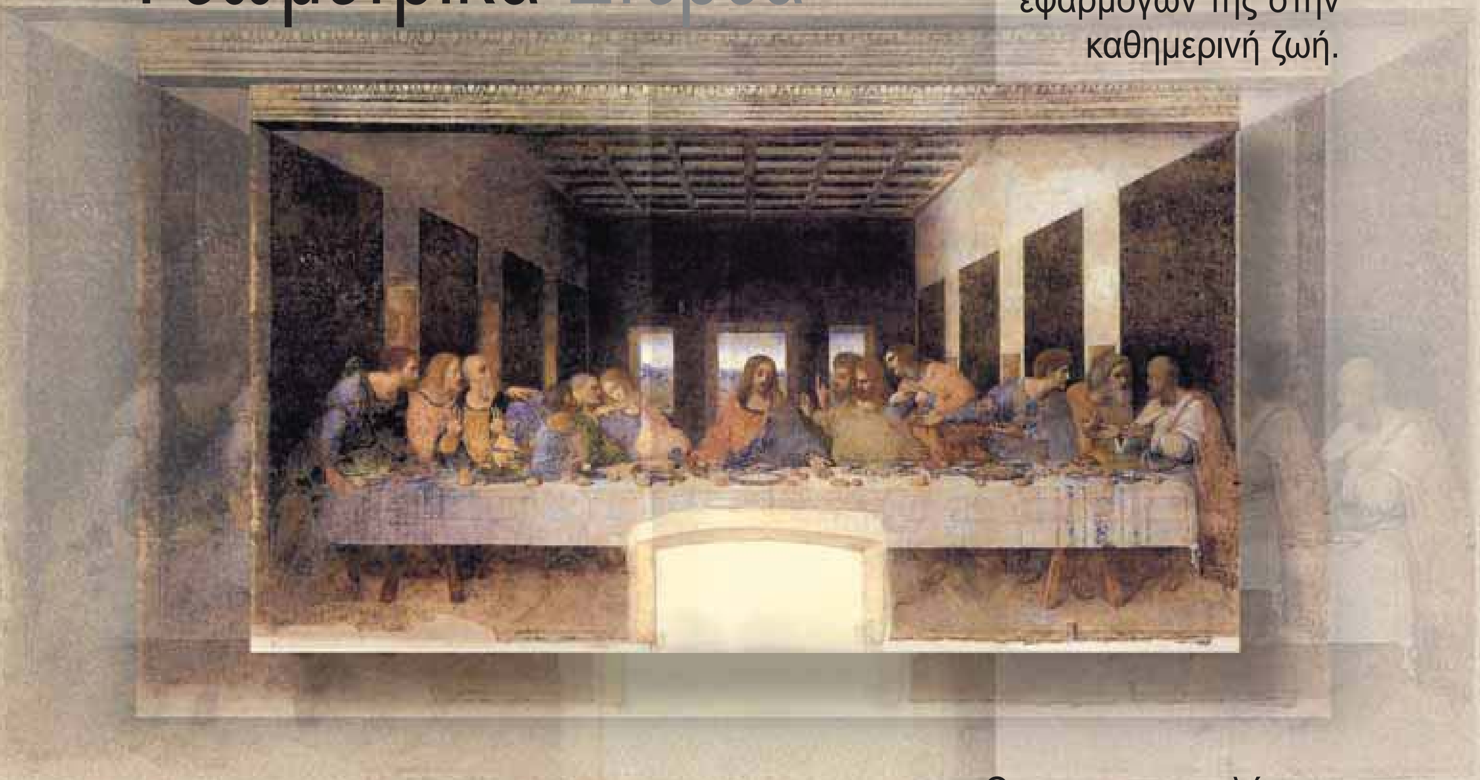
ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Γεωμετρικά Στερεά

Η Γεωμετρία του Χώρου αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια, εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της στην καθημερινή ζωή.

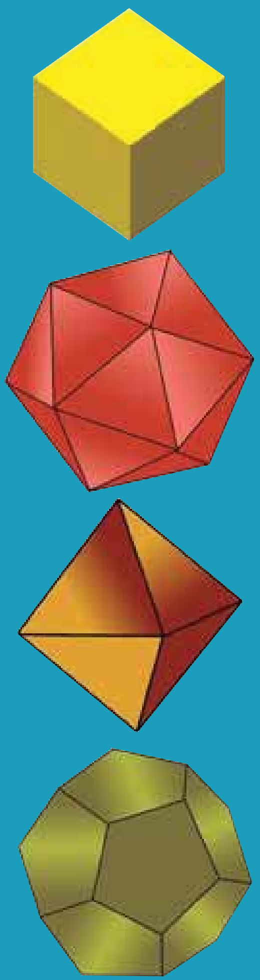


Μέτρηση Στερεών

Θα μας απασχολήσει η μελέτη στερεών σωμάτων, όπως το πρίσμα, ο κύλινδρος, η πυραμίδα, ο κώνος και η σφαίρα. Θα εξετάσουμε τα στοιχεία τους και τη μέτρηση των επιφανειών τους και του όγκου τους

(Στερεομετρία).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Ο Χώρος

Ο φυσικός κόσμος στον οποίο ζούμε και όλα τα άψυχα αντικείμενα, καθώς και τα έμψυχα όντα που μας περιβάλλουν, αποτελούν τον «χώρο».

Τα σχήματα του χώρου διακρίνονται σε επίπεδα και στερεά και αποτελούνται από επιφάνειες, γραμμές και σημεία.

Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις και διακρίνουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, οι γραμμές έχουν μία διάσταση και τα σημεία καμία.

Η Γεωμετρία του χώρου είναι η επιστήμη που μελετά τα στερεά σώματα και τις ιδιότητές τους στον χώρο. Η Στερεομετρία ασχολείται με τη μέτρηση των όγκων των διαφόρων στερεών σχημάτων: των πρισμάτων, των κυλίνδρων, της σφαίρας κ.ο.κ.

Ο χώρος έχει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα. *Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τη σφαίρα και κάποια κανονικά πολύεδρα, αλλά οι Πλατωνιστές ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν εκτεταμένα με τα κανονικά πολύεδρα.*

Το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο ονομάζονται Πλατωνικά Στερεά. Ονομάζονται επίσης και Κοσμικά Στερεά, καθώς στη Φιλοσοφία του Πλάτωνα συμβόλιζαν αντίστοιχα την φωτιά, τη γη, το νερό, τον αέρα και την «πέμπτη ουσία» (quinta essentia).

Η μελέτη του κύβου, του τετράεδρου και του δωδεκάεδρου πρέπει να έγινε από τους Πυθαγόρειους· ο Θεαίτητος μελέτησε το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, ενώ ο Εύδοξος θεμελίωσε τη μέτρησή τους.

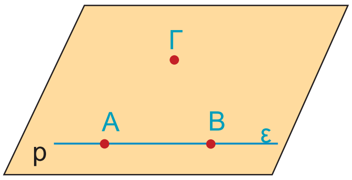
Η Στερεομετρία *αποτελεί σημαντικό μέρος της καθημερινής μας ζωής: από μία απλή παραγγελία ταπετσαρίας για το δωμάτιό μας έως το σχεδιασμό κτιρίων στην Αρχιτεκτονική. Δεν είναι όμως και λίγες οι επιδράσεις της στην Τέχνη: ζωγραφική, γλυπτική κ.ά.*

Η εξαιρετική χρήση της αίσθησης του χώρου μέσα από τη Γεωμετρία έγινε φανερή κατά την Αναγέννηση. Η Αναγέννηση διέθετε δύο βασικά χαρακτηριστικά: την έμφαση στο σχήμα και την έμφαση στο χρώμα. Ο μόνος, ίσως, ζωγράφος που έφθασε στο ανώτατο επίπεδο και στα δύο ήταν ο Leonardo da Vinci, ο οποίος έδωσε στην Επιπεδομετρία και τη Στερεομετρία μια διάσταση άγνωστη στις προηγούμενες γενιές. Ο «Μυστικός Δείπνος» του da Vinci στην εκκλησία Santa Maria della Grazie στο Μιλάνο είναι ένα έξοχο δείγμα της χρήσης των γνώσεων Στερεομετρίας στην Τέχνη και εκπλήσσει με την άμεση αίσθηση του χώρου που δίνει στο θεατή.

Η Γεωμετρία του χώρου *βρίσκει σημαντικές εφαρμογές και σε άλλες επιστήμες. Στη Βιολογία και στην Ιατρική η μελέτη του εγκεφάλου ή και άλλων οργάνων του σώματος γίνεται με έντονη την παρουσία εννοιών της Στερεομετρίας. Στη Χημεία η δομική ταξινόμηση των οργανικών ενώσεων γίνεται με ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων της Στερεομετρίας. Στη Σεισμολογία, οι προσομοιώσεις των κινήσεων των τεκτονικών πλακών ακολουθούν «γεωμετρικούς κανόνες» στο χώρο.*

Οι εφαρμογές της Γεωμετρίας του Χώρου είναι πολλές αναδεικνύοντας τη γνώση της Στερεομετρίας σε ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής μας ζωής, της Τέχνης και της Επιστήμης.

4.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο



Ευθείες και Επίπεδα

Οι πρωταρχικές έννοιες του χώρου - γνωστές ήδη από την εμπειρία μας - είναι το **σημείο**, η **ευθεία** και το **επίπεδο**.

