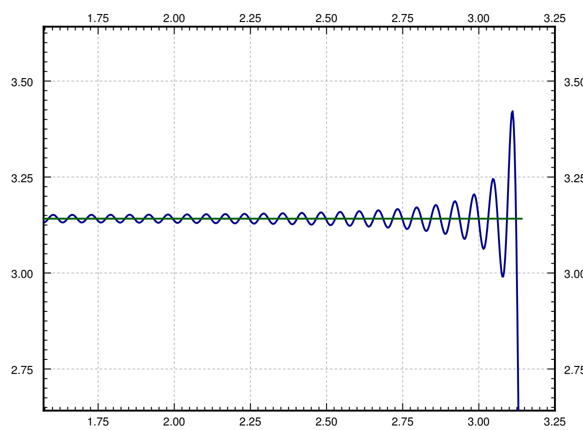
Η γραφική παράσταση των πρώτων τριών αυτών όρων των σειρών, μαζί με αυτή των πρώτων 20 δίδεται στο Σχήμα 4.5 στην επόμενη σελίδα.

Δεν ασχοληθήκαμε, ούτε θα ασχοληθούμε, με την σύγκλιση των σειρών που υπολογίσαμε. Ας ρίξουμε όμως μια ματιά στο κατά πόσο αυτή εξαρτάται από ενδεχόμενες ασυνέχειες. Ας



Σχήμα 4.5: Οι πρώτες 3 (αριστερό γράφημα) και οι πρώτες 20 (δεξιό γράφημα) αρμονικές της συνάρτησης του τετραγωνικού κύματος.

εστιάσουμε στο σημείο ασυνέχειας του τετραγωνικού κύματος και ας κάνουμε την γραφική παράσταση των πρώτων 100 αρμονικών στο Σχήμα 4.6. Παρατηρήστε ότι η σειρά αποτελεί μια καλή προσέγγιση της συνάρτησης μακριά από τα σημεία ασυνέχειας. Το σφάλμα (υπερεκτίμηση) κοντά στο ασυνεχές σημείο $t = \pi$ δεν φαίνεται να ελαττώνεται. Η συμπεριφορά αυτή είναι γνωστή και σαν *φαινόμενο του Gibbs*. Η περιοχή όπου το σφάλμα είναι μεγάλο όμως συρρικνώνεσαι όσο αυξάνουμε τους όρους της σειράς που λαμβάνουμε υπ'οψιν μας.



Σχήμα 4.6: Η δράση του φαινομένου του *Gibbs*.

4.2.4 Ασκήσεις

4.2.3 *Επεκτείνετε περιοδικά και υπολογίστε τις σειρές των συναρτήσεων* $f(t)$ *οι οποίες ορίζονται στο* $[-\pi, \pi]$ *ως εξής*

- $f(t) = \sin 5t + \cos 3t$
- $f(t) = |t|$
- $f(t) = |t|^3$
- $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ 1 & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$
- $f(t) = t^3$
- $f(t) = t^2$

4.3 Επιπρόσθετα θέματα σειρών *Fourier*

4.3.1 $2L$-περιοδικές συναρτήσεις

Έχουμε ασχοληθεί με σειρές *Fourier* για 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Ας ασχοληθούμε τώρα και με συναρτήσεις με διαφορετικές περιόδους. Μια τέτοια επέκταση είναι ιδιαίτερα εύκολη και απαιτεί απλά μια αλλαγή μεταβλητών. Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια $2L$-περιοδική $f(t)$ συνάρτηση (το L ονομάζεται *ημι-περίοδος*). Έστω $s = \frac{\pi}{L} t$, τότε η συνάρτηση

$$g(s) = f\left(\frac{L}{\pi} s\right)$$

είναι 2π-περιοδική. Πρέπει βεβαίως να αλλάξουμε και τα ημίτονα και τα συνημίτονα ως εξής.

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t.}$$

Εάν αλλάξουμε την μεταβλητή t σε s βλέπουμε ότι

$$g(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ns + b_n \sin ns.$$

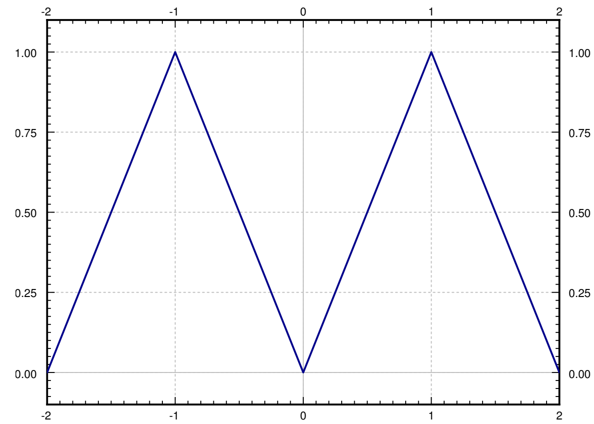
Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα a_n και b_n όπως και προηγουμένως. Γράφουμε λοιπόν τα ολοκληρώματα και αλλάζουμε την μεταβλητή μας επιστρέφοντας έτσι πίσω στο t.

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, \cos ns\, ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, \cos \frac{n\pi}{L} t\, dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\, \sin ns\, ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, \sin \frac{n\pi}{L} t\, dt. \end{aligned}}$$

Οι δύο συναρτήσεις με τις οποίες ασχολούνται, λόγω της απλότητας τους, τα παραδείγματά μας έχουν ημι-περίοδο π και 1. Να τονίσουμε ότι απλά απαιτείται αλλαγή μεταβλητών και τίποτε άλλο. Εάν έχουμε κατανοήσει τις σειρές *Fourier* για 2π-περιοδικές συναρτήσεις δεν θα συναντήσουμε κανένα απολύτως πρόβλημα με την περίπτωση των γενικών $2L$-περιοδικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 4.3.1: Έστω ότι η

$$f(t) = |t| \qquad \text{για } -1 < t < 1,$$



Σχήμα 4.7: Περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(t)$.

έχει επεκταθεί περιοδικά. Η γραφική παράσταση της περιοδικής αυτής επέκτασης δίδεται στο Σχήμα 4.7. Υπολογίστε την σειρά *Fourier* της.

Θέλουμε να πάρουμε $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$. Για $n \geq 1$ έχουμε ότι η $|t| \cos n\pi t$ είναι άρτια και συνεπώς

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(t) \cos n\pi t \, dt \\ &= 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt \\ &= 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{t=0}^{1} - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt \\ &= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \Big[\cos n\pi t \Big]_{t=0}^{1} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο,} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ο a_0 υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |t| \, dt = 1.$$

Τέλος ας υπολογίσουμε τα b_n. Παρατηρούμε ότι η $|t| \sin n\pi t$ είναι περιττή και συνεπώς έχουμε

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

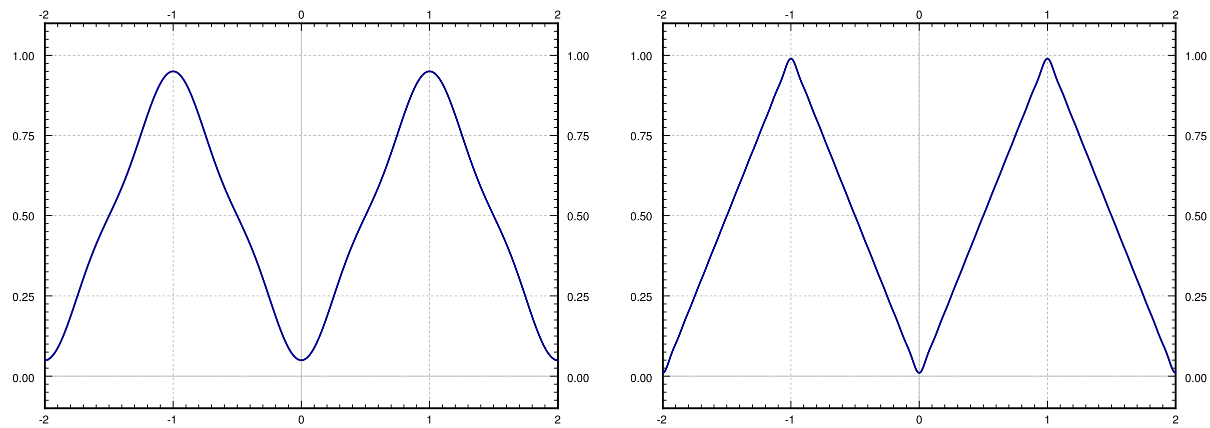
Άρα η σειρά που ψάχνουμε είναι η

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Ας γράψουμε αναλυτικά μερικούς από τους πρώτους όρους της σειράς. Συγκεκριμένα, ας ασχοληθούμε με τις τρεις πρώτες αρμονικές.

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \cdots$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σειράς όπως και αυτής που αποτελείται από τις πρώτης 20 αρμονικές δίνεται στο Σχήμα 4.8. Αξίζει να παρατηρήσουμε το πόσο εύκολα προσεγγίζει η σειρά την πραγματική συνάρτηση και την απουσία του φαινομένου του *Gibbs* μια και δεν υπάρχουν σημεία ασυνέχειας.



Σχήμα 4.8: Σειρές *Fourier* της $f(t)$ με τις 3 πρώτες αρμονικές (αριστερά) και τις 20 πρώτες αρμονικές (δεξιά).

4.3.2 Ασκήσεις

4.3.1 *Έστω ότι η*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -1 < t < 0, \\ t & \text{αν} \quad 0 \le t < 1, \end{cases}$$

έχει επεκταθεί περιοδικά. α) Υπολογίστε την σειρά Fourier της $f(t)$. β) Γράψτε την σειρά αναλυτικά μέχρι και την 3^η της αρμονική.

4.3.2 *Έστω ότι η*

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{αν} \quad -1 < t < 0, \\ t^2 & \text{αν} \quad 0 \le t < 1, \end{cases}$$

έχει επεκταθεί περιοδικά. α) Υπολογίστε την σειρά Fourier της $f(t)$. β) Γράψτε την σειρά αναλυτικά μέχρι και την 3^η της αρμονική.

4.3.3 *Έστω ότι η*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-t}{10} & \text{αν } -10 < t < 0, \\ \frac{t}{10} & \text{αν } 0 \leq t < 10, \end{cases}$$

έχει επεκταθεί περιοδικά. α) Υπολογίστε την σειρά Fourier της $f(t)$. β) Γράψτε την σειρά αναλυτικά μέχρι και την 3^{η} της αρμονική.

4.4 Σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων

4.4.1 Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Θα παρατηρήσατε ίσως ότι οι περιττές συναρτήσεις δεν έχουν όρους συνημιτόνου στα αναπτύγματα τους σε σειρές *Fourier* οι άρτιες δεν έχουν όρους ημιτόνων. Κάτι τέτοιο δεν είναι τυχαίο όπως θα δούμε παρακάτω.

Θυμηθείτε ότι η $f(t)$ είναι μια *περιττή* αν $f(-t) = -f(t)$. Μια συνάρτηση $f(t)$ είναι *άρτια* αν $f(-t) = f(t)$. Για παράδειγμα, η $\cos nt$ είναι άρτια και η $\sin nt$ είναι περιττή. Παρόμοια η συνάρτηση t^k είναι άρτια για άρτιες τιμές του k και περιττή για περιττές τιμές του k.

4.4.1 *Θεωρήστε δύο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ και ορίστε τον γινόμενό τους $h(t) = f(t)g(t)$. a) Εάν και οι δύο είναι περιττές, είναι και η $h(t)$ περιττή; β) Εάν είναι μια περιττή και η άλλη άρτια, είναι η $h(t)$ περιττή ή άρτια; ς) Εάν και οι δύο είναι άρτιες, είναι και η $h(t)$ άρτια;*

Αν η $f(t)$ είναι και η $g(t)$ είναι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το εάν η $f(t) + g(t)$ είναι και αυτή άρτια. Μάλιστα, το ανάπτυγμα μιας σειράς *Fourier* μιας οποιασδήποτε συνάρτησης αποτελείτε από το άθροισμα μιας περιττής συνάρτησης (οι όροι ημιτόνων) και μιας άρτιας συνάρτησης (οι όροι συνημιτόνων).

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε μόνον με συναρτήσεις που είναι είτε περιττές ή άρτιες. Προηγουμένως ορίσαμε $2L$-περιοδικές επεκτάσεις μιας συνάρτησης ορισμένης σε ένα διάστημα της μορφής$[-L, L]$. Αρκετές φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης μόνο στο διάστημα $[0, L]$. Εάν η εν λόγω συνάρτηση είναι περιττή (ή άρτια) τότε δεν θα υπάρχουν οι όροι των ημιτόνων (ή αντίστοιχα των συνημιτόνων).

