Ονοματεπώνυμο: ________________________

6 μονάδες για καθένα από τα θέματα 1, 2, 3α, 3β, 3γ και 11 για καθένα από τα υπόλοιπα. Άριστα είναι οι 100 μονάδες.

1. Δώστε έναν αριθμό x_0 τέτοιον ώστε η λύση $x(t)$ του προβλήματος $\frac{dx}{dt} = x^3(x+2)(x-1)$ με αρχική τιμή $x(0) = x_0$ να τείνει στο άπειρο όταν το t τείνει στο άπειρο.

2. Σχεδιάστε πρόχειρα τα πεδία κατευθύνσεων της εξίσωσης $y' = y - y^3$.

3. Ένας αλεξιπτωτιστής ο οποίος ζυγίζει $50Kg$ εκτελεί ελεύθερη πτώση εγκαταλείποντας το αεροσκάφος χωρίς να πηδήξει. Γνωρίζουμε ότι η δύναμη της αντίστασης του αέρα στον αλεξιπτωτιστή είναι γραμμικά ανάλογη της ταχύτητάς του και θεωρούμε ότι $g = 10m/sec^2$.
   (α΄) Δώστε την διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες που μοντελοποιούν την ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή.
   (β΄) Υποθέτοντας ότι η τελική ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή είναι $-50m/sec$ δώστε τον συντελεστής της αντίστασης του αέρα.
   (γ΄) Δώστε την τελική ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή αν αυτός εγκαταλείπει το αεροσκάφος πηδόντας προς τα επάνω με ταχύτητα $1m/sec$.

4. Δώστε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $\overline{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overline{x}$ χρησιμοποιόντας εκθετικές συναρτήσεις, αριθμούς και διανύσματα.

5. Δώστε τις λύσεις της εξίσωσης $y' = 1 - y^2$ που ικανοποιούν την αρχική συνθήκη $y(0) = -1$.

6. Δώστε τον θεμελιώδη πίνακα $F(t)$ της εξίσωσης $\overline{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $F(0) = I$. Εκφράστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας υπερβολικές συναρτήσεις ($\sinh(t) = 1/2(e^t + e^{-t})$, $\cosh(t) = 1/2(e^t - e^{-t})$).

7. Δώστε τις τιμές των a_0, a_1, a_2, a_3 για τις οποίες η σειρά $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ αποτελεί λύση του προβλήματος $\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

8. Δώστε μια λύση της εξίσωσης $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$ τέτοια ώστε $y(1) = 1$ $y'(1) = -1$. (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις* e^t *και* te^t.)

9. Το ανάπτυγμα μιας περιττής συνάρτησης $f(t)$ σε μιγαδική σειρά $Fourier$ στο διάστημα $-\pi < t < \pi$ ορίζεται ως εξής $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$. Δώστε έναν τύπο υπολογισμού των $c_i, i = 1, 2, \ldots$ για κάποια δοθείσα συνάρτηση $f(t)$.(*Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την συνάρτηση* e^{-int})

10. Δώστε την γενική λύση της εξίσωσης $y'' - e^x y' + (e^x - 1)y = 0$. Η τελική σας απάντηση θα περιέχει ένα ολοκλήρωμα που δεν χρειάζεται να υπολογίσετε ή να απλοποιήσετε. (*Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση* $y = e^x u$ *και στην συνέχεια μια ακόμα αντικατάσταση*).