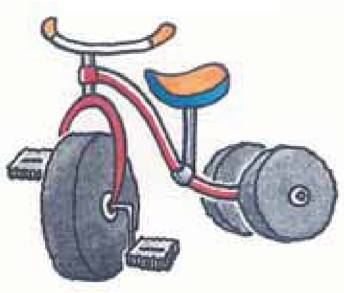
Τα επίπεδα τα έχουμε συνδέσει στο φυσικό κόσμο με την αίσθηση των επιφανειών.

Η επιφάνεια του μαυροπίνακα, ενός λείου πατώματος, ενός καθρέπτη μάς δίνουν την αίσθηση του επιπέδου.

Ωστόσο, το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα και για να το παραστήσουμε, σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο για να χωράει στην επιφάνεια του χαρτιού. Το ονομάζουμε, επίσης μ' ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου (p, q, r).

Μία ευθεία **ε** ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δύο σημεία **Α** και **Β**. Αν θεωρήσουμε ένα τρίτο σημείο **Γ** που δεν ανήκει στην ευθεία **ε**, τότε τα τρία αυτά σημεία **Α**, **Β**, και **Γ** ορίζουν ένα επίπεδο **p**. Προφανώς, η ευθεία **ε** και το σημείο **Γ** ορίζουν το ίδιο επίπεδο.

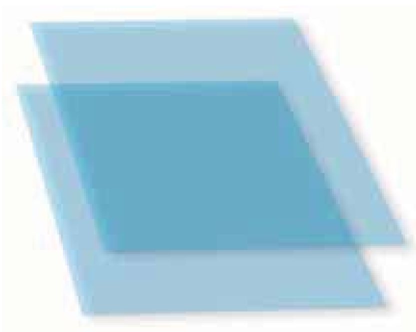
Γι' αυτό ακριβώς το λόγο, οι φωτογράφοι για μεγαλύτερη σταθερότητα στηρίζουν τις φωτογραφικές μηχανές τους σε τρίποδο και έτσι εξηγείται η τρίτη ρόδα στα ποδήλατα των μικρών παιδιών.



Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

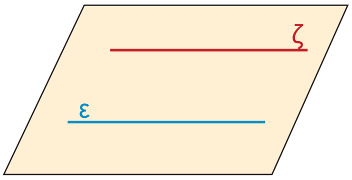
Σε ένα κλειστό βιβλίο οι δύο επιφάνειες που ορίζουν τα εξώφυλλά του, μας δίνουν την αίσθηση ότι όσο και αν τις προεκτείνουμε, δεν τέμνονται ποτέ.

Τα δύο επίπεδα που δημιουργούνται έτσι, λέγονται **παράλληλα**.



Αν τώρα ανοίξουμε το βιβλίο, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο επίπεδα που τα κοινά τους σημεία ανήκουν σε μια ευθεία. Λέμε, τότε, ότι τα επίπεδα τέμνονται.

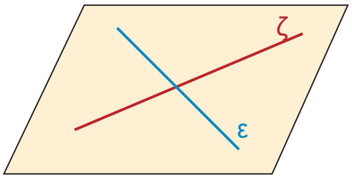
Η ευθεία αυτή λέγεται **τομή** των δύο επιπέδων.



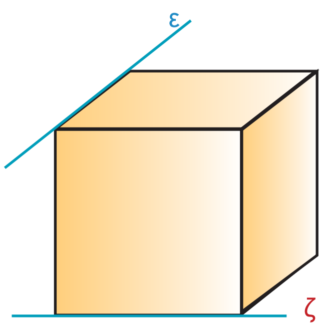
Επομένως:

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:
- **Να είναι παράλληλα.**
- **Να τέμνονται κατά μία ευθεία.**

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο



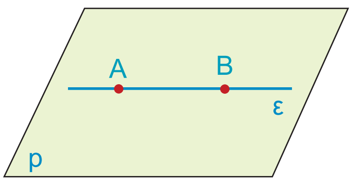
Γνωρίζουμε ότι δύο διαφορετικές ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούν να είναι παράλληλες ή να τέμνονται.
Όμως, όπως φαίνεται στον διπλανό κύβο, υπάρχουν ευθείες στο χώρο που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμβατες**.



Επομένως:

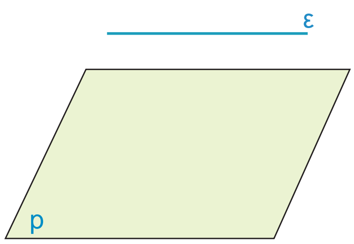
Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες **ε** και **ζ**, οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:
- **Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**
- **Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**
- **Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

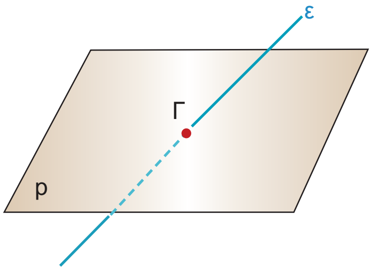


Όπως ξέρουμε, από δύο σημεία ορίζεται μοναδική ευθεία. Όταν τα σημεία αυτά ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει στο επίπεδο αυτό.

Η ευθεία αυτή λέγεται **ευθεία του επιπέδου**.



Αν μια ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε είναι **παράλληλη** στο επίπεδο αυτό.



Είναι, όμως, δυνατό μια ευθεία να τέμνει ένα επίπεδο μόνο σε ένα σημείο. Το σημείο Γ ονομάζεται **ίχνος της ε** στο επίπεδο **p**.

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

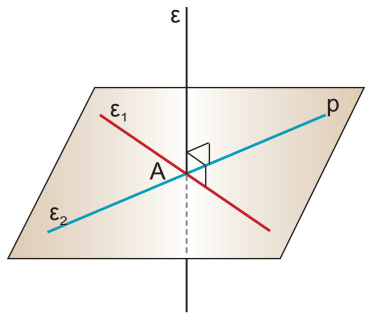
- **Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.**
- **Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.**
- **Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.**

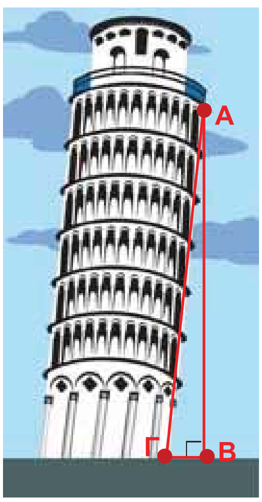
Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία **ε** που τέμνει το επίπεδο **p** στο σημείο **A**. Αν η **ε** είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου **p**, που διέρχεται από το σημείο **A**, τότε θα λέμε ότι η ευθεία **ε** είναι κάθετη στο επίπεδο **p**.

Αποδεικνύεται ότι:

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

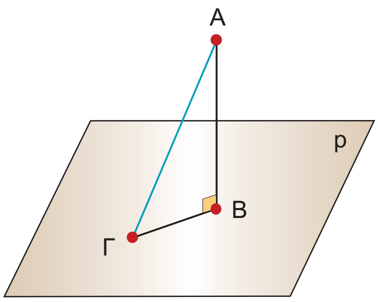




Απόσταση σημείου από επίπεδο

Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από την κορυφή **A** του κεκλιμένου πύργου της Πίζας, θα παρατηρήσουμε ότι διαγράφει τροχιά κάθετη προς το έδαφος. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **AB**, που φέρουμε προς το επίπεδο **p** από ένα σημείο **A** που δεν ανήκει στο επίπεδο, λέγεται **απόσταση** του σημείου **A** από το επίπεδο **p**.

Παρατηρούμε ότι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **AB** είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα **AΓ**.



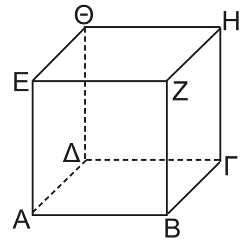
Απόσταση παράλληλων επιπέδων

Η **επιφάνεια p** του τραπεζιού ορίζει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο **q** του δαπέδου. Το **ύψος** του τραπεζιού εκφράζει την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου του τραπεζιού p από το επίπεδο του δαπέδου q.

Η απόσταση αυτή ονομάζεται **απόσταση των παράλληλων επιπέδων** p και q.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

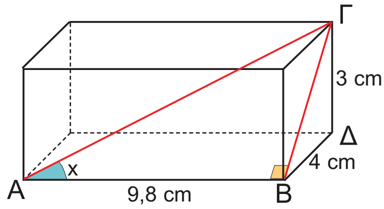
Στον κύβο ΑΒΓΔΕΖΗΘ του διπλανού σχήματος να βρείτε τις ευθείες των ακμών του που είναι ασύμβατες στη ακμή ΑΒ.



Λύση: Είναι οι ευθείες ΔΘ, ΘΕ, ΗΖ, ΗΓ, γιατί τέμνουν τα επίπεδα στα οποία ανήκει η ΑΒ χωρίς να τέμνουν την ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) τη ΒΓ β) τη γωνία $x = \hat{ΒΑΓ}$.



Λύση: α) Η ΒΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΔΓ έχουμε:
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα υπολογίσουμε τη εφαπτομένη της γωνίας x.
Είναι λοιπόν $εφx = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, οπότε $εφx = \frac{5}{9,8} = 0,51$ και από τον πίνακα εφαπτο-μένων βρίσκουμε ότι $x = 27°$.