Έστω λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, L]$. Μπορούμε να ορίσουμε τις εξής συναρτήσεις στο διάστημα $(-L, L]$

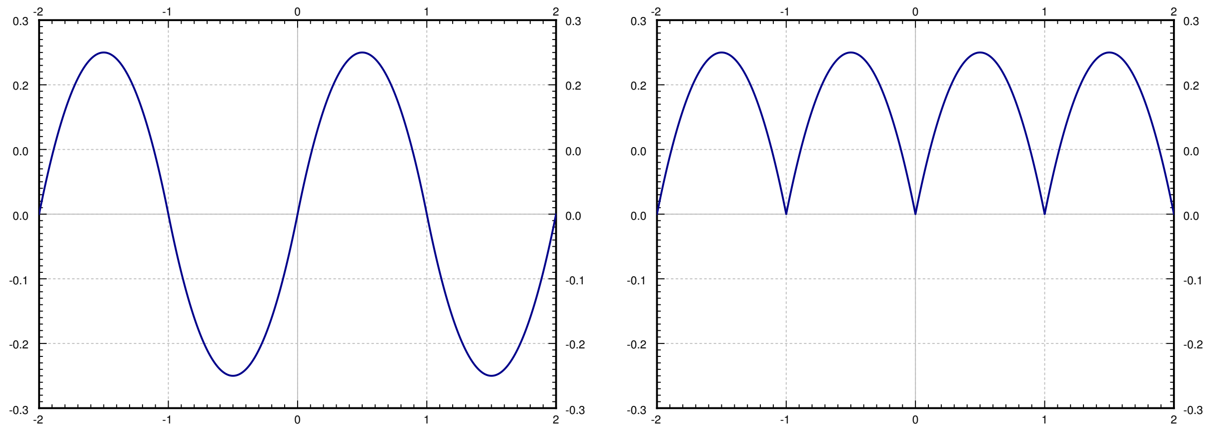
$$F_{\text{περιττή}}(t) \overset{\text{ορι}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

$$F_{\text{άρτια}}(t) \overset{\text{ορι}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$

και επεκτείνουμε τις $F_{\text{περιττή}}(t)$ και $F_{\text{άρτια}}(t)$ έτσι ώστε να είναι $2L$-περιοδική. Τότε η $F_{\text{περιττή}}(t)$ ονομάζεται *περιττή περιοδική επέκταση* της $f(t)$, και η $F_{\text{άρτια}}(t)$ ονομάζεται *άρτια περιοδική επέκταση* της f.

4.4.2 *Επιβεβαιώστε ότι η $F_{\text{περιττή}}(t)$ είναι περιττή και η $F_{\text{άρτια}}(t)$ άρτια.*

Παράδειγμα 4.4.1: Έστω η συνάρτηση $f(t) = t(1 - t)$ ορισμένη στο διάστημα $[0, 1]$. Το σχήμα 4.9 στην επόμενη σελίδα περιλαμβάνει τις γραφικές παραστάσεις των περιττών και άρτιων επεκτάσεων της $f(t)$.



Σχήμα 4.9: Περιττή και άρτια 2-περιοδική επέκταση της $f(t) = t(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

4.4.2 Σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων

Έστω ότι $f(t)$ είναι μια περιττή $2L$-περιοδική συνάρτηση. Αν υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της $f(t)$ σε σειρά Fourier , υπολογίζοντας όλους τους συντελεστές a_n (συμπεριλαμβανομένου και του a_0) έχουμε

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi}{L}\, t \; dt = 0.$$

Δεν υπάρχουν βεβαίως όροι συνημιτόνων. Το ολοκλήρωμα είναι μηδέν επειδή η $f(t) \cos n\pi L\, t$ είναι περιττή συνάρτηση (γινόμενο περιττής με άρτια συνάρτηση είναι περιττή συνάρτηση) και το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι πάντοτε μηδέν. Επιπρόσθετα, το ολοκλήρωμα μια άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα $[-L, L]$ είναι το διπλάσιο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο διάστημα $[0, L]$. Η συνάρτηση $f(t) \sin \frac{n\pi}{L}\, t$ είναι περιττή μια και είναι γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi}{L}\, t \; dt = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi}{L}\, t \; dt.$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την σειρά Fourier της $f(t)$ ως εξής

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}\, t.$$

Παρόμοια, αν η $f(t)$ είναι περιττή $2L$-περιοδική συνάρτηση για ακριβώς τους ίδιους με τους παραπάνω λόγους βρίσκουμε ότι $b_n = 0$ και ότι

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi}{L}\, t \; dt.$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και για $n = 0$ οπότε και έχουμε

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\ dt.$$

Άρα το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier είναι

$$\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}\,t.$$

Θεώρημα 4.4.1. *Εάν $f(t)$ είναι μια τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$ συνάρτηση τότε η περιττή της επέκταση έχει το εξής ανάπτυγμα σε σειρά Fourier .*

$$\boxed{F_{\text{περιττή}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}\,t,}$$

όπου

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\ \sin\frac{n\pi}{L}\,t\ dt.}$$

Η άρτια επέκταση της $f(t)$ έχει το εξής ανάπτυγμα σε σειρά Fourier

$$\boxed{F_{\text{άρτια}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}\,t,}$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\ \cos\frac{n\pi}{L}\,t\ dt.}$$

Παράδειγμα 4.4.2: Υπολογίστε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της άρτιας περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης $f(t) = t^2$ για $0 \le t \le \pi$.

Έχουμε

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,$$

όπου

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\ dt = \frac{2\pi^2}{3},$$

και

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\ dt = \frac{2}{\pi}\left[t^2\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\ dt \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\Big[t\cos nt\Big]_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\ dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Ας γράψουμε αναλυτικά μερικούς όρους της σειράς

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\cos t + \cos 2t - \frac{4}{9}\cos 3t + \cdots$$

4.4.3 Εφαρμογές

Όπως ήδη αναφέραμε οι σειρές Fourier είναι συνδεδεμένες με τα προβλήματα συνοριακών τιμών που μελετήσαμε προηγουμένως. Ας δούμε το πως συνδέονται όμως με περισσότερη λίγη λεπτομέρεια.

Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών για $0 < t < L$,

$$x''(t) + \lambda\, x(t) = f(t),$$

και τις εξής *συνοριακές συνθήκες Dirichlet* $x(0) = 0$, $x(L) = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Fredholm* (Θεώρημα 4.1.2 στη σελίδα 144) σημειώνουμε ότι εάν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος, τότε το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Σημειώστε επίσης ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στο παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών είναι οι συναρτήσεις $\sin\frac{n\pi}{L}t$. Άρα, για να υπολογίσουμε την λύση, πρώτα αναπτύσσουμε την $f(t)$ σε σειρά Fourier . Γράφουμε και το x σαν ανάπτυγμα σειρών ημιτόνων. Βεβαίως το εν λόγω ανάπτυγμα συμπεριλαμβάνει άγνωστους συντελεστές αυτούς Fourier τους οποίους φυσικά εάν υπολογίσουμε και αντικαταστήσουμε στο ανάπτυγμα τότε θα έχουμε το x, δηλαδή θα έχουμε την λύση. Για να καταφέρουμε το παραπάνω ας αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα της x στην διαφορική εξίσωση και θα λύσουμε.

Στην περίπτωση των *συνοριακών συνθηκών Neumann* $x'(0) = 0$, $x'(L) = 0$ ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας όμως τώρα σειρές συνημιτόνου. Σε κάθε περίπτωση ο πιο κατάλληλος τρόπος για να καταλάβουμε τις μεθόδους αυτές είναι εφαρμόζοντας τες σε παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.4.3: Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για $0 < t < 1$,

$$x''(t) + 2x(t) = f(t),$$

όπου $f(t) = t$ για $0 < t < 1$. Θέλουμε να βρούμε μια λύση x που να ικανοποιεί τις εξής συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Ας αναπτύξουμε την $f(t)$ σε σειρά ημιτόνων

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t,$$

όπου

$$c_n = 2\int_0^1 t\sin n\pi t\; dt = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Ας γράψουμε και την $x(t)$ ως εξής

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2\pi^2 \sin n\pi t + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t \\ &= f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi t. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$b_n(2 - n^2\pi^2) = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

ή

$$b_n = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi(2 - n^2\pi^2)}.$$

Έχουμε λοιπόν υπολογίσει την λύση σαν ανάπτυγμα σειράς Fourier

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi\,(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα 4.4.4: Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε συνθήκες *Neumann* με τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο. Ας θεωρήσουμε την ίδια εξίσωση για $0 < t < 1$,

$$x''(t) + 2x(t) = f(t),$$

όπου $f(t) = t$ για $0 < t < 1$. Αυτή την φορά θα έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες *Neumann* $x'(0) = 0$, $x'(1) = 0$. Ας γράψουμε την $f(t)$ σαν ανάπτυγμα σειράς συνημιτόνων

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

όπου

$$c_0 = 2\int_0^1 t\; dt = 1,$$

και

$$c_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t\; dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & \text{για } n \text{ περιττό}, \\ 0 & \text{για } n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Ας γράψουμε και την $x(t)$ σαν ανάπτυγμα σειράς συνημιτόνων

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[-a_n n^2\pi^2 \cos n\pi t\Big] + a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos n\pi t\Big] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2 - n^2\pi^2)\cos n\pi t \\ &= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2}\cos n\pi t. \end{aligned}$$

Άρα, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ για n άρτιο και για n περιττό $(n \geq 1)$

$$a_n(2 - n^2\pi^2) = \frac{-4}{\pi^2 n^2}$$

ή

$$a_n = \frac{-4}{n^2\pi^2(2 - n^2\pi^2)}.$$

Έχουμε λοιπόν υπολογίσει την λύση σαν ανάπτυγμα σειρών Fourier ως εξής

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi^2(2 - n^2\pi^2)} \cos n\pi t.$$

4.4.4 Ασκήσεις

4.4.3 *Έστω η συνάρτηση $f(t) = (t-1)^2$ ορισμένη για $0 \leq t \leq 1$. α) Δώστε την γραφική παράσταση της άρτιας περιοδικής επέκτασης της f. β) Δώστε την γραφική παράσταση της άρτιας περιοδικής επέκτασης της f.*

4.4.4 *Υπολογίστε τα αναπτύγματα σειρών Fourier για την άρτια και για την περιττή περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(t) = (t-1)^2$ για $0 \leq t \leq 1$.*

4.4.5 *Υπολογίστε τα αναπτύγματα σειρών Fourier για την άρτια και για την περιττή περιοδική επέκταση της συνάρτησης* $f(t) = t$ *για* $0 \leq t \leq \pi$.

4.4.6 *Υπολογίστε το ανάπτυγμα σειρών Fourier για την άρτια περιοδική επέκταση της συνάρτησης* $f(t) = \sin t$ *για* $0 \leq t \leq \pi$.

4.4.7 *Υπολογίστε την λύση της εξίσωσης*

$$x''(t) + 4x(t) = f(t),$$

όπου $f(t) = 1$ *για* $0 < t < 1$ *η οποία ικανοποιεί α) τις εξής συνοριακές συνθήκες Dirichlet* $x(0) = 0, x(1) = 0$. *β) τις εξής συνοριακές συνθήκες Neumann* $x'(0) = 0, x'(1) = 0$.

4.4.8 *Υπολογίστε την λύση της εξίσωσης*

$$x''(t) + 9x(t) = f(t),$$

όπου $f(t) = \sin 2\pi t$ *για* $0 < t < 1$. *α) τις εξής συνοριακές συνθήκες Dirichlet* $x(0) = 0, x(1) = 0$. *β) τις εξής συνοριακές συνθήκες Neumann* $x'(0) = 0, x'(1) = 0$.

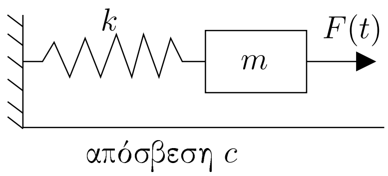
4.4.9 *Έστω ότι*

$$x''(t) + 3x(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$

όπου$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t$. *Δώστε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της λύσης* $x(t)$, *όπου οι συντελεστές να δίνονται συναρτήσει των όρων* b_n.

4.5 Εφαρμογές των σειρών Fourier

4.5.1 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις



Ας επιστρέψουμε στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Έχουμε ένα σύστημα ελατηρίου μάζας με σταθερά ελατηρίου k, μάζα m και συντελεστή υστέρησης c. Εφαρμόζουμε στην μάζα μια εξωτερική δύναμη $F(t)$ η οποία υποθέτουμε ότι είναι $2L$-περιοδική για κάποιο $L > 0$. Το πρόβλημα αυτό το έχουμε ξανασυναντήσει στο κεφάλαιο 2 όπου η $F(t)$ ήταν μια σχετικά απλή συνάρτηση. Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα αυτό είναι η εξής

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t). \tag{4.8}$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση αποτελείται από την λύση x_c της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $mx'' + cx' + kx = 0$, και μια συγκεκριμένη λύση της (4.8) την οποία συμβολίζουμε με x_p. Μια και η συμπληρωματική λύση x_c θα αποσυντεθεί με το πέρασμα του χρόνου, ως επί το πλείστον ενδιαφερόμαστε για τον όρο x_p ο οποίος και δεν φθίνει. Την x_p αυτή την ονομάζουμε *σταθερή περιοδική λύση* όπως και προηγουμένως. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα η $F(t)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση.

Για την ευκολία μας, ας υποθέσουμε ότι $c = 0$. Η περίπτωση $c > 0$ μπορεί να αντιμετωπισθεί με παρόμοιο τρόπο. Η εξίσωση

$$mx'' + kx = 0$$

έχει την εξής γενική λύση

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Συνεπώς κάθε λύση της $mx''(t)+kx(t) = F(t)$ θα είναι της μορφής $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$, όπου x_{sp} είναι η συγκεκριμένη σταθερή περιοδική λύση. Η σταθερή περιοδική λύση θα έχει πάντα την ίδια περίοδο με την $F(t)$.

