

Επαναληπτική Εξέταση

1. Βρείτε συγκεκριμένες συναρτήσεις  $u(x)$  και  $q(x)$  με  $u(0) = 1$  τέτοιες ώστε οι  $u(x)$  και  $xu(x)$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης  $y'' + 4xy' + q(x)y = 0$ .

2. Είναι η  $u(x, t) = 2x$  λύση του παρακάτω προβλήματος;

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Ποιό συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα 'αντιστοιχεί' στο παρακάτω πρόβλημα;

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u_x(L, t) = 0, \quad u(0, t) = \sin(\omega t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

4. Θεωρούμε δύο άκαμπτες κυλινδρικές ράβδους πολύ μικρής διαμέτρου και μήκους 2 μέτρων. Ψύχουμε την πρώτη στους  $0^\circ$ , θερμαίνουμε την δεύτερη στους  $20^\circ$ , τις ενώνουμε μεταξύ τους ('κολλάμε' τα δύο άκρα τους) και τοποθετούμε τα δύο ελεύθερα άκρα τους σε πάγο. Ποιό είναι το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων;

5. Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση  $x^3$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

όπου  $P(x), Q(x)$  και  $R(x)$  συνεχείς συναρτήσεις τότε  $P(0) = 0$ .

6. Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε  $r \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & r \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$  έχει τουλάχιστον μία μη-τετριμένη λύση η οποία τείνει στο  $\pm\infty$  όταν το  $t$  τείνει στο  $+\infty$ .

7. Λύστε την διαφορική εξίσωση  $(x^2 \ln x) dy + (xy - 1)dx = 0, x > 0$ .

8. Λύστε το πρόβλημα

$$y'' + 4y' + 4y = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^{t-2}, & t \geq 2 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

με μετασχηματισμούς *Laplace*.

9. Λύστε το πρόβλημα

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \pi + 2 \cos(3x) - \pi^2 \cos(10x), \quad 0 < x < \pi,$$

με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

10. Λύστε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} = 4u_{xx} \quad 0 < x < 6, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(6, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x/3, & 0 < x < 3 \\ (6-x)/3, & 3 \leq x < 6 \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 3 < x < 6.$$