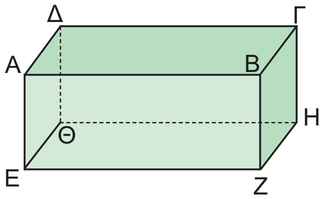
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

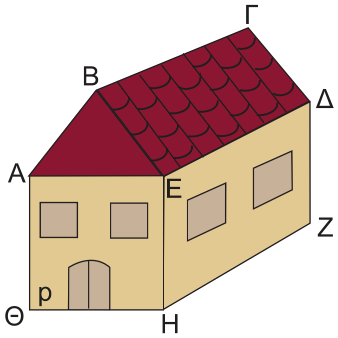
1. Μια ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο, αν είναι παράλληλη σε μια ευθεία του επιπέδου.
2. Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη σε μια ευθεία του επιπέδου.
3. Μια ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, όταν δύο σημεία της είναι και σημεία του επιπέδου.
4. Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα.
5. Κάθε ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, τέμνει το επίπεδο αυτό.
6. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
7. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο p, τότε είναι κάθετη σε κάθε άλλο επίπεδο που είναι παράλληλο στο p.
8. Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται:
   Α: Δύο επίπεδα **Β:** Μόνο ένα επίπεδο **Γ:** Άπειρα επίπεδα
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
9. Πόσα επίπεδα διέρχονται από μια ευθεία;
   Α: Ένα **Β:** Δύο **Γ:** Τρία **Δ:** Άπειρα
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

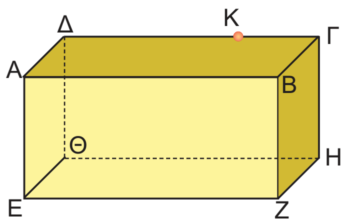
1 Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι:
α) κάθετες στην ΑΕ.
β) παράλληλες στην ΑΒ.
γ) ασύμβατες με την ΔΓ.



2 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε επίπεδα τα οποία:
α) είναι παράλληλα με το επίπεδο p.
β) τέμνουν το επίπεδο p. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την κοινή τους ευθεία.

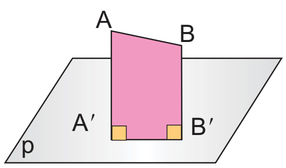


3 Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

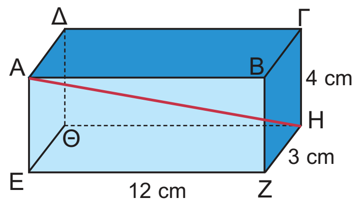


α) Να σχεδιάσετε το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία Α, Δ, Ζ.
β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στην κάτω έδρα του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

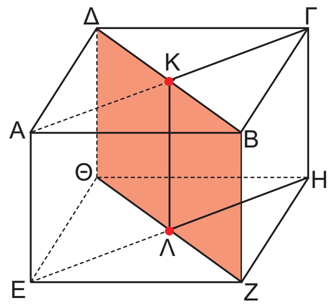
4 Οι αποστάσεις των σημείων Α,Β από το επίπεδο p είναι ΑΑ′=20, ΒΒ′=14. Αν Α′Β′=8, να υπολογίσετε το ΑΒ.



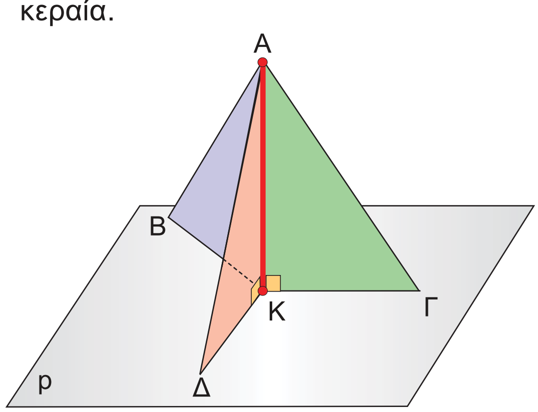
5 Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



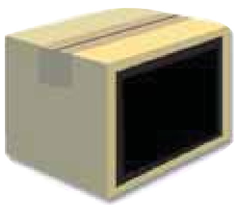
6 Ο παρακάτω κύβος έχει ακμή 12 cm.
α) Να εξηγήσετε γιατί η ΗΓ και η ΛΚ είναι κάθετες στην έδρα ΑΒΓΔ του κύβου.
β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο.

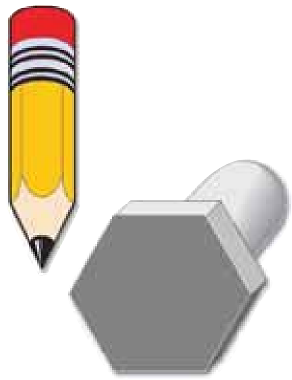


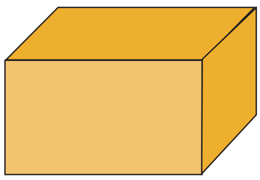
7 Η κεραία ΑΚ του σχήματος, ύψους 12m, είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους. Συγκρατείται με τρία συρματόσχοινα που στερεώνονται στην κορυφή της και στα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν 5 m από το Κ.
Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος των συρματόσχοινων που συγκρατούν την κεραία.



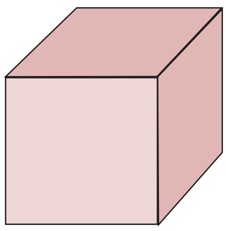
4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου







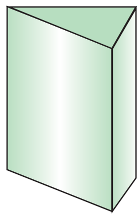
ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



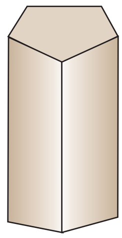
κύβος

Το ορθό πρίσμα και τα στοιχεία του

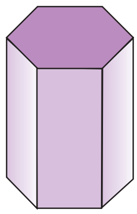
Στο φυσικό κόσμο τα αντικείμενα των διπλανών σχημάτων μάς δίνουν την έννοια του ορθού πρίσματος.
Στη Στερεομετρία τα παρακάτω στερεά σώματα ονομάζονται **ορθά πρίσματα**. Στη συνέχεια, τα ορθά πρίσματα θα τα λέμε απλά **πρίσματα**.



τριγωνικό πρίσμα



πενταγωνικό πρίσμα



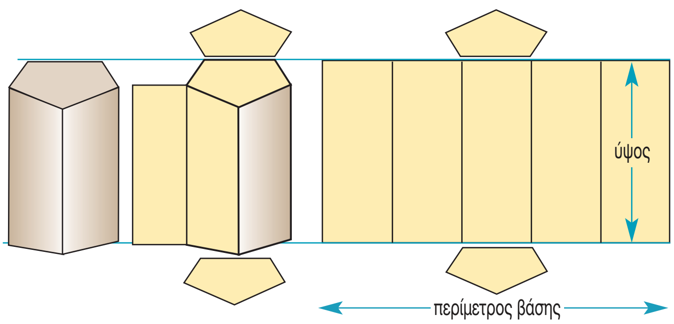
εξαγωνικό πρίσμα

Κάθε πρίσμα έχει:
δύο έδρες παράλληλες, που είναι ίσα πολύγωνα και τις άλλες έδρες του που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**.
Οι δύο παράλληλες έδρες του λέγονται **βάσεις** του πρίσματος.
Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την **παράπλευρη επιφάνεια** του πρίσματος. Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.
Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του πρίσματος.
Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ.

Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη διαδικασία ανάπτυξης και το τελικό ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος. Ως ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος θεωρούμε το επίπεδο σχήμα που προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» την παράπλευρη επιφάνειά του και τις βάσεις του.
Η παράπλευρη επιφάνεια σχηματίζει ένα ορθογώνιο, που η μία διάστασή του είναι η περίμετρος της βάσης και η άλλη το ύψος του πρίσματος.



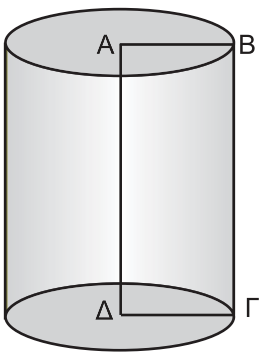
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_\pi = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Φυσικά, για να βρούμε το **ολικό εμβαδόν,** πρέπει να προσθέσουμε και τα εμβαδά των δύο βάσεων.

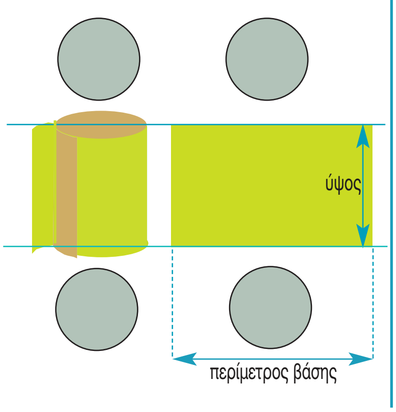
Το ολικό εμβαδόν ενός πρίσματος ($E_{ολ}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας E_π και των εμβαδών E_β των δύο βάσεων.

Δηλαδή: $E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta$



Ένας κύλινδρος μπορεί να προκύψει και από την περιστροφή ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω από μια πλευρά του, π.χ. την ΑΔ, και τότε λέγεται κύλινδρος εκ περιστροφής.

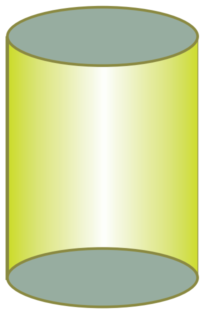
Η πλευρά ΒΓ λέγεται γενέτειρα του κυλίνδρου και ισούται με το ύψος του.



Κύλινδρος

Τα παρακάτω στερεά δίνουν την έννοια του κυλίνδρου.

Ένας κύλινδρος αποτελείται από δυό ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι βάσεις του, και την παράπλευρη επιφάνεια, που, αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.



Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.

Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου.

Είναι φανερό ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, οπότε ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του κυλίνδρου.