Στο πνεύμα της προηγούμενης παραγράφου έχουμε

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}\,t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}\,t,$$

και

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}\,t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}\,t,$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω στην διαφορική εξίσωση και λύνουμε για να υπολογίσουμε τους όρους a_n και b_n συναρτήσει των c_n και d_n. Η παραπάνω μεθοδολογία θα γίνει περισσότερο κατανοητή με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.5.1: Έστω ότι $k = 2$, και $m = 1$. Υποθέτουμε ξανά ότι μετράμε με (μέτρα-κιλά-δευτερόλεπτα). Τοποθετούμε μια μικρο-τουρμπίνα πάνω στο σωματίδιο η οποία πυροδοτείται με δύναμη 1 Newton για 1 δευτερόλεπτο και μετά παραμένει αδρανής για 1 δευτερόλεπτο κ.ο.κ.. Θέλουμε να υπολογίσουμε την σταθερή περιοδική λύση.

Η εξίσωσή μας είναι

$$x'' + 2x = F(t),$$

όπου $F(t)$ είναι η συνάρτηση

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

την οποία επεκτείνουμε περιοδικά.

Έχουμε

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi\, t + d_n \sin n\pi\, t.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $c_n = 0$ για $n \geq 1$:

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t\ dt = \int_{0}^{1} \cos n\pi t\ dt = 0.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$c_0 = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt = \int_{0}^{1}\ dt = 1.$$

Επιπρόσθετα

$$\begin{aligned} d_n &= \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t\ dt \\ &= \int_{0}^{1} \sin n\pi t\ dt \\ &= \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^{1} \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{αν } n \text{ περιττό}, \\ 0 & \text{ιφ } n \text{ εεν}. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t.$$

Θα δοκιμάσουμε

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t.$$

Παρατηρούμε ότι μόλις αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση $x'' + 2x = F(t)$ είναι φανερό ότι $a_n = 0$ για $n \geq 1$ μια και δεν υπάρχουν αντίστοιχοι όροι στο ανάπτυγμα σειρών της $F(t)$. Παρόμοια $b_n = 0$ για περιττό n. Συνεπώς δοκιμάζουμε την

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} x'' + 2x &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t\right] + a_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t\right] \\ &= a_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n (2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t \\ &= F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t. \end{aligned}$$

Άρα $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$ για άρτιο n ενώ για περιττό n έχουμε

$$b_n = \frac{2}{\pi n (2 - n^2 \pi^2)}.$$

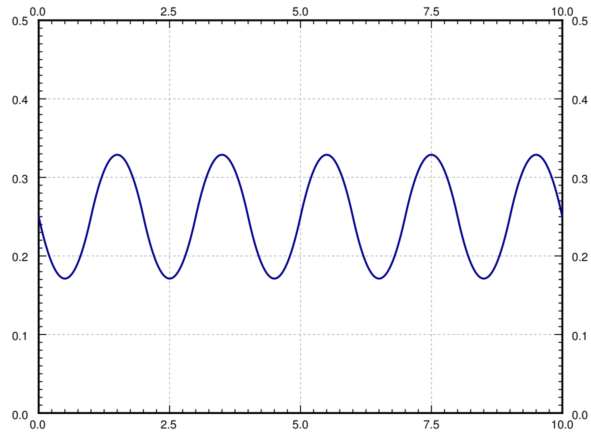
Η σταθερή περιοδική λύση λοιπόν έχει το εξής ανάπτυγμα Fourier

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περριτό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n (2 - n^2 \pi^2)} \sin n\pi t.$$

Είμαστε σίγουροι ότι η παραπάνω είναι η σταθερή περιοδική λύση μια και δεν περιέχει όρους της συμπληρωματικής λύσης και είναι περιοδική με την ίδια περίοδο με την $F(t)$. Δείτε στο Σχήμα 4.10 στην επόμενη σελίδα την γραφική παράσταση της λύσης αυτής.

4.5.2 Ασκήσεις

4.5.1 *Έστω $F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi t$. Υπολογίστε την σταθερή περιοδική λύση της $x'' + 2x = F(t)$. Εκφράστε την λύση σας σαν σειρά Fourier .*



Σχήμα 4.10: Η γραφική παράσταση της σταθερής περιοδικής λύσης x_{sp} του Παραδείγματος 4.5.1.

4.5.2 *Έστω* $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin n\pi t$. *Υπολογίστε την σταθερή περιοδική λύση της* $x'' + x' + x = F(t)$. *Εκφράστε την λύση σας σαν σειρά Fourier .*

4.5.3 *Έστω* $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi t$. *Υπολογίστε την σταθερή περιοδική λύση της* $x'' + 4x = F(t)$. *Εκφράστε την λύση σας σαν σειρά Fourier .*

4.5.4 *Έστω η* $F(t) = t$ *για* $-1 < t < 1$ *την οποία επεκτείνουμε περιοδικά. Υπολογίστε την σταθερή περιοδική λύση της* $x'' + x = F(t)$. *Εκφράστε την λύση σας σαν σειρά Fourier .*

4.5.5 *Έστω η* $F(t) = t$ *για* $-1 < t < 1$ *την οποία επεκτείνουμε περιοδικά. Υπολογίστε την σταθερή περιοδική λύση της* $x'' + \pi^2 x = F(t)$. *Εκφράστε την λύση σας σαν σειρά Fourier .*

Κεφάλαιο 5

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

5.1 ΜΔΕ, χωρισμός μεταβλητών, και η εξίσωση θερμότητας

Μια εξίσωση λέγεται *μερική διαφορική εξίσωση* ή *ΜΔΕ* εάν περιλαμβάνει μερικές παραγώγους ως προς *περισσότερες από μια* ανεξάρτητες μεταβλητές*. Η επίλυση ΜΔΕ αποτελεί ίσως την πιο σημαντική και βασική εφαρμογή των σειρών Fourier .

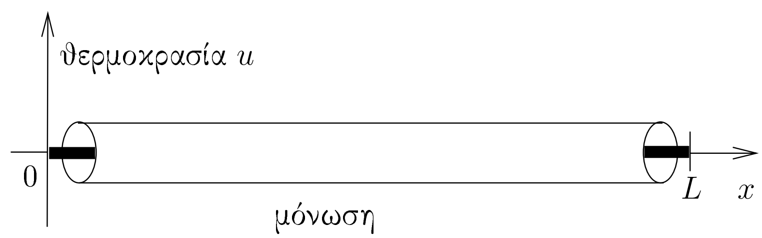
Μια ΜΔΕ λέγεται *γραμμική* αν η ανεξάρτητη μεταβλητή και οι παράγωγοί της δεν εμφανίζονται σε κάποια δύναμη (μεγαλύτερη του 1) ούτε σαν όρισμα κάποιας συνάρτησης. Θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικές ΜΔΕ. Μαζί με μια ΜΔΕ, συνήθως ορίζουμε και κάποιες *συνοριακές συνθήκες*, με τις οποίες καθορίζουμε την τιμή της λύσης ή/και της παραγώγου της στο σύνορο ενός χωρίου. Επιπρόσθετα, ή εναλλακτικά, μπορεί να ορίσουμε κάποιες *αρχικές συνθήκες* με τις οποίες καθορίζουμε την τιμή της λύσης ή/και της παραγώγου της σε κάποια χρονική στιγμή την οποία θεωρούμε αρχική. Μερικές φορές οι δύο παραπάνω τύποι συνθηκών συμπλέκονται και τότε λέμε ότι έχουμε γενικά *πλευρικές συνθήκες*.

Θα μελετήσουμε τρεις τύπους μερικών διαφορικών εξισώσεων, η κάθε μια από τις οποίες είναι αντιπροσωπευτική μιας γενικότερης κλάσης διαφορικών εξισώσεων. Πρώτα θα μελετήσουμε την *εξίσωση της θερμότητας*, η οποία είναι ένα παράδειγμα *παραβολικής ΜΔΕ*. Κατόπιν θα μελετήσουμε την *εξίσωση του κύματος*, η οποία είναι ένα παράδειγμα *υπερβολικής ΜΔΕ*. Τέλος θα μελετήσουμε την *εξίσωση του Laplace*, η οποία είναι ένα παράδειγμα *ελλειπτικής ΜΔΕ*. Η συμπεριφορά και η πρακτική επίλυσης καθεμιάς από τις παραπάνω εξισώσεις είναι αντιπροσωπευτικές όλης της κλάσης των εξισώσεων στην οποία ανήκουν.

*Είναι, κατά την γνώμη μου πολύ πιο ορθό, αλλά δυστυχώς καθόλου συνηθισμένο οι εξισώσεις αυτές να λέγονται *εξισώσεις με μερικές παραγώγους*

5.1.1 Θερμότητα σε ένα μονωμένο καλώδιο

Ας μελετήσουμε πρώτα την εξίσωση της θερμότητας Έστω ότι έχουμε ένα καλώδιο (ή μια λεπτή μεταλλική ράβδο) η οποία είναι μονωμένη παντού εκτός από τα δύο άκρα της. Έστω ότι με x συμβολίσουμε την θέση πάνω στην ράβδο και ότι με t συμβολίζουμε τον χρόνο. Δείτε το Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Μονωμένο καλώδιο.

Ας συμβολίσουμε τώρα με $u(x,t)$ την θερμοκρασία του καλωδίου στο σημείο x την χρονική στιγμή t. Η εξίσωση που διέπει το σύστημα αυτό ονομάζεται *μονο-διάσταση εξίσωση θερμότητας*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά. Δηλαδή, η μεταβολή της θερμοκρασίας σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο είναι ανάλογη της δεύτερης παραγώγου της θερμοκρασίας της ράβδου.

Γενικά χρησιμοποιούμε ένα πιο βολικό συμβολισμό για τις μερικές παραγώγους. Θα συμβολίζουμε λοιπόν με u_t την $\frac{\partial u}{\partial t}$, και θα συμβολίζουμε με u_{xx} την $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό αυτό έχουμε την εξής μορφή της εξίσωσης

$$u_t = ku_{xx}.$$

Η εξίσωση της θερμότητας θα συμπληρωθεί, όπως και όλες οι διαφορικές εξισώσεις βεβαίως, με συνοριακές συνθήκες. Ας υποθέσουμε ότι το μήκος της ράβδου είναι L και ότι τα άκρα του είτε παραμένουν σε σταθερή θερμοκρασία (ευρισκόμενα π.χ. σε επαφή με κάποιο σώμα η θερμοκρασία του οποίου παραμένει σταθερά) είτε είναι μονωμένα. Αν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία στα άκρα παραμένει σταθερά 0, τότε έχουμε τις εξής συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

Στην περίπτωση που τα άκρα της ράβδου είναι μονωμένα, έχουμε τις εξής συνθήκες

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u_x(L,t) = 0.$$

Με άλλα λόγια, η θερμότητα δεν μπορεί ούτε να εκρέει ούτε να εισρέει από τα άκρα της ράβδου. Σημειώστε ότι η ύπαρξη δεύτερων παραγώγων στην x κατεύθυνση στην εξίσωση συνεπάγεται την αναγκαιότητα για δύο πλευρικές συνθήκες στον άξονα του x. Οι πλευρικές αυτές συνθήκες ονομάζονται *ομογενείς* (δηλαδή, είτε u είτε η παράγωγός της u είναι μηδέν).

Επιπρόσθετα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στην ράβδο.

$$u(x,0) = f(x),$$

όπου $f(x)$ είναι κάποια δοθείσα συνάρτηση. Η αρχική αυτή συνθήκη δεν είναι βέβαια ομογενής πλευρική συνθήκη.

5.1.2 Διαχωρισμός Μεταβλητών

Επειδή η u και οι παράγωγοί της δεν εμφανίζονται υψωμένες σε κάποια δύναμη ούτε σαν ορίσματα άλλων συναρτήσεων, η εξίσωση της θερμότητας είναι γραμμική. Συνεπώς η αρχή της υπέρθεσης μπορεί να εφαρμοσθεί στην εξίσωση της θερμότητας (χωρίς τις πλευρικές συνθήκες). Αν οι u_1 και u_2 είναι λύσεις και οι c_1, c_2 σταθερές, τότε η $u = c_1u_1 + c_2u_2$ είναι επίσης λύση.

5.1.1 *Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η αρχή της υπέρθεσης για την εξίσωση της θερμότητας.*

Ας βάλουμε τώρα και τις πλευρικές συνθήκες στο παιχνίδι της υπέρθεσης. Συγκεκριμένα, εάν u_1 και u_2 είναι κάποιες λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες $u(0,t) = 0$ και $u(L,t) = 0$, και c_1, c_2 είναι σταθερές, τότε η $u = c_1u_1 + c_2u_2$ είναι επίσης λύση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $u(0,t) = 0$ και $u(L,t) = 0$. Παρόμοια μπορούμε να δούμε την υπέρθεση για τις εξής συνοριακές συνθήκες $u_x(0,t) = 0$ και $u_x(L,t) = 0$. Γενικά, η αρχή της υπέρθεσης ισχύει για οποιεσδήποτε ομογενείς πλευρικές συνθήκες.

Η μέθοδος του *διαχωρισμού των μεταβλητών* προσπαθεί να υπολογίσει λύσεις οι οποίες είναι αθροίσματα ή γινόμενα συναρτήσεων μιας μεταβλητής.Για παράδειγμα, για την εξίσωση της θερμότητας, προσπαθούμε να υπολογίσουμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση της θερμότητας λοιπόν

$$u_t = ku_{xx} \qquad \text{με} \quad u(0,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της θερμότητας έχουμε

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

Ας το γράψουμε ως εξής

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Βεβαίως η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε x και κάθε t. Το αριστερό μέρος όμως της εξίσωσης δεν εξαρτάται από το x ενώ το δεξιό μέρος δεν εξαρτάται από το t. Άρα, και οι δύο πλευρές πρέπει να είναι σταθερά. Ας ονομάσουμε την κοινή αυτή σταθερά $-\lambda$ (το αρνητικό πρόσημο είναι, όπως θα δούμε σύντομα, για δικιά μας ευκολία). Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τις εξής δύο εξισώσεις.

