Ονοματεπώνυμο: ____________________________

18 μονάδες για καθένα από τα πρώτα 4 θέματα και 8 για καθένα από τα υπόλοιπα. Άριστα είναι οι 100 μονάδες.

1. Θεωρήστε ότι $-\pi \leq t \leq \pi$ και ότι $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$.

   (α΄) Δώστε τύπους για τον υπολογισμό των a_n και b_n.

   (β΄) Δώστε μια λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών $y'' + 2y = f(t), y'(-\pi) = y'(\pi)$ σε μορφή σειράς $Fourier$.

2. Δίδεται ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ και $\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

   (α′) Δώστε τον θεμελιώδη πίνακα $F(t)$ της εξίσωσης $\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$

   (β′) Χρησιμοποιήστε τον $F(t)$ για να δώσετε μια συγκεκριμένη λύση της παραπάνω εξίσωσης.

3. Αναρτούμε ένα σωματίδιο μάζας $2kg$ σε ένα ελατήριο και αυτό επιμηκύνεται κατά $10cm$. Ακολούθως το τραβάμε προς τα κάτω $20cm$ και το απελευθερώνουμε δίνοντας του αρχική προς τα επάνω ταχύτητα $2m/sec$. Υποθέτοντας ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι $g = 10m/sec^2$

   (α′) Διατυπώστε το μαθηματικό μοντέλο που αντιστοιχεί.

   (β′) Περιγράψτε την θέση του σωματιδίου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

   (γ′) Υπολογίστε την χρονική στιγμή που το σωματίδιο θα περάσει από την θέση ισορροπίας για πρώτη φορά.

4. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών (επιλέξτε καμία, μια ή περισσότερες επιλογές)

(α′) Η εξίσωση $(y')^2 + \sin(t)y' = t^3$ είναι

1. Πρώτης τάξης, γραμμική και μη-ομογενής
2. Πρώτης τάξης και μη-γραμμική
3. Πρώτης τάξης, μη-γραμμική και ομογενής
4. Δεύτερης τάξης και γραμμική
5. Δεύτερης τάξης και μη-γραμμική

(β′) Αν $y_1(x) \neq y_2(x) \neq 0$ είναι λύσεις της $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ τότε και η

1. $y_1(x) + y_2(x)$ είναι λύση της εξίσωσης.
2. $y_1(x) + y_2(x)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.
3. $y_1(x) - y_2(x)$ είναι λύση της εξίσωσης.
4. $y_1(x) - y_2(x)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

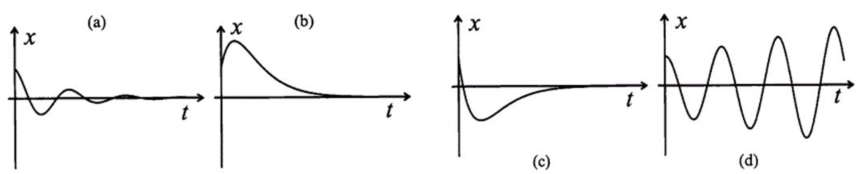
(γ′) Ποιές απο τις παρακάτω συναρτήσεις μπορεί να είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης $ty' + (t+2)y = t^3$;

1. $e^{\frac{t^2}{2}} + e^{2t}$ 2. $e^{\frac{t^2}{2}+2t}$ 3. t^2e^t 4. $t^2 + e^t$

(δ′) Εάν οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^t$ και $y_2(t) = te^t$ αποτελούν ένα σύνολο θεμελιωδών λύσεων μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης κυκλώστε όποια απο τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ΔΕΝ αποτελούν σύνολο θεμελιωδών λύσεων.

1. $y_3(t) = e^{t+3}, \;\; y_4(t) = e^{t-2}$. 2. $y_3(t) = e^t, \;\; y_4(t) = (t+1)e^t$.
3. $y_3(t) = e^{t+1}, \;\; y_4(t) = (t+1)e^{t+1}$. 4. $y_3(t) = 2e^t, \;\; y_4(t) = -te^t$.

(ε′) Ποιά απο τα παρακάτω γραφήματα ΔΕΝ αντιστοιχούν σε λύση της εξίσωσης $mx'' + \gamma x' + kx = 0$ όπου $m, \gamma, k > 0$;



5. Μετατρέψτε το σύστημα $\overline{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}(t) + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$ σε μια εξίσωση δεύτερης τάξης.

6. Αποδείξτε ότι $e^{A+B} = e^A e^B$ μόνον αν $AB = BA$ όπου A, B είναι $n \times n$ πίνακες.

7. Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Αν η $c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γενικευμένη λύση της $\overline{x}' = A\overline{x}$, δώστε την γενικευμένη λύση της $\overline{x}' = A\overline{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

8. Δώστε την γενικευμένη λύση της εξίσωσης $\overline{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}$ σαν πραγματική συνάρτηση αν γνωρίζετε ότι το $\begin{bmatrix} 1 \\ \imath \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμά της.

9. Περιγράψτε την συμπεριφορά των λύσεων του προβλήματος $y' = y^2(1 - e^y)(1 - y^2)$, $-\infty < y(t_0) = y_0 < \infty$ όταν $t \to \infty$.