Η περίμετρος της βάσης ισούται με το μήκος του κύκλου, δηλαδή $2\pi\rho$.

Το εμβαδόν E_π της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με 2πρ) επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή

$$E_\pi = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) \text{ ή } E_\pi = 2\pi\rho \cdot \upsilon$$

Φυσικά, για να βρούμε το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου, πρέπει στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας να προσθέσουμε τα εμβαδά των δύο βάσεων.

Το ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_π και τα εμβαδά E_β των δύο βάσεων. Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta$$

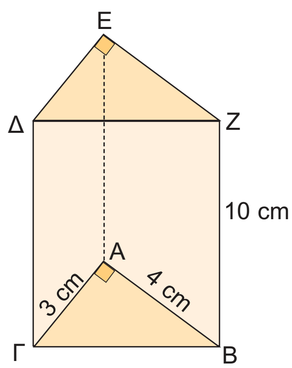
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm²) χρειάζεται, για να κατασκευαστεί το πρίσμα του παρακάτω σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.

Λύση: Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm.
Η υποτείνουσα ΒΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm). Επομένως:

$$E_\beta = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2).$$

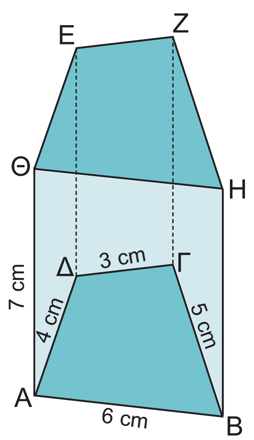
E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = 12 · 10 = 120 (cm²).
$E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta = 120 + 2 \cdot 6 = 132$ (cm²).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

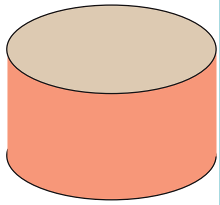
Να υπολογιστεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που δίνεται στο διπλανό σχήμα.

Λύση: Οι βάσεις του πρίσματος είναι τετράπλευρα με περίμετρο: 3 + 4 + 6 + 5 = 18 (cm).
Το ύψος του πρίσματος είναι 7 cm. Άρα, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:
E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = 18 · 7 = 126 (cm²).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κόστος δεξαμενής καυσίμων



Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 20 m και ακτίνα βάσης ρ = 30 m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει 5 € το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

Λύση: Πρέπει να βρούμε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας χρησιμοποιήθηκαν (δηλαδή το ολικό εμβαδόν) και να το πολλαπλασιάσουμε με το κόστος 5 € ανά τετραγωνικό μέτρο.

- Η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν:

  E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)

  $= 2\pi\rho \cdot υ = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cdot 20 = 3768$ (m^2).
- Καθεμία από τις βάσεις έχει εμβαδόν: $E_\beta = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 30^2 = 2826$ (m^2).
- Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι:

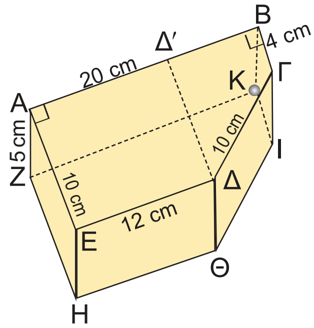
  $E_{ολ} = E_\pi + 2 \cdot E_\beta = 3768 + 2 \cdot 2826 = 9420$ (m^2).

Επομένως, το κόστος της λαμαρίνας είναι $9420 \cdot 5 = 47100$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Η βάση της μηχανής

Το διπλανό κλειστό κουτί κατασκευάζεται από ξύλο και χρησιμεύει ως βάση μιας μηχανής. Να βρείτε την επιφάνεια του ξύλου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της βάσης.



Λύση: Παρατηρούμε ότι το κουτί είναι ένα πενταγωνικό πρίσμα με βάσεις τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΙΚ.

Η περίμετρος της κάθε βάσης είναι:

ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ = 20 + 4 + 10 + 12 + 10 = 56 (cm).

Το ύψος του πρίσματος είναι υ = ΑΖ = 5 (cm).

Επομένως, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = $56 \cdot 5 = 280$ (cm^2).

Για να βρούμε το εμβαδόν της βάσης ΑΒΓΔΕ, τη χωρίζουμε σε δύο μέρη: σε ένα ορθογώνιο ΑΕΔΔ′ και σε ένα τραπέζιο ΒΓΔΔ′. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΔΔ′ είναι ίσο με $10 \cdot 12 = 120$ (cm^2). Το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΓΔΔ′ είναι ίσο με:

$$E_{τρ} = \frac{1}{2}(\beta + B) \cdot υ = \frac{1}{2}(4 + 10) \cdot 8 = 56 \ (cm^2).$$

Άρα, το εμβαδόν της βάσης είναι: $E_\beta = 120 + 56 = 176$ (cm^2).

Το ολικό εμβαδόν του πρίσματος είναι:

$$E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta = 280 + 2 \cdot 176 = 280 + 352 = 632 \ (cm^2).$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Ένα πρίσμα με βάση πεντάγωνο έχει:

α) Α: 5 έδρες   Β: 6 έδρες   Γ: 7 έδρες.

β) Α: 8 κορυφές   Β: 10 κορυφές   Γ: 12 κορυφές.

γ) Α: 10 ακμές   Β: 15 ακμές   Γ: 12 ακμές.

2. Δίνεται πρίσμα με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και ύψους 8cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 400 cm^2 Β: 320 cm^2 Γ: 800 cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 600 cm^2 Β: 520 cm^2 Γ: 800 cm^2.

3. Ένας κύλινδρος έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 8cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 40π cm^2 Β: 60π cm^2 Γ: 80π cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 100π cm^2 Β: 110π cm^2 Γ: 130π cm^2.

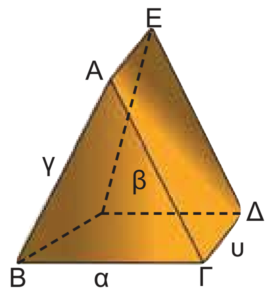
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται η περίμετρος της βάσης, το ύψος και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος.

περίμετρος βάσης	8	7		5	
ύψος υ	5		6		10
Εμβαδόν Επ		70	24	14	5

2 Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας τριγωνικού πρίσματος του οποίου η βάση είναι τρίγωνο με πλευρές α = 3 dm, β = 5 dm, γ = 6 dm και το ύψος 0,8 cm.

3 Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών της βάσης ενός τριγωνικού πρίσματος, υ το ύψος του και $E_π$ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.



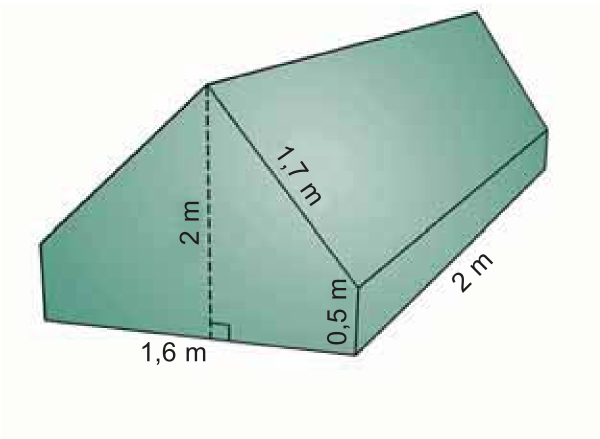
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

α	2	3	2	3	
β	3	5	5		2
γ	4	2		5	2
υ	5		4	8	5
$E_π$		40	80	80	45

4 Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις:
πλάτος 4 m, μήκος 5 m και ύψος 3 m. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώματος καλύπτει περίπου 9 m^2;

5 Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν πρίσματος με ύψος υ = 20 cm και βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm.

6 Η σκηνή ενός κάμπινγκ είναι κατασκευασμένη από ύφασμα (μαζί με το δάπεδό της) και έχει διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάστηκαν για την κατασκευή της;



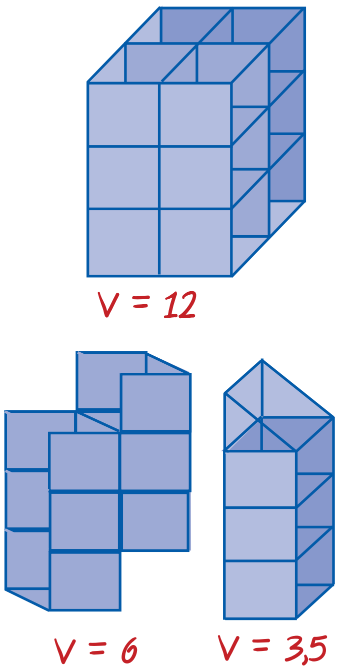
7 Να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm.
β) Έχει διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 6 cm.
γ) Έχει περίμετρο βάσης 15,7 cm και ύψος 32 cm.
δ) Έχει εμβαδόν βάσης 50,24 cm^2 και ύψος 2 dm.

8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που συνδέει την ακτίνα της βάσης και το ύψος ενός κυλίνδρου με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν του.

ακτίνα βάσης (cm)	3	2			1
ύψος κυλίνδρου (cm)	5		1		
εμβαδόν $E_π$ (cm^2)		50,4	62,8	125,6	
ολικό εμβαδόν (cm^2)				753,6	62,8

9 Το κυλινδρικό κουτί μιας κονσέρβας έχει ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 3 cm. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 0,5 € το τετραγωνικό μέτρο, ενώ το υλικό της παράπλευρης επιφάνειας κοστίζει 0,3 € το τετραγωνικό μέτρο.
Πόσο θα κοστίζει το υλικό όταν πρόκειται να κατασκευάσουμε 1000 κουτιά;

4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου



Η έννοια του όγκου

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρους του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ, λέγεται **όγκος** του σώματος.