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Η με άλλα λόγια

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0.$$

Η συνοριακή συνθήκη $u(0,t) = 0$ μας δίνει ότι $X(0)T(t) = 0$. Με βάση το γεγονός ότι προφανώς αναζητούμε μη-τετριμμένες λύσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $T(t)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Άρα καταλήγουμε ότι $X(0) = 0$. Παρόμοια, η $u(L,t) = 0$ συνεπάγεται ότι $X(L) = 0$. Αναζητούμε μη-τετριμμένες λύσεις X για το πρόβλημα ιδιοτιμών $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(L) = 0$. Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι οι μόνες ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι $\sin \frac{n\pi}{L} x$. Συνεπώς, ας επιλέξουμε τις λύσεις

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Οι συναρτήσεις T_n που αναλογούν πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων, βρίσκουμε ότι η λύση του προβλήματος είναι

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} kt}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι $T_n(0) = 1$. Οι θεμελιώδεις λύσεις μας είναι

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} kt}.$$

Σημειώστε ότι $u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi}{L} x$. Ας αναπτύξουμε την $f(x)$ σε σειρά συνημιτόνων

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

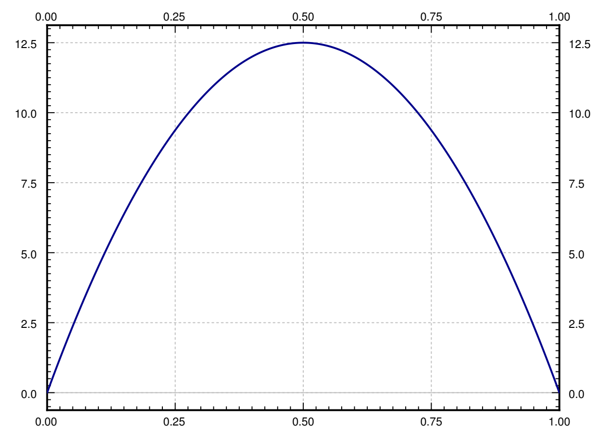
Δηλαδή, υπολογίζουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της περιττής περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης $f(x)$. Η συγκεκριμένη χρήση των σειρών ημιτόνων οφείλεται στο γεγονός ότι αυτά αντιστοιχούν στο πρόβλημα ιδιοτιμών για τα $X(x)$ που είδαμε παραπάνω. Τέλος, χρησιμοποιώντας υπέρθεση μπορούμε να εκφράσουμε την λύση στην εξής μορφή

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi}{L}\, x\right) \, e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.}$$

Γιατί περιμένουμε κάτι τέτοιο να έχει επιτυχία; Πρώτα σημειώστε ότι η εν λόγω σειρά είναι, με βάση την αρχή της υπέρθεσης, λύση της εξίσωσης της θερμότητας. Ικανοποιεί τις συνθήκες $u(0,t) = 0$ και $u(L,t) = 0$, επειδή τα ημίτονα μηδενίζονται για $x = 0$ ή $x = L$. Τελικά, αντικαθιστώντας το $t = 0$, παρατηρούμε ότι $T_n(0) = 1$ και συνεπώς

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}\, x = f(x).$$

Παράδειγμα 5.1.1: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μονωμένο καλώδιο μήκους 1, τέτοιο ώστε τα άκρα του είναι βυθισμένα σε πάγο (θερμοκρασία 0). Έστω $k = 0.003$. Υποθέστε επίσης ότι η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας είναι η εξής $u(x,0) = 50\,x\,(1-x)$. Δείτε το Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στο καλώδιο.

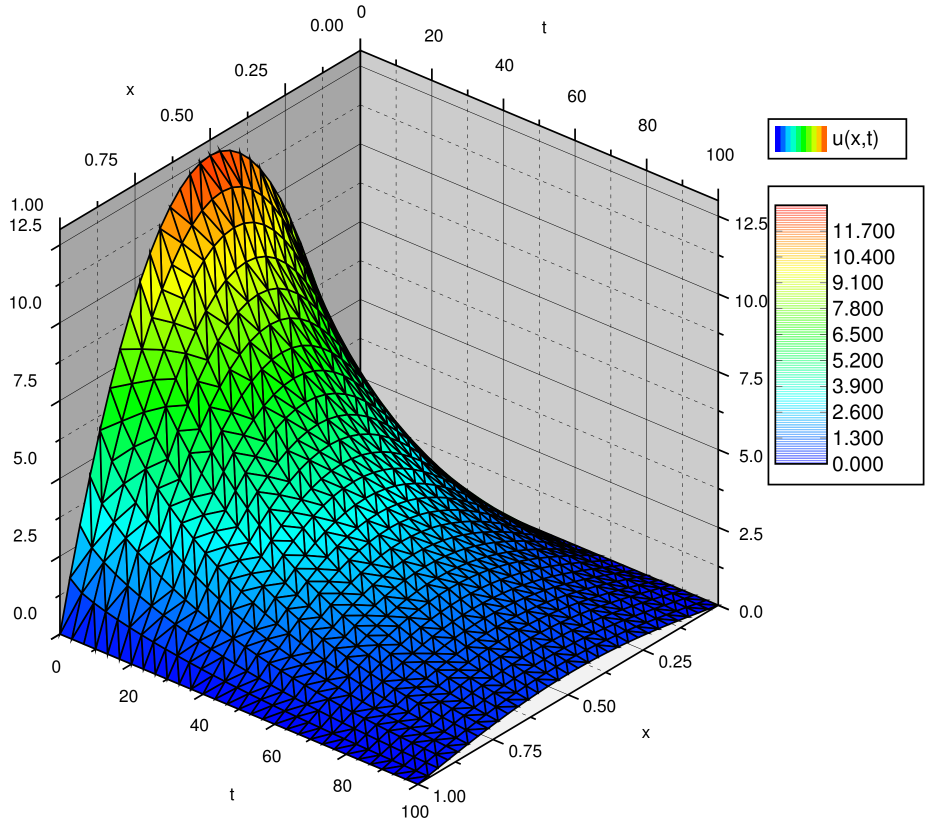
Θέλουμε να βρούμε την συνάρτηση της θερμοκρασίας $u(x,t)$. Ας υποθέσουμε ότι επιπρόσθετα θέλουμε να υπολογίσουμε την χρονική στιγμή (για ποιο t) στην οποία η μέγιστη θερμοκρασία του καλωδίου θα μειωθεί στο μισό της αρχικής μέγιστης (12.5).

Πρέπει να λύσουμε λοιπόν το εξής πρόβλημα ΜΔΕ:

$$\begin{aligned} &u_t = 0.003\, u_{xx}, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = 50\,x\,(1-x) \qquad \text{για } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε το ανάπτυγμα ημιτόνων της συνάρτησης $f(x) = 50\,x\,(1-x)$ για $0 < x < 1$. Δηλαδή, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, όπου

$$b_n = 2\int_0^1 50\,x\,(1-x)\sin n\pi x\;dx = \frac{200}{\pi^3 n^3} - \frac{200\,(-1)^n}{\pi^3 n^3} = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ άρτιο,} \\ \frac{400}{\pi^3 n^3} & \text{για } n \text{ περιττό.} \end{cases}$$



Σχήμα 5.3: Η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας του καλωδίου στην θέση x την χρονική στιγμή t.

Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x,t)$, του Σχήματος 5.3 για $0 \le t \le 100$, από τις εξής σειρές:

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3}\,(\sin n\pi x)\;e^{-n^2\pi^2\,0.003\,t}.$$

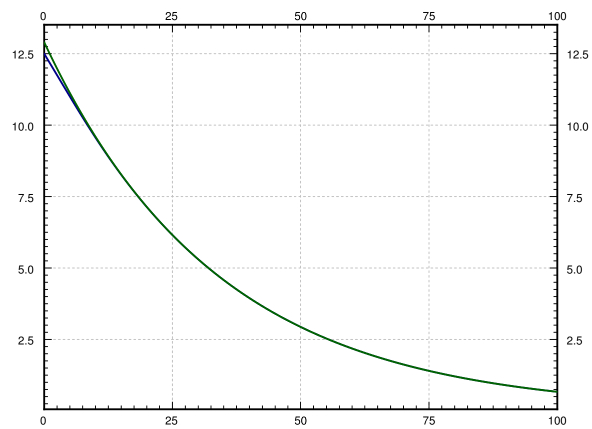
Ας απαντήσουμε τώρα το ερώτημα που αφορά την μέγιστη θερμοκρασία. Δεν είναι πολύ δύσκολο να μαντέψουμε ότι η μέγιστη θερμοκρασία θα είναι πάντα στο σημείο $x = 0.5$, στο μέσον του καλωδίου. Η γραφική παράσταση της $u(x,t)$ επιβεβαιώνει την μαντεψιά μας αυτή.

Αν αντικαταστήσουμε το $x = 0.5$ παίρνουμε

$$u(0.5, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3} \left(\sin n\pi \, 0.5\right) \, e^{-n^2 \pi^2 \, 0.003 \, t}.$$

$$u(0.5, t) \approx \frac{400}{\pi^3} \, e^{-\pi^2 \, 0.003 \, t}.$$

Η προσέγγιση αυτή βελτιώνεται όταν η τιμή του t αυξάνει μια και τότε το μέγεθος των όρων που παραλείπονται ελαττώνεται πολύ ταχύτερα. Ας δούμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(0.5, t)$, δηλαδή την θερμοκρασία στο μέσον του καλωδίου την χρονική στιγμή t, στο Σχήμα 5.4. Το εν λόγω Σχήμα συμπεριλαμβάνει και την γραφική παράσταση της προσέγγισης που μας δίνει μόνον ο πρώτος όρος της σειράς.



Σχήμα 5.4: Η θερμοκρασία στο μέσον του καλωδίου (κάτω καμπύλη) και η προσέγγισή της η οποία προκύπτει από τον πρώτο όρο της σειράς (άνω καμπύλη).

Δύσκολα μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις δύο καμπύλες του Σχήματος για τιμές μεγαλύτερες του $t = 5$. Συνεπώς, εν γένει η σειρά αποτελεί πολύ καλή εκτίμηση της λύσης $u(x, t)$ ακόμα και στην περίπτωση που λάβουμε υπ'οψιν ελάχιστους όρους. Η συμπεριφορά αυτή αποτελεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα επίλυσης της εξίσωσης της θερμότητας. Ειδικότερα, εάν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης για αρκετά μεγάλο t, αρκούν ένας ή δύο όροι της σειράς.

Επιστρέφοντας στο θέμα της μέγιστης θερμοκρασίας, αναζητούμε το πότε η θερμοκρασία στο μέσον θα είναι ${}^{12.5}\!/_{2} = 6.25$. Ας χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της λύσης που ορίζει μόνον ο πρώτος όρος. Άρα αρκεί να λύσουμε

$$6.25 = \frac{400}{\pi^3} \, e^{-\pi^2 \, 0.003 \, t}.$$

Δηλαδή,

$$t = \frac{\ln \frac{6.25\,\pi^3}{400}}{-\pi^2 0.003} \approx 24.5.$$

Άρα η μέγιστη θερμοκρασία θα μειωθεί στο μισό στο $t = 24.5$.

5.1.3 Μονωμένα άκρα

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που μονώνουμε τα δύο άκρα του καλωδίου. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λύσουμε το εξής πρόβλημα

$$u_t = ku_{xx} \qquad \text{όταν} \quad u_x(0,t) = 0 \quad \text{και} \quad u_x(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

Υποθέτουμε ότι η λύση μπορεί να γραφθεί στην εξής μορφή χωριζομένων μεταβλητών $u(x,t) = X(x)T(t)$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με παραπάνω καταλήγουμε στις εξής δύο ΣΔΕ

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Η συνοριακή συνθήκη $u_x(0,t) = 0$ συνεπάγεται ότι $X'(0)T(t) = 0$. Άρα $X'(0) = 0$. Παρόμοια η $u_x(L,t) = 0$ συνεπάγεται ότι $X'(L) = 0$. Αναζητούμε μη-τετριμμένες λύσεις X του εξής προβλήματος ιδιοτιμών $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = 0$, $X'(L) = 0$. Όπως ήδη έχουμε υπολογίσει οι μόνες ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\cos \frac{n\pi}{L} x$ (συμπεριλαμβάνουμε και την σταθερή ιδιοσυνάρτηση). Άρα έχουμε τις εξής λύσεις

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad \text{και} \qquad X_0(x) = 1.$$

Τα αντίστοιχα T_n πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0.$$

Για $n \geq 1$, όπως ακριβώς και παραπάνω, έχουμε

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Για $n = 0$, έχουμε $T_0'(t) = 0$ και συνεπώς $T_0(t) = 1$. Άρα έχουμε τις εξής λύση

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\cos \frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt},$$

και

$$u_0(x,t) = 1.$$

Σημειώστε ότι $u_n(x,0) = \cos \frac{n\pi}{L} x$. Ας αναπτύξουμε την συνάρτηση f σε σειρά συνημιτόνων

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Έχουμε δηλαδή υπολογίσει το ανάπτυγμα της άρτιας περιοδικής επέκτασης της $f(x)$.

