

Η βαθμολογική αξία των 8 πρώτων θεμάτων είναι 11 μονάδες και του 9ου θέματος 22.
 Άριστα είναι οι 100 μονάδες.
 Καλή σας επιτυχία.

- Δώστε την γενική λύση της εξίσωσης
 (α') $y'' + 6y' + 9y = 0$.
 (β') $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
- Περιγράψτε την συμπεριφορά της λύσης της εξίσωσης
 (α') $ty' + 2y = 6, t > 0$.
 (β') $2y' = 2y - y^2$ όταν $t \rightarrow \infty$.
- Δώστε την τιμή του συντελεστή a_1 αν γνωρίζετε ότι η $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι η λύση της εξίσωσης $x^2 y'' + xy' + xy = 0$ με $a_0 = 1$.

- Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς *Laplace* για να υπολογίσετε την λύση του προβλήματος

$$x''(t) + x(t) = \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

αν γνωρίζεται ότι $\mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$ και $\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$.

- Δώστε

(α') την γενική λύση του συστήματος $x' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x$.

(β') όλες τις λύσεις του προβλήματος

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1.$$

- Δώστε μια συγκεκριμένη λύση του μη ομογενούς συστήματος $x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -2t^{-3} \end{bmatrix}$
 αν γνωρίζουμε ότι η $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ είναι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

- Δώστε όλες τις λύσεις του προβλήματος

$$9u_{xx} = u_t, \quad u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0 \quad u(x, 0) = \sin 2\pi x.$$

- Μια δεξαμενή χωρητικότητας 100 λίτρων περιέχει αρχικά 10 λίτρα καθαρού νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 10 γραμμαρίων αλατιού ανά λίτρο εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5 λίτρα το λεπτό. Το διάλυμα ανακατεύεται καλά και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 6 λίτρα το λεπτό. Δώστε το πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων που αφορά την ποσότητα του αλατιού στην δεξαμενή. Δηλώστε το νόημα όλων των μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσετε.

- Το παρακάτω πρόβλημα μοντελοποιεί ένα σύστημα μάζας ελατηρίου

$$2y'' + \gamma y' + 8y = F(t), \quad \gamma \geq 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4.$$

(α') Υπολογίστε το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος εάν $\gamma = 0$ και $F(t) = 0$.

(β') Υπολογίστε την τιμή του ω για την οποία έχουμε συντονισμό εάν $\gamma = 0$ και $F(t) = 3 \cos(\omega t)$.

(γ') Υπολογίστε την τιμή/τιμές του γ για την/τις οποίες έχουμε ισχυρά φθίνουσα ταλάντωση.