Μονάδες μέτρησης όγκου

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m).

Ο όγκος του ισούται με 1 κυβικό μέτρο (m^3).

Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1 dm.

Αφού 1m =10 dm, θα ισχύει ότι:

$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 1000\ dm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1\ dm^3 = \frac{1}{1000} m^3 = 0{,}001\ m^3$.

β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1cm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm, οπότε

$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1\ cm^3 = \frac{1}{1000} dm^3 = \frac{1}{1000000} m^3$.

γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1mm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm= 1000 mm, οπότε $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3 = 1000^3\ mm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι:

$$1mm^3 = \frac{1}{1000} cm^3 = \frac{1}{1000000} dm^3 = \frac{1}{1000000000} m^3$$

Στον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 ως λίτρο (ℓ). Τότε, το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο ($m\ell$).

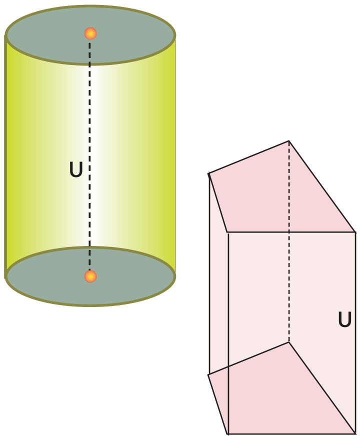
Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε μια σύριγγα γεμάτη χρωματισμένο νερό.

Ασκώντας πίεση, το έμβολο διαγράφει το μήκος της σύριγγας έως ότου αδειάσει όλο το νερό.

Είναι φανερό ότι το νερό έχει όγκο ίσο με τον όγκο της κυλινδρικής σύριγγας.

Ο όγκος της σύριγγας διαγράφεται από την κίνηση του εμβαδού του εμβόλου σε όλο το μήκος της.



Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

Είναι φανερό ότι το ίδιο θα ισχύει, αν στη θέση της κυλινδρικής σύριγγας έχουμε ένα οποιοδήποτε πρίσμα.

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) με ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm,
β) με διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 4 cm,
γ) με περίμετρο βάσης 31,4 cm και ύψος 3 cm.

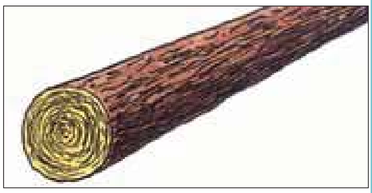
Λύση: α) Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου V του κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 3^2 \cdot 5 = 45π = 141{,}3$ (cm^3).

β) Αφού η διάμετρος είναι δ = 4 cm, η ακτίνα είναι ρ = 2 cm.
Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 2^2 \cdot 4 = 16π = 50{,}24$ (cm^3).

γ) Πρώτα υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της βάσης:
$L = 2πρ$ ή
$31{,}4 = 2π \cdot ρ$ ή
$31{,}4 = 6{,}28 \cdot ρ$ ή
$ρ = 5$ (cm).
Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 5^2 \cdot 3 = 75π = 235{,}5$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο διπλανός κορμός δέντρου θεωρούμενος ως κύλινδρος έχει μήκος 8 m και διάμετρο βάσης 0,6 m. Η τιμή του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € ανά κυβικό μέτρο. Πόσο αξίζει ο κορμός;



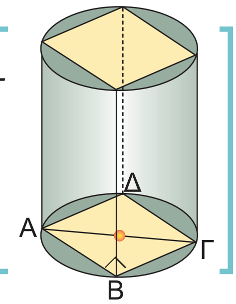
Λύση: Αφού η διάμετρος του κορμού είναι δ = 0,6 m, τότε η ακτίνα του κύκλου της βάσης του κυλίνδρου είναι ρ = 0,3 (m).
Επομένως, ο όγκος του κυλίνδρου είναι:
$V_Κ = πρ^2 \cdot υ = 3{,}14 \cdot (0{,}3)^2 \cdot 8 = 2{,}26$ (m^3).
Αφού η αξία του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € το κυβικό μέτρο, η αξία του κορμού είναι: $Α = 2{,}26 \cdot 100 = 226$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς α (cm) και είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο με ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης ρ = 3 cm.

α) Να υπολογίσετε τη πλευρά α του τετραγώνου.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου και τον όγκο του πρίσματος.



Λύση: α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα ΑΓ = 2 · ρ = 2· 3 = 6 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$α^2 + α^2 = 6^2$ ή $2α^2 = 36$ ή $α^2 = 18$.
Άρα: $α = \sqrt{18} = 4,24$ (cm).

β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V_{κυλ} = πρ^2υ = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 10 = 282,6$ (cm^2).
Ο όγκος του πρίσματος είναι:
$V_{πρ} = E_β \cdot υ = α^2 \cdot υ = 18 \cdot 10 = 180$ (cm^2).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος πρίσματος.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	12	8	
ύψος (cm)	3		6
όγκος (cm^3)		56	30

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος κυλίνδρου.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	22	9	
ύψος (cm)	4		6
όγκος (cm^3)		72	120

3. Δίνονται τέσσερις κύλινδροι που έχουν όλοι ακτίνα βάσης ρ=4 cm. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	1ος Κύλινδρος	2ος Κύλινδρος	3ος Κύλινδρος	4ος Κύλινδρος
ύψος κυλίνδρου υ	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_π$				
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$				
όγκος V				

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm έχει ύψος ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του,
γ) τον όγκο του πρίσματος.

2 Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι τετραπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν 432 cm^2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

3 Ένα τετραγωνικό πρίσμα έχει ολικό εμβαδόν που είναι τριπλάσιο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειάς του.
Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης του είναι τετραπλάσια από το ύψος του πρίσματος.

4 Ένα πρίσμα έχει βάση ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, με ίσες πλευρές ΑΔ = ΒΓ = 5 cm. Το ύψος του τραπεζίου είναι 3 cm και το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Αν ο όγκος του πρίσματος είναι 180 cm^3 και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 220 cm^2, να βρείτε:
α) το εμβαδόν και την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ,
β) τα μήκη των βάσεων ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

5 Λυγίζουμε ένα φύλλο χαρτιού μεγέθους Α4 (21x29cm) και κατασκευάζουμε έναν κύλινδρο ύψους 21cm.
Να βρείτε την ακτίνα βάσης και τον όγκο του κυλίνδρου.

6 Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου ο οποίος έχει:
α) ακτίνα βάσης 10 cm και ύψος 1,2 cm.
β) εμβαδόν βάσης 100 mm^2 και ύψος 0,2 m.

7 Ένα τσιγάρο έχει μήκος 8,5 cm από τα οποία τα 2,5 cm καταλαμβάνει το φίλτρο. Η διάμετρος μιας βάσης του είναι 0,8 cm. Οι αναλύσεις του Υπουργείου Υγείας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι περιέχει 0,5 mg πίσσας ανά κυβικό εκατοστό καπνού και ότι το τσιγαρόχαρτο περιέχει 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού.
Πόσα mg πίσσας εισπνέει ημερησίως ένας καπνιστής που καπνίζει 15 τσιγάρα την ημέρα;
(Να θεωρήσετε ότι ο καπνιστής πετάει το τσιγάρο έχοντας καπνίσει τα 5 από τα 6 cm του τσιγάρου).

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι έκτιζαν μνημεία με τη μορφή πυραμίδας.

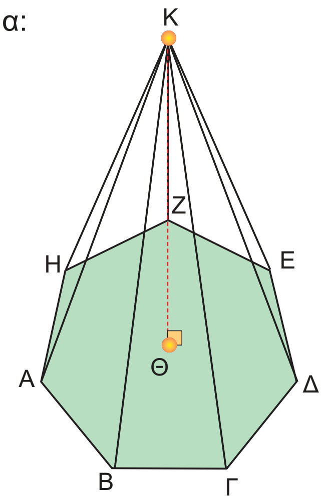
Οι τάφοι των βασιλέων της αρχαίας Αιγύπτου είχαν τη γνωστή σ' εμάς μορφή της πυραμίδας.

Οι Αζτέκοι και οι Ίνκας είχαν χτίσει, επίσης, ναούς στο σχήμα πυραμίδας, αρκετοί από τους οποίους σώζονται μέχρι σήμερα.

Στην είσοδο του μουσείου του Λούβρου, στο Παρίσι, υπάρχει μια σύγχρονη πυραμίδα που σχεδιάστηκε το 1989 από τον αρχιτέκτονα Γιέο Μιγκ Πέι.

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Για παράδειγμα, μια πυραμίδα με μια έδρα το επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Τα στοιχεία της πυραμίδας

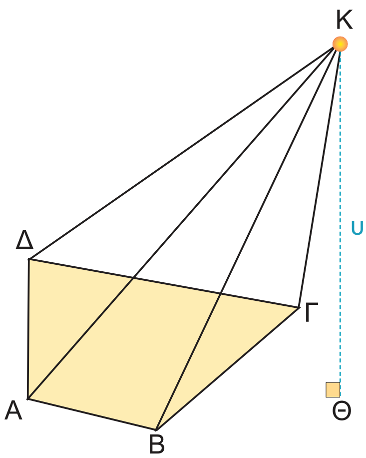
- Το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ λέγεται **βάση** της πυραμίδας.