Χρησιμοποιούμε την αρχή της υπέρθεσης για να καταλήξουμε στην εξής λύση

$$\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} kt}.}$$

Παράδειγμα 5.1.2: Ας λύσουμε τώρα το παρακάτω πρόβλημα ΜΔΕ, το οποίο βεβαίως αντιστοιχεί στο ίδιο φυσικό πρόβλημα με τα παραπάνω παραδείγματα με την μόνη διαφορά το γεγονός ότι τα άκρα είναι μονωμένα

$$\begin{aligned}
&u_t = 0.003\, u_{xx},\\
&u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = 50\, x\, (1-x) \qquad \text{για } 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $u(x,0)$. Για $0 < x < 1$ έχουμε

$$50\, x\, (1-x) = \frac{25}{3} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ άρτιο}}}^{\infty} \left(\frac{-200}{\pi^2 n^2}\right) \cos n\pi x.$$

Άρα η λύση του παραπάνω προβλήματος ΜΔΕ, η γραφική παράσταση του οποίου δίδεται στο Σχήμα 5.5 στην επόμενη σελίδα, είναι η

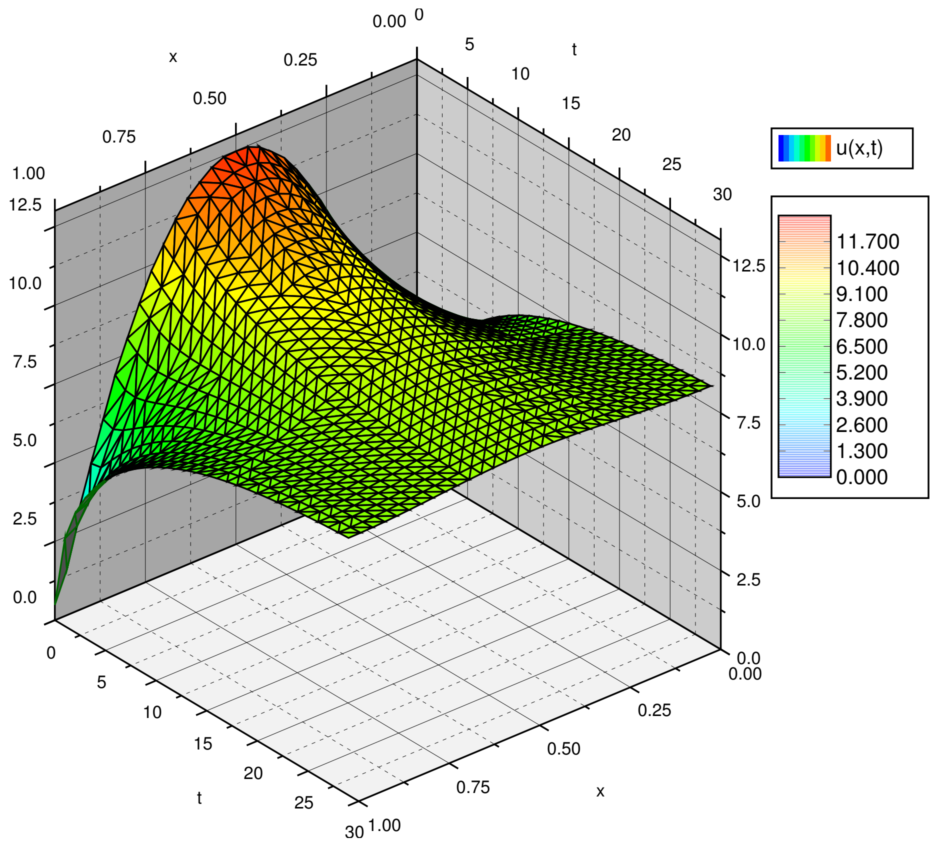
$$u(x,t) = \frac{25}{3} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ εεν}}}^{\infty} \left(\frac{-200}{\pi^2 n^2}\right) (\cos n\pi x)\; e^{-n^2\pi^2\, 0.003\, t}.$$

5.1.4 Ασκήσεις

5.1.2 *Θεωρήστε ένα καλώδιο μήκους 2, με $k = 0.001$ και την εξής αρχική κατανομή θερμοκρασίας $u(x,0) = 50x$. Υποθέστε ότι και τα δύο άκρα του παραμένουν βυθισμένα σε πάγο (θερμοκρασία 0). Υπολογίστε την θερμοκρασία του καλωδίου $u(x,0)$.*

5.1.3 *Υπολογίστε την λύση του παρακάτω προβλήματος*

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx},\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0,\\
&u(x,0) = 100 \qquad \textit{για } 0 < x < 1.
\end{aligned}$$



Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ενός μονωμένου καλωδίου στην θέση x την χρονική στιγμή t.

5.1.4 *Υπολογίστε την λύση του παρακάτω προβλήματος*

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx},\\
&u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\\
&u(x,0) = 3\cos x + \cos 3x \qquad \text{για } 0 < x < \pi.
\end{aligned}
$$

5.1.5 *Υπολογίστε την λύση του παρακάτω προβλήματος*

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx},\\
&u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\\
&u(x,0) = \cos x \qquad \text{για } 0 < x < \pi.
\end{aligned}
$$

5.1.6 *Υπολογίστε την λύση του παρακάτω προβλήματος*

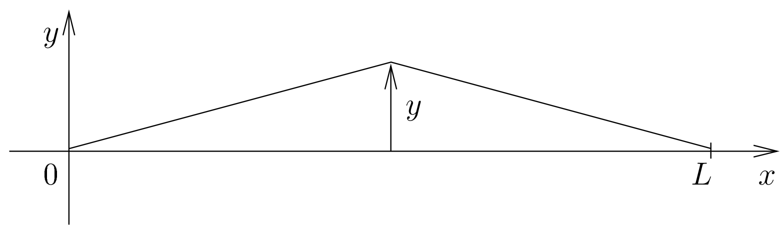
$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 100, \\
&u(x,0) = \sin \pi x \qquad \text{για } 0 < x < 1.
\end{aligned}
$$

5.1.7 *Υπολογίστε την λύση* θερμοκρασίας σταθεράς κατάστασης *σαν συνάρτηση του* x *μόνον, θέτοντας* $t \to \infty$ *στις λύσεις των ασκήσεων 5.1.5 και 5.1.6. Επιβεβαιώστε ότι ικανοποιεί την* $u_{xx} = 0$.

5.1.8 *Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών για να υπολογίσετε μια μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης* $u_{xx} + u_{yy} = 0$, *όταν* $u(x,0) = 0$ *και* $u(0,y) = 0$.

5.2 Μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος

Θεωρήστε μια χορδή (π.χ. κιθάρας) μήκους L η οποία υποθέστε ότι ταλαντώνεται μόνον σε μια κατεύθυνση. Υποθέτουμε ότι με x συμβολίζουμε την θέση πάνω στην χορδή, με t συμβολίζουμε τον χρόνο και με y την μετατόπιση από την θέση ισορροπίας του σημείου x της χορδής την χρονική στιγμή t. Δείτε το Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: Ταλαντωμένη χορδή.

Η εξίσωση που διέπει την παραπάνω κατάσταση ονομάζεται *μονο-διάστατη εξίσωση του κύματος* και έχει την εξής μορφή:

$$\boxed{y_{tt} = a^2 y_{xx},}$$

για κάποιο $a > 0$. Υποθέτουμε βεβαίως ότι τα δύο άκρα είναι πακτωμένα και συνεπώς έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$y(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad y(L,t) = 0.$$

Σημειώστε ότι θα έχουμε πάντα δύο συνθήκες που αφορούν τον άξονα των x όπως γεγονός το οποίο συνάδει με την ύπαρξη των δύο παραγώγων στην x κατεύθυνση.

Επειδή και στην t κατεύθυνση έχουμε δύο παραγώγους χρειαζόμαστε και εδώ δύο επιπλέον συνθήκες. Θα χρειαστεί λοιπόν να γνωρίζουμε την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα της χορδής.

$$y(x,0) = f(x) \qquad \text{και} \qquad y_t(x,0) = g(x),$$

όπου οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις.

Μια και η εξίσωση είναι και πάλι γραμμική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπέρθεση όπως ακριβώς κάναμε με την εξίσωση της θερμότητας. Με τον ίδιο τρόπο θα εφαρμόσουμε και την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών για να βρούμε τις λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων οι οποίες και θα αποτελέσουν τα δομικά υλικά για να συνθέσουμε την λύση του προβλήματος μερικών παραγώγων. Όλα αυτά με την εξής μόνον μια μικρή παραλλαγή. Είναι προτιμότερο να λύσουμε τα εξής δύο επιμέρους προβλήματα ΜΔΕ και μετά να συνθέσουμε την συνολική λύση του αρχικού προβλήματος ΜΔΕ.

Τα δύο εν λόγω προβλήματα είναι

$$\begin{aligned}
&w_{tt} = a^2 w_{xx}, \\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \\
&w(x,0) = 0 && \text{για } 0 < x < L, \\
&w_t(x,0) = g(x) && \text{για } 0 < x < L.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

και

$$\begin{aligned}
&z_{tt} = a^2 z_{xx}, \\
&z(0,t) = z(L,t) = 0, \\
&z(x,0) = f(x) && \text{για } 0 < x < L, \\
&z_t(x,0) = 0 && \text{για } 0 < x < L.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Από την αρχή της υπέρθεσης συνεπάγεται ότι η $y = w + z$ είναι λύση της εξίσωσης του κύματος και επιπρόσθετα ικανοποιεί τις συνθήκες $y(x,0) = w(x,0) + z(x,0) = f(x)$ και $y_t(x,0) = w_t(x,0) + z_t(x,0) = g(x)$. Συνεπώς, η y είναι μια λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned}
&y_{tt} = a^2 y_{xx}, \\
&y(0,t) = y(L,t) = 0, \\
&y(x,0) = f(x) && \text{για } 0 < x < L, \\
&y_t(x,0) = g(x) && \text{για } 0 < x < L.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Η περιπλοκή αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η υπέρθεση ισχύει μόνον για ομογενείς συνθήκες της μορφής $y(0,t) = y(L,t) = 0$, $y(x,0) = 0$, ή $y_t(x,0) = 0$. Συνεπώς, θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα του διαχωρισμού των μεταβλητών για να υπολογίσουμε τις λύσεις όλων των εμπλεκομένων προβλημάτων με ομογενείς συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε σαν δομικές μονάδες για να συνθέσουμε λύσεις που ικανοποιούν τις υπόλοιπες μη-ομογενείς συνθήκες.

Ας αρχίσουμε με την (5.1). Όπως και προηγουμένως, μια μαντεψιά της λύσης είναι η συνάρτηση $w(x,t) = X(x)T(t)$. Αντικαθιστώντας την στην εξίσωση του κύματος έχουμε

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνον του t και το δεξιό μέλος μόνον του x. Συνεπώς, και τα δύο μέλη οφείλουν να είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό τον οποίο ας συμβολίσουμε με $-\lambda$.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Εύκολα τώρα καταλήγουμε στις εξής δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Οι συνθήκες $0 = w(0,t) = X(0)T(t)$ συνεπάγονται ότι $X(0) = 0$ και η $w(L,t) = 0$ συνεπάγεται ότι $X(L) = 0$. Άρα, οι μόνες μη-τετριμμένες λύσεις της πρώτης εξίσωσης υπάρχουν όταν $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ και είναι οι εξής

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Η γενική λύση για το T για την συγκεκριμένη λ_n είναι

$$T_n(t) = A \cos \frac{n\pi a}{L} t + B \sin \frac{n\pi a}{L} t.$$

Επιπρόσθετα έχουμε τις εξής συνθήκες $w(x,0) = 0$ για την εξίσωση $X(x)T'(0) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $T'(0) = 0$, το οποίο με την σειρά του μας δηλώνει ότι $A = 0$. Για την ευκολία μας επιλέγουμε $B = \frac{L}{n\pi a}$ και έχουμε

$$T_n(t) = \frac{L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a}{L} t.$$

Η λύση, δομικός στοιχείο μας, είναι η

$$w_n(x,t) = \frac{L}{n\pi a} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Παραγωγίζουμε ως προς t, και παίρνουμε

$$(w_n)_t(x,t) = \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\cos \frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Άρα,

$$(w_n)_t(x,0) = \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Αναπτύσσουμε τώρα την $g(x)$ στην εξής σειρά ημιτόνων

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την λύση του (5.1) σαν σειρά ως εξής

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi a} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi a}{L} t\right).$$

5.2.1 *Επιβεβαιώστε ότι* $w(x,0)=0$ *και ότι* $w_t(x,0)=g(x)$.

Μπορούμε να εργαστούμε ανάλογα για να λύσουμε το (5.2). Η μαντεψιά μας τώρα είναι η $z(x,y)=X(x)T(t)$ και η υπόλοιπη διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια με παραπάνω. Έχουμε τις εξισώσεις

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$
$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0.$$

και και τις συνθήκες $X(0)=0$, $X(L)=0$. Ξανά έχουμε ότι $\lambda=\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ και

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}\,x.$$

Η συνθήκη για το T τώρα γίνεται $T(0)=0$. Συνεπώς αντί για $A=0$ που είχαμε προηγουμένως έχουμε $B=0$ και παίρνουμε

$$T_n(t)=\sin\frac{n\pi a}{L}\,t.$$

Η λύση, δομικό στοιχείο είναι η

$$z_n(x,t)=\left(\sin\frac{n\pi}{L}\,x\right)\left(\cos\frac{n\pi a}{L}\,t\right).$$

Αναπτύσσουμε την $f(x)$ σαν σειρά ημιτόνων ως εξής

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi}{L}\,x.$$

και τελικά γράφουμε την λύση του (5.2) σε μορφή σειράς ως εξής

$$z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\sin\frac{n\pi}{L}\,x\right)\left(\cos\frac{n\pi a}{L}\,t\right).$$

5.2.2 *Επιβεβαιώστε ότι η παραπάνω λύση της* (5.2) *ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες.*

Συνθέτοντας τις δύο παραπάνω λύσεις καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα το οποίο και διατυπώνουμε σε μορφή θεωρήματος ως εξής.

