

Επαναληπτική Εξέταση 2ης Περιόδου

1. Σωστό ή Λάθος (2 μονάδες) για κάθε επιτυχή επιλογή και (-2 μονάδες) για κάθε εσφαλμένη.
 - (α') Η $yy'' = \cos(t)$ είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.
 - (β') Εάν η *Wronskian* δύο αρκετά ομαλών συναρτήσεων δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα I , τότε οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I .
 - (γ') Η διαφορική εξίσωση $(x+1)y'' - 2y = 0$ έχει δύο λύσεις της μορφής $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$.
 - (δ') Η $y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$.
 - (ε') Εάν $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(t)$ τότε $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$.
2. (35 μονάδες)
 - (α') Αποδείξτε ότι μία συνάρτηση $u(x, t)$ είναι λύση της ΜΔΕ $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ αν και μόνον αν η $v(x, t) = e^{\alpha t}u(x, t)$ είναι λύση της εξίσωσης της θερμότητας $\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
 - (β') Δείτε ότι $\int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}$. Υπολογίστε την λύση του εξής προβλήματος
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad t > 0.$$
 - (γ') Ποιό είναι το $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$; Πώς επηρεάζει την $u(x, t)$ ενδεχόμενη αύξηση της παραμέτρου α ; Τι θα συμβαίνει όταν το α είναι αρνητικό;
3. (12 μονάδες) Διατυπώστε το μοντέλο που διέπει δύο είδη οργανισμών με πληθυσμό $x(t)$ και $y(t)$ οι οποίοι συμβιώνουν στην ίδια περιοχή και αλληλοεξαρτώνται ως εξής
 - Εάν εκλείψει το είδος y ο πληθυσμός του είδους x θα αυξάνει συνεχώς (όσο το επιτρέπουν φυσικά οι διαθέσιμοι πόροι).
 - Εάν εκλείψει το είδος x θα εκλείψει και το είδος y .
 - Τα δύο είδη έχουν συμβιωτική σχέση, δηλαδή το ένα επωφελείται από την ύπαρξη του άλλου.
4. (35 μονάδες) Υπολογίστε τις λύσεις των παρακάτω προβλημάτων και σχολιάστε την συμπεριφορά τους όταν $t \rightarrow \infty$.
 - (α') $u_t = u_x, \quad u(0, x) = f(x)$
 - (β') $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$
 - (γ') $x' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$
5. (12 μονάδες) Εάν $\xi = x^{\alpha}t$ βρείτε μια τιμή του α τέτοια ώστε για κάποια συνάρτηση f , η $\phi = f(\xi)$ να είναι λύση της $\phi_t = \alpha^2 \phi_{xx}$.