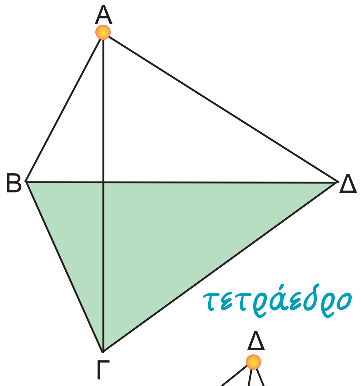
- Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ: ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΗ και ΚΗΑ λέγονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.

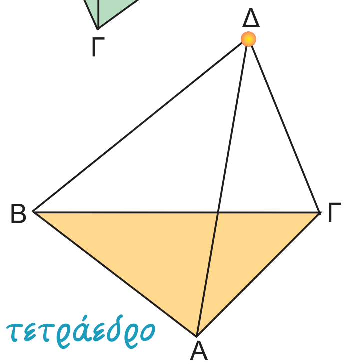
- Το κοινό σημείο Κ των παράπλευρων εδρών λέγεται **κορυφή** της πυραμίδας.

- Αν από την κορυφή Κ φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΚΘ προς τη βάση, τότε το ΚΘ λέγεται **ύψος** της πυραμίδας.
  Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας.

- Μια πυραμίδα που έχει ως βάση ένα τρίγωνο, λέγεται **τριγωνική πυραμίδα**.

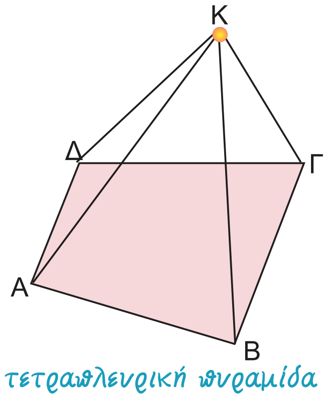


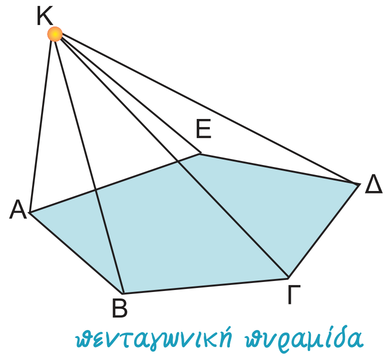




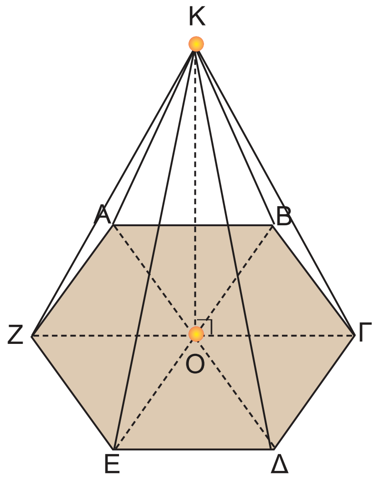
Επειδή όμως η τριγωνική πυραμίδα έχει τέσσερις τριγωνικές έδρες και οποιαδήποτε έδρα της μπορεί να θεωρηθεί ως βάση, τη λέμε και **τετράεδρο**.

- Μια πυραμίδα που έχει βάση τετράπλευρο λέγεται **τετραπλευρική**.
- Μια πυραμίδα που έχει βάση πεντάγωνο λέγεται **πενταγωνική** κ.ο.κ.





Κανονική πυραμίδα

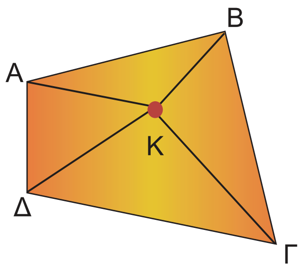


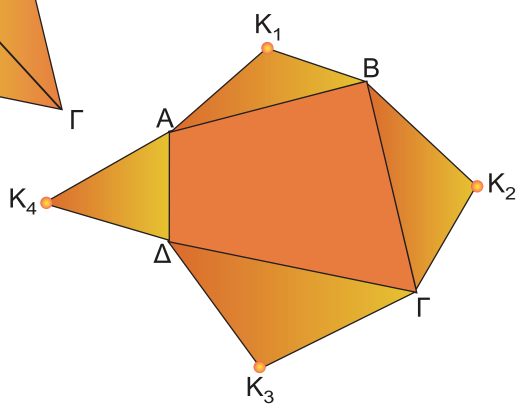
- Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα (ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΑ).

  Αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες μίας πυραμίδας είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

Εμβαδόν επιφάνειας πυραμίδας

Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την επιφάνεια της βάσης της.





Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_Π$ μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά.

Επομένως, στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$E_Π = (K_1AB) + (K_2BΓ) + (K_3ΓΔ) + (K_4ΔA)$.

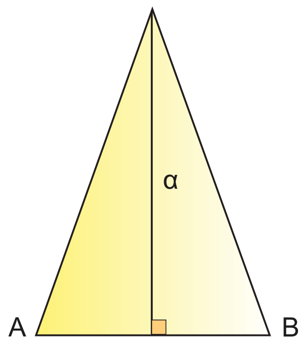
Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{ολ}$ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης $E_β$.

$$E_{ολ} = E_Π + E_β$$

Στο προηγούμενο σχήμα έχουμε ότι:

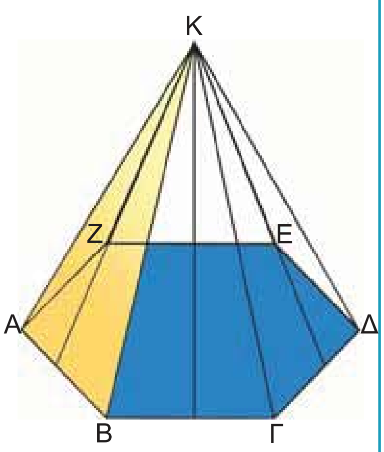
$E_{ολ} = E_Π + E_β = (K_1AB) + (K_2BΓ) + (K_3ΓΔ) + (K_4ΔA) + (ABΓΔ)$.

Εμβαδόν επιφάνειας κανονικής πυραμίδας



Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται **απόστημα** της κανονικής πυραμίδας.

Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας:



$E_Π = (KAB) + (KBΓ) + (KΓΔ) + (KΔE) + (KEZ) + (KZA) = 6(KAB)$.

Άρα: $E_Π = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot α = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot AB) \cdot α$.

Όμως, η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου ισούται με $6 \cdot AB$.

Τελικά, καταλήγουμε ότι:

$E_Π = \frac{1}{2}$ (περίμετρος εξαγώνου) · απόστημα.

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τελικά για κάθε κανονική πυραμίδα:

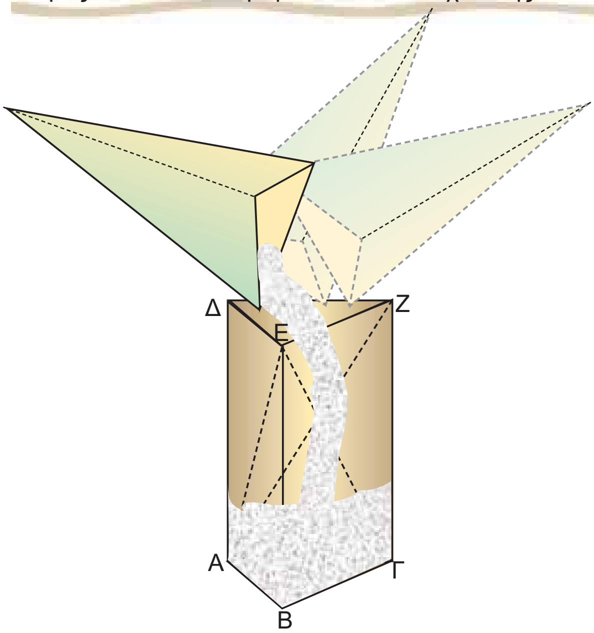
$$E_Π = \frac{1}{2}\ (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot \text{απόστημα}$$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας, αρκεί να προσθέσουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $E_Π$ και το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου, που αποτελεί τη βάση της κανονικής πυραμίδας.

Όγκος πυραμίδας

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα, έτσι ώστε να έχουν βάσεις ίσα τρίγωνα και ίσα ύψη.

Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με αλεύρι την πυραμίδα και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως. Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικότερα.



Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του πρίσματος.

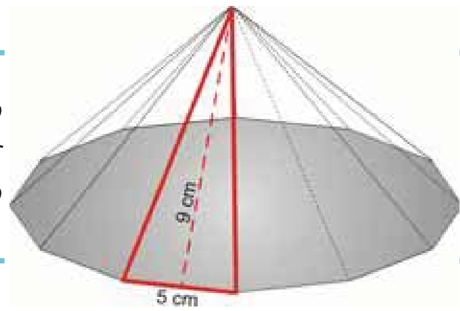
Ο όγκος V της πυραμίδας ισούται με:

$V = \frac{1}{3}$ (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

Ο ίδιος τύπος ισχύει για τον όγκο μιας πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση κανονικό δωδεκάγωνο με πλευρά 5 cm. Αν το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 9 cm, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.



Λύση: Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$E_\pi = \frac{1}{2}$ · (περίμετρος βάσης) · (απόστημα).

Η περίμετρος της βάσης είναι: 12 · 5 = 60 (cm) και το απόστημα 9 cm.