Θεώρημα 5.2.1. *Θεωρήστε το πρόβλημα*

$$\begin{array}{ll} y_{tt}=a^2y_{xx}, & \\ y(0,t)=y(L,t)=0, & \\ y(x,0)=f(x) & \textit{για } 0<x<L, \\ y_t(x,0)=g(x) & \textit{για } 0<x<L, \end{array} \tag{5.4}$$

όπου

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

και

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Τότε η λύση $y(x,t)$ *μπορεί να γραφθεί σαν το άθροισμα των λύσεων των προβλημάτων οφ* (5.1) *και* (5.2). *Με άλλα λόγια,*

$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi a} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi a}{L} t\right) + c_n \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\cos \frac{n\pi a}{L} t\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left[b_n \frac{L}{n\pi a} \left(\sin \frac{n\pi a}{L} t\right) + c_n \left(\cos \frac{n\pi a}{L} t\right)\right]. \end{aligned}}$$

5.2.1 Ασκήσεις

5.2.3 *Υπολογίστε την λύση του εξής προβλήματος*

$$\begin{aligned} &y_{tt} = 9y_{xx}, \\ &y(0,t) = y(1,t) = 0, \\ &y(x,0) = \sin 3\pi x + \tfrac{1}{4} \sin 6\pi x && \text{για } 0 < x < 1, \\ &y_t(x,0) = 0 && \text{για } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

5.2.4 *Υπολογίστε την λύση του εξής προβλήματος*

$$\begin{aligned} &y_{tt} = 4y_{xx}, \\ &y(0,t) = y(1,t) = 0, \\ &y(x,0) = \sin 3\pi x + \tfrac{1}{4} \sin 6\pi x && \text{για } 0 < x < 1, \\ &y_t(x,0) = \sin 9\pi x && \text{για } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

5.2.5 *Δώστε την γενική μορφή της θέσης της χορδής μήκους* L *κάποιου έγχορδου οργάνου, όταν απομακρύνουμε την χορδή από την θέση ισορροπίας τραβώντας την από το σημείο της που απέχει απόσταση* b *από το μέσον της χορδής αφήνοντας την μετά ελεύθερη να ταλαντωθεί. Υποθέστε μια οποιαδήποτε σταθερά* a.

5.2.6 *Ας υποθέσουμε ότι ένα έγχορδο μουσικό όργανο πέφτει στο πάτωμα. Ας υποθέσουμε ότι το μήκος χορδής του είναι 1 και ότι* $a = 1$. *Όταν το όργανο κτυπά στο έδαφος ή χορδή είναι σε κατάσταση ισορροπίας και συνεπώς* $y(x,0) = 0$. *Λόγω τη πτώσης όμως η χορδή αυτή κινείται με κάποια ταχύτητα την στιγμή της σύγκρουσης* ($t = 0$)*, ας υποθέσουμε* $y_t(x,0) = -1$. *Υπολογίστε την λύση* $y(x,t)$ *της θέσης της χορδής στην χρονική στιγμή* t.

5.3 Θερμοκρασία κατάστασης ισορροπίας, εξίσωση του Laplace , και πρόβλημα του Dirichlet

Έστω ότι έχουμε ένα μονωμένο καλώδιο, μια επιφάνεια ή ένα 3-διάστατο αντικείμενο. Εφαρμόσουμε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία στα άκρα του καλωδίου, στις ακμές τις επιφάνειας ή στις πλευρές του 3-διάστατου αντικειμένου. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της *θερμοκρασίας σε κατάσταση ισορροπίας*. Θέλουμε δηλαδή να γνωρίζουμε ποια θα είναι η θερμοκρασία μετά την πάροδο αρκετού χρόνου.

Θέλουμε στην ουσία να λύσουμε την εξίσωση της θερμότητας η οποία δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Ας ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα μίας μόνο χωρικής μεταβλητή. Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε μια συνάρτηση u που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$u_t = ku_{xx},$$

και την συνθήκη $u_t = 0$ για κάθε x και t. Συνεπώς μας ενδιαφέρει μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται μόνον από το x και ικανοποιεί την εξίσωση $u_{xx} = 0$. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την λύση ολοκληρώνοντας και να πάρουμε $u = Ax + B$ για κάποιες σταθερές A και B.

Έστω ότι έχουμε ένα μονωμένο καλώδιο και εφαρμόζουμε στο ένα άκρο (έστω στο $x = 0$) σταθερή θερμοκρασία T_1 και στο άλλο άκρο (στο $x = L$ όπου L το μήκος του καλωδίου) σταθερή θερμοκρασία T_2. Στην περίπτωση αυτή η λύση ευσταθούς κατάσταση είναι η εξής

$$u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1.$$

Η λύση αυτή συμφωνεί με την κοινή λογική διαίσθηση μας ως προς το πώς πρέπει να κατανέμεται η θερμότητα στο σύρμα. Έτσι, σε μία διάσταση, οι λύσεις σταθεράς κατάσταση είναι ουσιαστικά μόνο ευθείες γραμμές.

Τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα σε δύο ή περισσότερες χωρικές διαστάσεις. Για την ευκολία μας ας περιοριστούμε σε δύο χωρικές διαστάσεις. Η εξίσωση της θερμότητας σε δύο μεταβλητές έχει την εξής μορφή

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \tag{5.5}$$

ή την εξής μορφή $u_t = k\Delta u$ ή $u_t = k\nabla^2 u$. Εδώ τα σύμβολα Δ και ∇^2 παριστούν την $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό Δ από τώρα και στο εξής. Ένας από τους λόγους για τον συμβολισμό αυτό είναι ότι μας επιτρέπει να διατυπώνουμε την εξίσωση της θερμότητας στην κοινή μορφή $u_t = k\Delta u$ ανεξάρτητα από το πόσες είναι οι χωρικές διαστάσεις. Το Δ ονομάζεται*Λαπλασιανή*.

Αναζητάμε λοιπόν μια λύση του (5.5) που δεν εξαρτάται από το t. Ψάχνουμε δηλαδή μια συνάρτηση $u(x, y)$ τέτοια ώστε

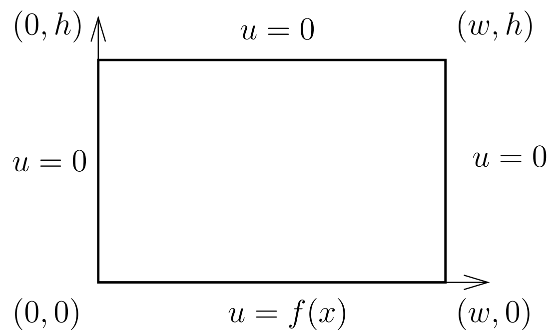
$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.}$$

Η παραπάνω είναι γνωστή σαν *Εξίσωση του Laplace* [†]. Οι λύσεις της εξίσωσης του Λαπλάς ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις* και έχουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες και σημαντικές εφαρμογές πέρα από τα προβλήματα θερμότητας.. Η εξίσωση του *Laplace* , συχνά αποτελεί μέρος του *Προβλήματος του Dirichlet* [‡]. Στο πρόβλημα αυτό έχουμε ένα κλειστό χωρίο στο xy-επίπεδο, καθορίσουμε συγκεκριμένες τιμές στο σύνορο του χωρίου και προσπαθούμε να βρούμε μια λύση u ορισμένη στην περιοχή αυτή τέτοια ώστε η u να ικανοποιεί τις καθορισμένες τιμές στο σύνορο.

Για την ευκολία μας ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο χωρίο. Ας θέσουμε την τιμή της λύσης στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου αυτού χωρίου ίση με 3 ενώ στην τέταρτη πλευρά καθορίζουμε την τιμή της λύσης ίση με μια οποιαδήποτε δοθείσα συνάρτηση. Στην γενική περίπτωση που η τιμή της λύσης είναι καθορισμένη και στις τέσσερις πλευρές με δοθείσες συναρτήσεις μπορεί να αντιμετωπισθεί χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης. για τα τέσσερα επιμέρους απλούστερα προβλήματα όπως αυτό που δίνουμε παρακάτω.

Ας λύσουμε λοιπόν το εξής πρόβλημα. Έστω h και w οι διαστάσεις του ορθογωνίου χωρίου, το οποίο έχει μια γωνία στην αρχή των αξόνων και βρίσκεται όλο στο πρώτο τεταρτημόριο.

$$\Delta u = 0, \tag{5.6}$$
$$u(0,y) = 0 \text{ για } 0 < y < h, \tag{5.7}$$
$$u(x,h) = 0 \text{ για } 0 < x < w, \tag{5.8}$$
$$u(w,y) = 0 \text{ για } 0 < y < h, \tag{5.9}$$
$$u(x,0) = f(x) \text{ για } 0 < x < w. \tag{5.10}$$



θα εφαρμόσουμε την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών. Θα υπολογίσουμε λοιπόν επιμέρους λύσεις, δομικές μονάδες που ικανοποιούν όλες τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (εκτός της (5.10)). Παρατηρούμε βεβαίως ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης όπως και προηγουμένως.

Ας δοκιμάσουμε την μανρεψιά $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Τακτοποιούμε τα X απο την μια μεριά και τα Yς από την άλλη για να πάρουμε

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}$$

[†]Πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 – 1827).

[‡]Πήρε το όνομά της από τον Γερμανό μαθηματικό Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

και τελικά να καταλήξουμε στις εξής δύο εξισώσεις

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$Y'' - \lambda Y = 0.$$

Επιπρόσθετα οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες συνεπάγονται ότι $X(0) = X(w) = 0$ και $Y(h) = 0$. Ξεκινώντας από την εξίσωση του X έχουμε, όπως ήδη παρατηρήσαμε, μη-τετριμμένη λύση μόνον αν $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{w^2}$ και η λύση είναι κάθε πολλαπλάσιο του

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{w} x.$$

Για τα παραπάνω λ_n, η γενική λύση για το Y (μια για κάθε n) είναι η εξής

$$Y_n(y) = A_n \cosh \frac{n\pi}{w} y + B_n \sinh \frac{n\pi}{w} y. \tag{5.11}$$

Επειδή έχουμε μόνον μια συνθήκη για το Y_n μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή μόνον μιας από τις σταθερές A_n και B_n και μπορούμε να επιλέξουμε όποια μας βολεύει. Επειδή φαίνεται να είναι χρήσιμο να έχουμε $Y_n(0) = 1$, θέτουμε $A_n = 1$. Θέτοντας $Y_n(h) = 0$ και λύνοντας ώς προς B_n έχουμε

$$B_n = \frac{-\cosh \frac{n\pi h}{w}}{\sinh \frac{n\pi h}{w}}.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των A_n και B_n στην (5.11) και απλοποιώντας βρίσκουμε ότι

$$Y_n(y) = \frac{\sinh \frac{n\pi(h-y)}{w}}{\sinh \frac{n\pi h}{w}}.$$

Ορίζουμε $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ και σημειώνουμε ότι η u_n ικανοποιεί τις συνθήκες (5.6)–(5.9).

Παρατηρήστε ότι

$$u_n(x, 0) = X_n(x)Y_n(0) = \sin \frac{n\pi}{n} x.$$

Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{w}.$$

Τότε η λύση του (5.6)–(5.10) έχει την εξής μορφή.

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi}{w} x\right) \left(\frac{\sinh \frac{n\pi(h-y)}{w}}{\sinh \frac{n\pi h}{w}}\right).}$$

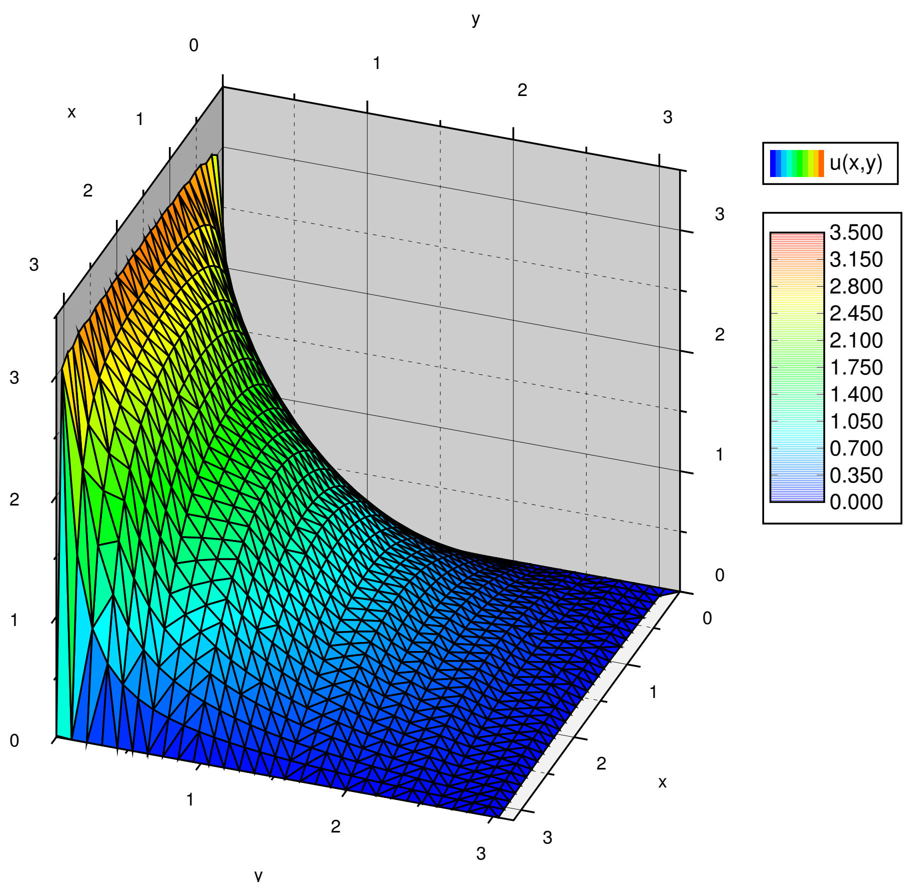
Επειδή τα u_n ικανοποιούν τις (5.6)–(5.9) πρέπει και κάθε (πεπερασμένος ή άπειρος) συνδυασμός των u_n να ικανοποιεί τις (5.6)–(5.9), και συνεπώς και η u ικανοποιεί τις (5.6)–(5.9). Αντικαθιστώντας $y = 0$ παρατηρούμε ότι η u ικανοποιεί την (5.10) επίσης.

Παράδειγμα 5.3.1: Ας πάρουμε $w = h = \pi$ και ας θέσουμε $f(x) = \pi$. Ας υπολογίσουμε και το ανάπτυγμα σε σειρά*Fourier* της συνάρτησης π. Τοτε για $0 < x < \pi$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} \frac{4}{n} \sin nx.$$

Συνεπώς η λύση $u(x, y)$, που φαίνεται και στο Σχήμα 5.7, στο αντίστοιχο πρόβλημα *Dirichlet* δίνεται ως εξής

$$u(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} \frac{4}{n} (\sin nx) \left(\frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \right).$$



Σχήμα 5.7: Κατανομή της θερμοκρασίας σταθεράς κατάστασης ενός τετραγωνικού χωρίου με τις τρεις πλευρές να έχουνε σταθερή θερμοκρασία 0 και η τέταρτη να έχει σταθερή θερμοκρασία π.

5.3.1 Ασκήσεις

5.3.1 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\Delta u = 0, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u(x,\pi) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 0.$$

5.3.2 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = \sin \pi x - \sin 2\pi x, \quad u(x,1) = 0, \\ &u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0. \end{aligned}$$

5.3.3 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = C. \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά C.

5.3.4 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\Delta u = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = \pi, \quad u(0,y) = y, \quad u(\pi,y) = y.$$

Υπόδειξη: $u(x,y) = X(x) + Y(y)$.

5.3.5 *Χρησιμοποιήστε την λύση της Άσκησης 5.3.4 για να λύσετε το πρόβλημα*

$$\Delta u = 0, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u(x,\pi) = \pi, \quad u(0,y) = y, \quad u(\pi,y) = y.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε υπέρθεση.

5.3.6 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < w$ και $0 < y < h$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad u(x,h) = f(x), \\ &u(0,y) = 0, \quad u(w,y) = 0. \end{aligned}$$

Δώστε την λύση σε γενική μορφή σειρών.

5.3.7 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < w$ και $0 < y < h$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad u(x,h) = 0, \\ &u(0,y) = f(y), \quad u(w,y) = 0. \end{aligned}$$

Δώστε την λύση σε γενική μορφή σειρών.

5.3.8 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < w$ και $0 < y < h$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad u(x,h) = 0, \\ &u(0,y) = 0, \quad u(w,y) = f(y). \end{aligned}$$

Δώστε την λύση σε γενική μορφή σειρών.

5.3.9 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = \sin 9\pi x, \quad u(x,1) = \sin 2\pi x, \\ &u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε υπέρθεση.

5.3.10 *Έστω R το χωρίο που καθορίζουν οι ανισότητες βψ $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$. Επιλύστε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ &u(x,0) = \sin \pi x, \quad u(x,1) = \sin \pi x, \\ &u(0,y) = \sin \pi y, \quad u(1,y) = \sin \pi y. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε υπέρθεση.

Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμοί Laplace

6.1 Μετασχηματισμοί Laplace

6.1.1 Ο μετασχηματισμός Laplace

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Laplace. *.

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος για την επίλυση μια κατηγορίας προβλημάτων ΣΔΕ. Συγκεκριμένα, μετασχηματίζει μια διαφορική εξίσωση σε μια αλγεβρική εξίσωση. Αν μπορέσουμε να λύσουμε την αλγεβρική εξίσωση τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός της λύσης αυτής θα μας δώσει την λύση της διαφορικής εξίσωσης. Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται ευρύτατα και ιδιαίτερα στην ανάλυση συστημάτων όπως ηλεκτρικών κυκλωμάτων, επεξεργασίας σημάτων, ηλεκτροσκοπίων κ.λ.π. Τέλος η κατανόηση του μετασχηματισμός Laplace βοηθά στην κατανόηση των μετασχηματισμών Fourier οι οποίοι απαιτούν επιπρόσθετες γνώσεις μιγαδικών αριθμών. Δεν θα καλύψουμε το θέμα των μετασχηματισμών Fourier.

Ο μετασχηματισμός Laplace μας βοηθά να κατανοήσουμε βαθύτερα την φύση των εξισώσεων με τις οποίες ασχολούμαστε. Μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μετατροπέας μεταξύ του πεδίου του χρόνου και του πεδίου των συχνοτήτων. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την γνωστή εξίσωση

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t).$$

Μπορούμε να εκλάβουμε το t σαν χρόνο και την $f(t)$ σαν ένα εισερχόμενο σήμα. Ο μετασχηματισμός *Laplace* θα μετατρέψει την, ως προς τον χρόνο, διαφορική εξίσωση σε μια αλγεβρική εξίσωση όπου η νέα ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η συχνότητα s.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον *μετασχηματισμό Laplace* σαν μια μηχανή την οποί τροφοδοτούμε με συναρτήσεις και αυτή μας επιστρέφει συναρτήσεις ως προς μια νέα μεταβλητή.

---

*Τόσο ο μετασχηματισμός Laplace όσο και η εξίσωση Laplace , πήραν το όνομά τους από τον Laplace Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 – 1827).

Χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Αποτελεί κοινή πρακτική να χρησιμοποιούμε πεζά γράμματα για να συμβολίσουμε συναρτήσεις στο χρόνο (στο πεδίο του χρόνου όπως λέμε συνήθως) και κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε συναρτήσεις στο πεδίο των συχνοτήτων. Βεβαίως χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα για να δηλώσουμε ότι η μια συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της άλλης. Για παράδειγμα η $F(s)$ ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(t)$. Ας ορίσουμε τώρα τον μετασχηματισμό αυτόν ως εξής.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Μια και όπως αναφέραμε η μεταβλητή t παριστά (συνήθως) χρόνο και μια και κυρίως ενδιαφερόμαστε για το μέλλον και όχι για το παρελθόν υποθέτουμε ότι $t \geq 0$ για τον μετασχηματισμό μας.

Ας υπολογίσουμε για αρχή τον ποιο απλό μετασχηματισμό.

Παράδειγμα 6.1.1: Αν $f(t) = 1$, τότε

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s}.$$

Προφανώς, το όριο υπάρχει μόνον για $s > 0$. Οπότε το $\mathcal{L}\{1\}$ ορίζεται μόνον για $s > 0$.

Παράδειγμα 6.1.2: Αν $f(t) = e^{-at}$, τότε

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s+a}.$$

Προφανώς, το όριο υπάρχει μόνον για $s+a > 0$. Οπότε τ $\mathcal{L}\{e^{-at}\}$ ορίζεται μόνον για $s+a > 0$.

Παράδειγμα 6.1.3: Αν $f(t) = t$, τότε με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t\, dt \\
&= \left[\frac{-te^{-st}}{s}\right]_{t=0}^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt \\
&= 0 + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty \\
&= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Προφανώς, το όριο υπάρχει μόνον για $s > 0$.

Παράδειγμα 6.1.4: Μια πολύ συνηθισμένη συνάρτηση είναι η *συνάρτηση του μοναδιαίου βήματος*, την οποία συχνά αναφέρουμε και σαν *συνάρτηση Heaviside*[†]. Η συνάρτηση αυτή έχει την εξής μορφή

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 & \text{αν } t \geq 0. \end{cases}$$

Ας υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης $u(t-a)$, όπου $a \geq 0$ είναι μια τυχαία σταθερά. Δηλαδή, της συνάρτησης η οποία είναι 0 για $t < a$ και 1 για $t \geq a$.

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=a}^\infty = \frac{e^{-as}}{s},$$

όπου βεβαίως $s > 0$ (και $a \geq 0$ όπως αναφέραμε παραπάνω).

Χρησιμοποιώντας παρόμοιες διαδικασίες μπορούμε να •μετασχηματίσουμε μια πληθώρα θεμελιωδών συναρτήσεων σαν αυτές του Πίνακα 6.1.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
C	$\frac{C}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^3	$\frac{6}{s^4}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Πίνακας 6.1: Μερικοί μετασχηματισμοί Laplace (Οι C, ω, και a είναι σταθερές).

6.1.1 *Επιβεβαιώστε τον Πινακα 6.1.*

[†]Πήρε το όνομά της από τον *OliverHeaviside* αυτοδίδακτο ηλεκτρολόγο, μαθηματικό και φυσικό ο οποίος παραιτήθηκε από την εργασία του στην ηλικία των 24 ετών και πέρασε τα υπόλοιπα 60 χρόνια της ζωής του κάνοντας έρευνα στο σπίτι του (1850–1925).

Μια και ο μετασχηματισμός ορίζεται από ένα ολοκλήρωμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα αν C είναι μια σταθερά, τότε

$$\mathcal{L}\{Cf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}Cf(t)\ dt = C\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt = C\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Μπορούμε δηλαδή να 'εξαγάγουμε' μια σταθερά από τον μετασχηματισμό. Άρα μόλις αποδείξαμε ότι ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός. Λόγω της σπουδαιότητας της ιδιότητας της γραμμικότητας διατυπώνουμε το παραπάνω σε μορφή θεωρήματος.

Θεώρημα 6.1.1 (Γραμμικότητα μετασχηματισμού Laplace)**.** *Έστω ότι A, B, και C τυχαίες σταθερές, τότε*

$$\boxed{\mathcal{L}\{Af(t) + Bg(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\} + B\mathcal{L}\{g(t)\},}$$

και συγκεκριμένα

$$\mathcal{L}\{Cf(t)\} = C\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

6.1.2 *Επιβεβαιώστε το παραπάνω θεώρημα. Δηλαδή, δείξτε ότι $\mathcal{L}\{Af(t)+Bg(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\}+B\mathcal{L}\{g(t)\}$.*

Οι παραπάνω κανόνες σε συνδυασμό με τον Πίνακα 6.1 στην προηγούμενη σελίδα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε εύκολα τον μετασχηματισμό *Laplace* για μια πληθώρα συναρτήσεων.

Ας ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή με δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Είναι λάθος να πιστεύουμε ότι ο μετασχηματισμός του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών τους. Γενικά δηλαδή μπορεί κάλλιστα να έχουμε

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Είναι επίσης λάθος να πιστεύουμε ότι όλες οι συναρτήσεις έχουν μετασχηματισμό *Laplace* . Για παράδειγμα η συνάρτηση $\frac{1}{t}$ δεν έχει μετασχηματισμό *Laplace* μια και το ολοκλήρωμα αποκλίνει. Επίσης και η $\tan t$ και η e^{t^2} δεν έχουν μετασχηματισμό *Laplace* .

6.1.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

Όπως αναφέραμε ο μετασχηματισμός *Laplace* μας δίνει την δυνατότητα να μετατρέπουμε μια διαφορική εξίσωση σε μια αλγεβρική την οποία μπορούμε βεβαίως να λύσουμε πολύ ποιο εύκολα. Μόλις υπολογίσουμε την λύση της αλγεβρικής εξίσωσης πρέπει να μπορούμε να επιστρέψουμε. Αν έχουμε μια συνάρτηση $F(s)$, και θέλουμε να υπολογίσουμε την $f(t)$ για την οποία ισχύει $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι μοναδική. Αυτό μας το εγγυάται το Θεώρημα 6.1.2 την απόδειξη του οποίου θα παραλείψουμε.

Θεώρημα 6.1.2 (Μοναδικότητα)**.** *Έστω ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς και εκθετικής τάξης. Αν υπάρχει μια σταθερά C, τέτοια ώστε $F(s) = G(s)$ για κάθε $s > C$ τότε έχουμε ότι $f(t) = g(t)$ για κάθε $t \geq 0$.*

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον εξής ορισμό.

Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace* ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Υπάρχει ένας τύπος με ολοκλήρωμα, δεν είναι όμως τόσο απλός όσο αυτός του μετασχηματισμού (μια και απαιτεί μιγαδικούς αριθμούς). Ο καλλίτερος τρόπος για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό είναι να χρησιμοποιήσουμε τον Πίνακα 6.1 στη σελίδα 195.

Παράδειγμα 6.1.5: Αν $F(s) = \frac{1}{s+1}$. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα για να δούμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

Αξίζει να τονίσουμε ότι επειδή ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι επίσης γραμμικός. Δηλαδή,

$$\mathcal{L}^{-1}\{AF(s) + BG(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + B\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Στο παρακάτω παράδειγμα βλέπουμε πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα αυτή.