Άρα: $E_\pi = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 9 = 270$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

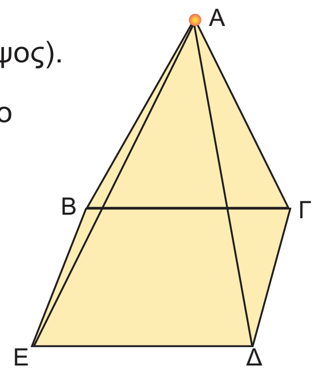
Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8 cm και ύψος 12 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση: Ο όγκος της πυραμίδας είναι: $V = \frac{1}{3}$ · (εμβαδόν βάσης) · (ύψος).

Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι:

$E_\beta = 8^2 = 64$ (cm^2).

Επομένως, $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256$ (cm^3).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

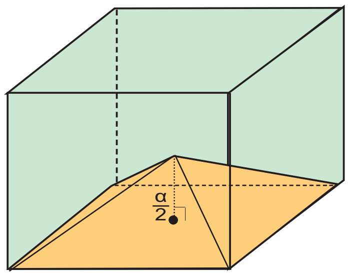
Από έναν κύβο που έχει ακμή α = 10 cm, αφαιρούμε μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει.

Λύση: Ο όγκος V του στερεού που απομένει, θα βρεθεί, αν από τον όγκο V_K του κύβου αφαιρέσουμε τον όγκο V_Π της πυραμίδας. Έχουμε ότι:

$V_K = α^3 = 10^3 = 1000$ (cm³)

$$V_\Pi = \frac{1}{3}E_β \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot α^2 \cdot \frac{α}{2} = \frac{1}{6} \cdot α^3 = \frac{1000}{6} = 166{,}67 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Άρα: $V = V_K - V_\Pi = 1000 - 166{,}67 = 833{,}33$ (cm³).



$\frac{α}{2}$ ύψος της πυραμίδας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

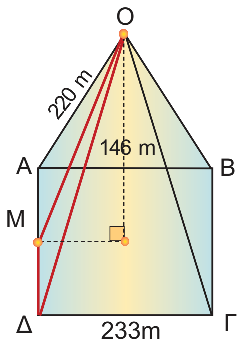
Λύση: α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας δίνεται από τον τύπο: $E_\Pi = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα).

Για να υπολογίσουμε το απόστημα ΟΜ της πυραμίδας, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΜΔ:

$ΟΜ^2 = ΟΔ^2 - ΔΜ^2$, δηλαδή

$ΟΜ^2 = 220^2 - 116{,}5^2 = 34827{,}75$.

Οπότε: ΟΜ = 186,62 m.



Άρα: $E_π = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα)

$= \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 233) \cdot 186{,}62 =$

$= \frac{1}{2} 932 \cdot 186{,}62 = 86964{,}92$ (m²).

β) Ο όγκος είναι: $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης) · (ύψος), με εμβαδόν βάσης:

$E_β = 233^2 = 54289$ (m²).

Επομένως: $V = \frac{1}{3} \cdot 54289 \cdot 146 = 2642064{,}6$ (m³).

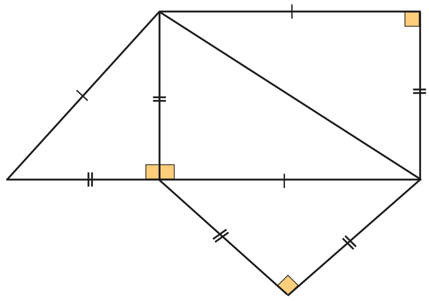
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών.

2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο.

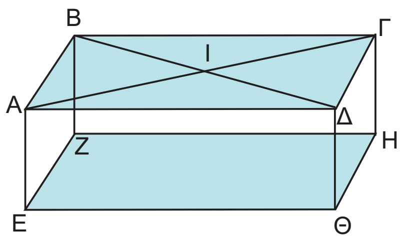
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ανάπτυγμα πυραμίδας.



4. Ο αριθμός των εδρών μιας πυραμίδας είναι πάντα άρτιος αριθμός.

5. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια.

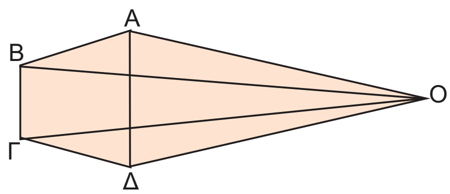
6. Στο παρακάτω σχήμα, οι πυραμίδες ΙΕΖΗΘ και ΗΑΒΖΕ έχουν τον ίδιο όγκο.



7. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι:
Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα:
Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Η πυραμίδα του διπλανού σχήματος έχει βάση:
Α: ΟΓΔ Β: ΟΒΓ Γ: ΑΒΓΔ Δ: ΟΑΒ
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά στα στοιχεία μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

ύψος (cm)	8		6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	
απόστημα (cm)	10		8
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (cm^2)			192
όγκος (cm^3)		256	

2 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 12 cm και ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3 Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 9 cm και απόστημα 12 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

4 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm και το ύψος της παράπλευρης έδρας της είναι 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν:
α) της παράπλευρης επιφάνειας,
β) της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

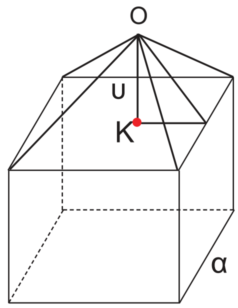
5 Μια τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 700 cm^3 και ύψος 17 cm. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης της.

6 Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα 10 cm και πλευρά βάσης 16 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και τον όγκο της.

7 Ένα τετράεδρο έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

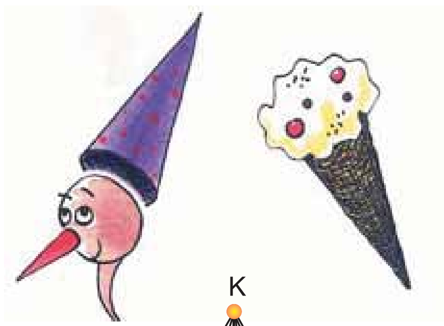
8 Ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι εννεαπλάσιος από τον όγκο μίας άλλης κανονικής πυραμίδας με την οποία έχει το ίδιο ύψος. Να βρείτε το λόγο των πλευρών των βάσεών τους.

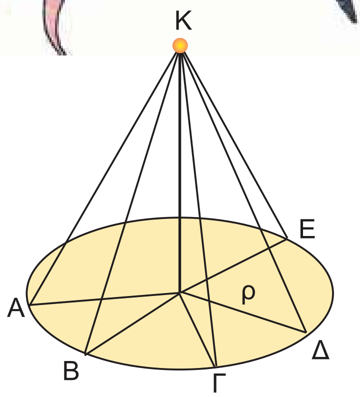
9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύβος πλευράς α = 10 cm και μια πυραμίδα με βάση μία έδρα του κύβου και ύψος υ = 6 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



10 Μια κανονική πυραμίδα με βάση εξάγωνο έχει ύψος 8 cm και παράπλευρη ακμή 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας,
γ) τον όγκο της πυραμίδας.

4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

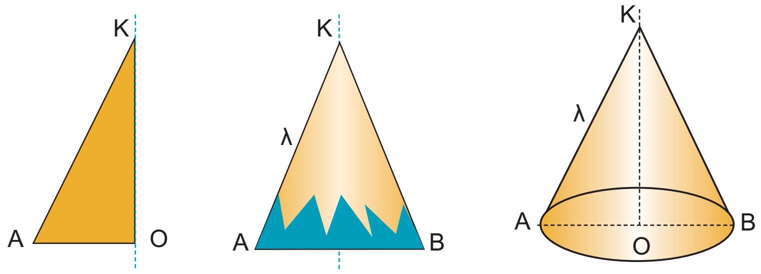




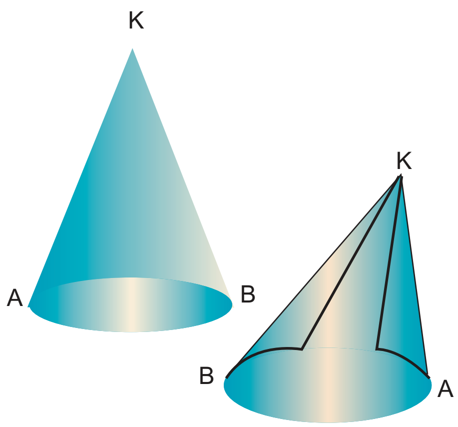
Στην καθημερινή μας ζωή έχουμε συναντήσει συχνά την εικόνα ενός κώνου. Πώς μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε προσεγγιστικά ένα κώνο;

Παίρνουμε ένα κυκλικό στεφάνι ακτίνας ρ. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε από χαρτόνι ίσα ορθογώνια τρίγωνα με μια κάθετη πλευρά ίση με την ακτίνα ρ του στεφανιού. Κολλάμε γύρω από ένα ξυλάκι όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που κόψαμε, έτσι ώστε να έχουν την ίδια κορυφή Κ και οι βάσεις τους να «πατάνε» στο στεφάνι.

Αν «ντύσουμε» με ύφασμα ή χαρτί το σχήμα που κατασκευάσαμε, τότε εμφανίζεται ένας κώνος.



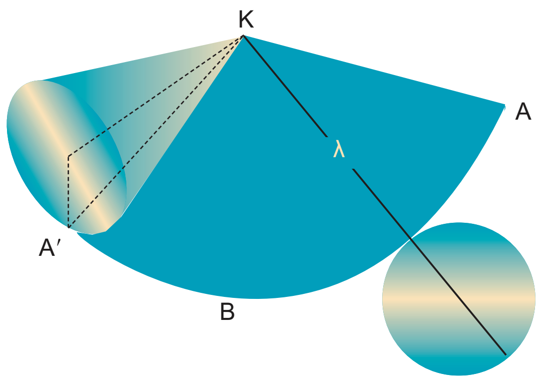
Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ΚΟΑ γύρω από μία κάθετη πλευρά του ΚΟ.