Παράδειγμα 6.1.6: Αν $F(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s}$. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε την *μέθοδο μερικών κλασμάτων* για να φέρουμε την F σε μορφή που θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τον Πίνακα 6.1 στη σελίδα 195. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $s(s^2+1)$ και έχουμε

$$\frac{s^2+s+1}{s^3+s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Συνεπώς $A(s^2-1) + s(Bs+C) = s^2+s+1$. Άρα, $A+B=1$, $C=1$, $A=1$. Με άλλα λόγια,

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Εκμεταλλευόμενοι την γραμμικότητα του μετασχηματισμού (αλλά και του αντίστροφου του) έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^3+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 1 + \sin t.$$

6.1.3 Ασκήσεις

6.1.3 *Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της* $3 + t^5 + \sin \pi t$.

6.1.4 *Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της* $a + bt + ct^2$ *όπου* a, b, *και* c *είναι τυχαίες σταθερές.*

6.1.5 *Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της* $A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

6.1.6 *Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της* $\cos^2 \omega t$.

6.1.7 *Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της* $\frac{4}{s^2-9}$.

6.1.8 *Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της* $\frac{2s}{s^2-1}$.

6.1.9 *Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της* $\frac{1}{(s-1)^2(s+1)}$.

6.2 Μετασχηματισμοί παραγώγων και ΣΔΕ

6.2.1 Μετασχηματισμοί παραγώγων

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς *Laplace* . Πρώτα ας προσπαθήσουμε να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* μιας συνάρτησης η οποία είναι η παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης. Δηλαδή, έστω ότι η $g(t)$ είναι μια συνεχώς παραγωγήσιμη συνάρτηση.

$$\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} g'(t)\; dt = \Big[e^{-st} g(t)\Big]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (-s)\, e^{-st} g(t)\; dt = -g(0) + s\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε την διαδικασία αυτή παραπέρα για να αντιμετωπίσουμε παραγώγους υψηλότερης τάξης. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας διαδικασίας παρουσιάζονται στην Πίνακα 6.2. Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για τμηματικά ομαλές συναρτήσεις, δηλαδή για τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις με τμηματικά συνεχή παράγωγο.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$g'(t)$	$sG(s) - g(0)$
$g''(t)$	$s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$
$g'''(t)$	$s^3G(s) - s^2g(0) - sg'(0) - g''(0)$

Πίνακας 6.2: Μετασχηματισμός *Laplace* των παραγώγων ($G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$).

6.2.1 *Επιβεβαιώστε τον Πίνακα 6.2.*

6.2.2 Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς *Laplace*

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 6.2.1: Έστω

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Ας πάρουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* και των δύο μερών. Με $X(s)$ θα συμβολίσουμε, όπως συνηθίζουμε, τον μετασχηματισμό *Laplace* της $x(t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}, \\ s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) &= \frac{s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Ας ενσωματώσουμε τις αρχικές συνθήκες τώρα (κάτι τέτοιο κάνει τους υπολογισμούς μας ποιο εξορθολογισμένους) έχουμε

$$s^2X(s) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Λύνουμε ως προς $X(s)$,

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Χρησιμοποιώντας μερικά κλάσματα παίρνουμε (άσκηση)

$$X(s) = \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* καταλήγουμε στην λύση

$$x(t) = \frac{1}{3}\,\cos t - \frac{1}{3}\,\cos 2t + \sin t.$$

Η γενική διαδικασία έχει ως εξής. Ξεκινάμε με μια συνήθη διαφορική εξίσωση στο πεδίο του χρόνου (με ελεύθερη μεταβλητή t). Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό *Laplace* μετατρέπουμε την εξίσωσή μας σε μια αλγεβρική εξίσωση στο πεδίο των συχνοτήτων. Όλες οι συναρτήσεις $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, κ.λ.π. θα μετασχηματιστούν στις $X(s)$, $sX(s)-x(0)$, $s^2X(s)-sx(0)-x'(0)$, κ.λ.π.. Αν η αρχική διαφορική εξίσωση είχε σταθερούς συντελεστές τότε θα μπορέσουμε εύκολα να λύσουμε ως προς $X(s)$. Αν εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* θα καταλήξουμε στην λύση μας $x(t)$.

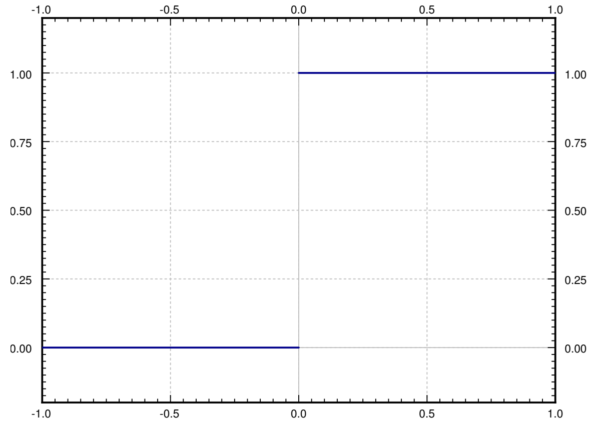
Να επισημάνουμε ότι μια και δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει μετασχηματισμός *Laplace* για κάθε συνάρτηση δεν περιμένουμε να μπορούμε να λύσουμε κάθε διαφορική εξίσωση με τον παραπάνω τρόπο.

6.2.3 Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση *Heaviside*

Ας επικεντρωθούμε σε μια ποιο περίπλοκη συνάρτηση από αυτές που συναντήσαμε παραπάνω, την συνάρτηση του *Heaviside*. Δείτε το Σχήμα 6.1 στην παρούσα σελίδα την γραφική της παράσταση.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση χρησιμοποιείται για να συνδέσουμε συναρτήσεις, ή να αποκόψουμε συναρτήσεις. Χρησιμοποιείται ευρήτατα στην μορφή $u(t-a)$ όπου a είναι κάποια σταθερά. Κάτι τέτοιο βεβαίως μετατωπίζει το γράφημα της συνάρτησης προς τα δεξιά κατά a. Δηλαδή, η παραπάνω είναι μια συνάρτηση η οποία είναι ο για $t < a$ και 1 για $t \geq a$.



Σχήμα 6.1: Η γραφική παράσταση της (μοναδιαίας) συνάρτησης *Heaviside* $u(t)$.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t. Τότε πρέπει να ορίσουμε την $f(t)$ ως εξής

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση *Heaviside* μπορούμε να γράψουμε την $f(t)$ ως εξής

$$f(t) = u(t - \pi) \sin t.$$

Παρόμοια η συνάρτηση που έχει την τιμή 1 στο διάστημα $[1, 2)$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού έχει την μορφή

$$u(t - 1) - u(t - 2).$$

Η συνάρτηση *Heaviside* μας είναι επίσης χρήσιμη όταν θέλουμε να ορίσουμε τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Αν για παράδειγμα επιθυμούμε μια συνάρτηση να είναι ίση με την συνάρτηση t όταν το t είναι στο διάστημα $[0, 1]$, ίση με την συνάρτηση $-t + 2$ όταν το t είναι στο διάστημα $[1, 2]$ και ίση μηδέν οπουδήποτε αλλού τότε μπορούμε να την γράψουμε στην εξής μορφή

$$t\big(u(t) - u(t - 1)\big) + (-t + 2)\big(u(t - 1) - u(t - 2)\big).$$

Είναι συνεπώς χρήσιμο να μελετήσουμε πως η συνάρτηση *Heaviside* συμπεριφέρεται σε σχέση με τον μετασχηματισμό *Laplace*. Ήδη έχουμε δει ότι

$$\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Το παραπάνω μπορεί να γενικευθεί σαν μια *ιδιότητα μετατώπισης* ή *δεύτερη ιδιότητα μετατώπισης*.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}.} \tag{6.1}$$

Παράδειγμα 6.2.2: Έστω ότι η εξωτερική δύναμη ενός συστήματος μάζας ελατηρίου δεν είναι περιοδική. Δηλαδή έστω ότι

$$x''(t) + x(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

όπου $f(t) = 1$ αν $1 \leq t < 3$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Το σύστημα αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε εβσωματώσει στο σωματίδιο του συστήματος ένα πύραυλο ο οποίος πυροδοτείται για 2 δευτερόλεπτα αρχίζοντας απο την χρονική στιγμή $t = 1$. Η ίσως ένα κύκλωμα RLC όπου η τάση αυξάνεται με σταθερό ρυθμό για 2 δευτερόλεπτα $t = 1$ και ακολούθως παραμένει σταθερή μέχρι την χρονική στιγμή $t = 3$.

Μπορούμε να γράψουμε $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$. Μετασχηματίσουμε την εξίσωση και αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες όπως πρίν και έχουμε

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Λύνοντας ως προς $X(s)$ παίρνουμε

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}.$$

Μπορούμε τώρα εύκολα (άσκηση) να διαπιστώσουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t.$$

Με άλλα λόγια $\mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$. Οπότε χρησιμοποιώντας την (6.1) βρσίσκουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \big(1 - \cos(t-1)\big)\, u(t-1).$$

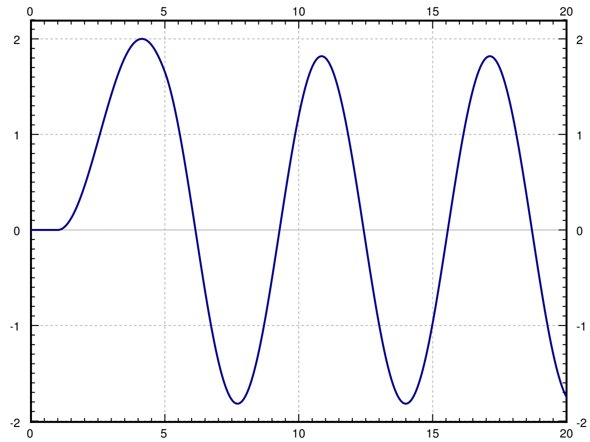
Παρόμοια έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}\right\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \big(1 - \cos(t-3)\big)\, u(t-3).$$

Άρα η λύση μας είναι

$$x(t) = \big(1 - \cos(t-1)\big)\, u(t-1) - \big(1 - \cos(t-3)\big)\, u(t-3)$$

και η γραφική παράστασή της δίνεται στο Σχήμα 6.2 στην επόμενη σελίδα.



Σχήμα 6.2: Γράφημα της $x(t)$.

6.2.4 Μετασχηματισμοί ολοκληρωμάτων

Οι μετασχηματισμοί *Laplace* μπορούν να αντιμετωπίζουν και εξισώσεις με ολοκληρώματα με χαρακτηριστική ευκολία. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό και ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε τον εξής βασικό κανόνα-εργαλείο.

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,F(s).}$$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, χρήσιμο είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\int_0^t f(\tau)\ d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,F(s)\right\}.$$

Παράδειγμα 6.2.3: Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της $\frac{1}{s(s^2+1)}$ θα εφαρμόσουμε τον εξής κανόνα ολοκλήρωσης.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+1}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\ d\tau = \int_0^t \sin\tau\ d\tau = 1 - \cos t.$$

Αν μια αλγεβρική εξίσωση περιέχει κάποιο ολοκλήρωμα της άγνωστης συνάρτησης τότε αυτή ονομάζεται *εξίσωση ολοκληρώματος*. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$t^2 = \int_0^t e^\tau x(\tau)\ d\tau.$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Laplace* έχουμε (όπου $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$)

$$\frac{2}{s^3} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{e^\tau f(\tau)\}\frac{1}{s}\,X(s-1)$$

ή

$$X(s-1) = \frac{2}{s^2} \qquad \text{ορ} \qquad X(s) = \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατώπισης καταλήγουμε στο

$$x(t) = 2e^{-t}t.$$

6.2.5 Ασκήσεις

6.2.2 *Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση Heaviside για να διατυπώσετε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση η οποία είναι 0 για* $t < 0$, t^2 *για* t *στο* $[0,1]$ *και* t *για* $t > 1$.

6.2.3 *Επιλύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεταχηματισμό Laplace*

$$mx'' + cx' + kx = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

όπου $m > 0$, $c > 0$, $k > 0$, *και* $c^2 - 4km > 0$.

6.2.4 *Επιλύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεταχηματισμό Laplace*

$$mx'' + cx' + kx = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

όπου $m > 0$, $c > 0$, $k > 0$, *και* $c^2 - 4km < 0$.

6.2.5 *Επιλύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεταχηματισμό Laplace*

$$mx'' + cx' + kx = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

όπου $m > 0$, $c > 0$, $k > 0$, *και* $c^2 = 4km$.

6.2.6 *Επιλύστε το παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεταχηματισμό Laplace* $x'' + x = u(t-1)$, $x(0) = 0$ *και* $x'(0) = 0$.

6.2.7 *Αποδείξτε την παρακάτω ιδιότητα. Έστω ότι* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *Τότε*

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s).$$

Βιβλιογραφία

[BM] Paul W. Berg kai James L. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1966.

[BD] William E. Boyce kai Richard C. DiPrima *Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th edition, Laurie Rosatone, 2009.

[EP] C.H. Edwards kai D.E. Penney, *Differential Equations kai Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 4th edition, Prentice Hall, 2008.

[F] Stanley J. Farlow, *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, McGraw-Hill, Inc., Princeton, NJ, 1994.

[EP] C.H. Edwards kai D.E. Penney, *Differential Equations kai Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 4th edition, Prentice Hall, 2008.

[I] E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1956.

Ευρετήριο