Η βάση του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου ΚΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται **ακτίνα του κώνου**.

Η κάθετη πλευρά ΚΟ γύρω από την οποία περιστρέψαμε το ορθογώνιο τρίγωνο, λέγεται **ύψος** του κώνου. Η υποτείνουσα ΚΑ του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και το μήκος της συμβολίζεται με **λ**.

Η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή τής γενέτειρας ΚΑ είναι η **παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου.



Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_Π του κώνου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ανάπτυγμά της προκύπτει «ξετυλίγοντας» τον κώνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

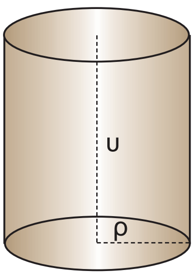
Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ισούται με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ακτίνας λ με μήκος τόξου $\overset{\frown}{AA'} = 2\pi\rho$.

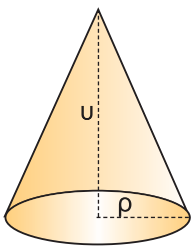
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα λ του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου.

Οπότε: $E_\Pi = \frac{1}{2} \cdot (2\pi\rho) \cdot \lambda$ ή $\boxed{E_\Pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda}$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου, αρκεί στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_Π να προσθέσουμε και το εμβαδόν της βάσης του: $\mathbf{E_B = \pi\rho^2}$.

Οπότε: $\boxed{E_{o\lambda} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2}$

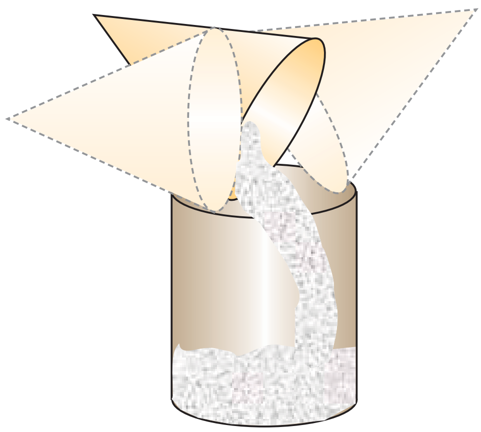




Όγκος κώνου

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα κώνο και ένα κύλινδρο, έτσι ώστε να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $\pi\rho^2\upsilon$.

Αν γεμίσουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τον κώνο και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στον κύλινδρο, θα δούμε ότι ο κύλινδρος γεμίζει τελείως.

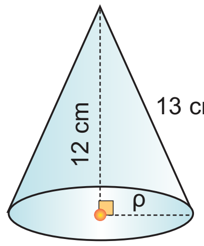


Επομένως, ο όγκος του κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου. Δηλαδή:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο ενός κώνου με γενέτειρα λ = 13 cm και ύψος 12 cm.



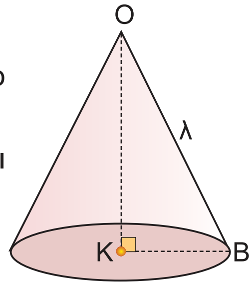
Λύση: Έχουμε ότι: $\rho^2 = \lambda^2 - \upsilon^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ άρα ρ = 5 (cm) και

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12 = 314 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η διάμετρος της βάσης ενός κώνου είναι 12 cm και το ύψος του 8 cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας,
β) τον όγκο του.

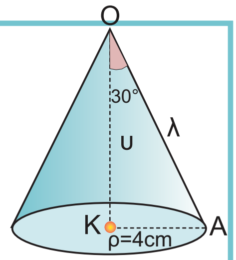
Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι $E_\Pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$.
Για να βρούμε το μήκος της γενέτειρας λ, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ:
$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, άρα λ = ΟΒ = 10 cm και
$E_\Pi = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 10 = 188{,}4$ (cm²).



β) Έχουμε ότι:
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 8 = 301{,}44 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στον κώνο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας,
β) τον όγκο του κώνου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε:

$$\eta\mu 30° = \frac{\rho}{\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2} = \frac{4}{\lambda} \text{ ή } \lambda = 8 \text{ (cm) και}$$

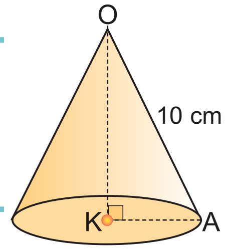
$$\sigma\upsilon\nu 30° = \frac{\upsilon}{\lambda} \text{ ή } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\upsilon}{8} \text{ ή } 2\upsilon = 8\sqrt{3} \text{ ή } \upsilon = 4\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ (cm)}.$$

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:
$E_{o\lambda} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2 = \pi \cdot 4 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2 = 48\pi = 48 \cdot 3{,}14 = 150{,}72$ (cm²).

β) Ο όγκος του κώνου είναι:
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 6{,}93 = 116{,}05 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας κώνος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 251,2 cm² και γενέτειρα με μήκος 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) την ακτίνα της βάσης του, β) το ύψος του, γ) τον όγκο του.



Λύση: α) Έχουμε ότι $E_\Pi = \pi\rho\lambda$ ή $\rho = \dfrac{E_\Pi}{\pi \cdot \lambda}$ ή $\rho = \dfrac{251,2}{3,14 \cdot 10} = 8$, άρα $\rho = 8$ (cm).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε $OK^2 = OA^2 - AK^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, άρα $\upsilon = OK = 6$ (cm).

γ) Ο όγκος του κώνου είναι ίσος με: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{3} 3,14 \cdot 8^2 \cdot 6 = 401,92$ (cm²).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι τρίγωνο.
2. Η γενέτειρα λ, το ύψος υ και η ακτίνα ρ του κώνου ικανοποιούν τη σχέση $\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2$.
3. Η γενέτειρα ενός κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από την ακτίνα.
4. Η βάση ενός κώνου είναι κυκλικός δίσκος.
5. Η ακτίνα της βάσης ενός κώνου είναι 6 cm και το ύψος του 8 cm. Η γενέτειρά του είναι:
   Α: 10 dm Β: 10 cm Γ: 12 m Δ: 6 cm.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
6. Ο όγκος του κώνου είναι 12π m³ και η ακτίνα του 3 m. Το ύψος του είναι:
   Α: π m Β: 6 m Γ: 4 m Δ: 4π m.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε η παράπλευρη επιφάνεια:
   Α: διπλασιάζεται Β: τετραπλασιάζεται Γ: παραμένει ίδια.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
8. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε ο όγκος του κώνου:
   Α: διπλασιάζεται Β: τετραπλασιάζεται Γ: παραμένει ίδιος
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
9. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι κυκλικός τομέας με ακτίνα 12 cm και γωνία 60°. Η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι:
   Α: 4 cm Β: 3 dm Γ: 2 cm Δ: 2 dm.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
10. Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός κώνου, τότε ο όγκος του:
    Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: τετραπλασιάζεται.
    Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Συμπληρώστε τα στοιχεία του κώνου που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

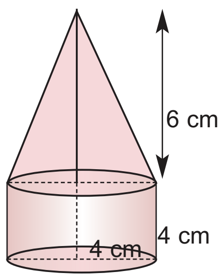
Ύψος (cm)	4	8	10	
Ακτίνα βάσης (cm)	3		4	
Γενέτειρα (cm)		10		9
Όγκος (cm^3)			167.46	
Παράπλευρη επιφάνεια (cm^2)				169,56

2 Ένας κώνος έχει όγκο $V = 1\ m^3$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου:
α) με διπλάσιο ύψος (μόνο),
β) με διπλάσια ακτίνα βάσης (μόνο),
γ) με διπλάσιο ύψος και διπλάσια ακτίνα βάσης.

3 Ένα δοχείο με σχήμα κώνου που έχει ύψος 20 cm και ακτίνα βάσης 10 cm είναι γεμάτο νερό. Αδειάζουμε το παραπάνω δοχείο σε ένα άλλο δοχείο, που έχει σχήμα κύβου με ακμή 20 cm. Να εξετάσετε αν θα ξεχειλίσει το νερό ή όχι.

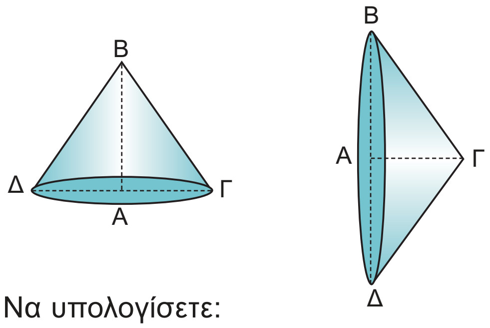
4 Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κωνική σκηνή, η οποία να έχει όγκο τουλάχιστον 20 m^3. Αν το ύψος της σκηνής είναι 3 m, πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της βάσης;

5 Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού στο διπλανό σχήμα.



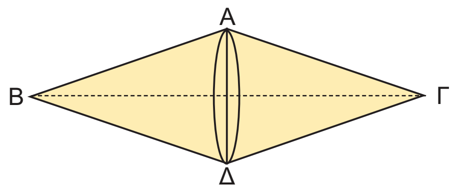
6 Δύο στερεοί κώνοι έχουν κοινή βάση με ακτίνα 4 cm και ύψη 8 cm και 12 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

7 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90°) στρέφεται πρώτα γύρω από την πλευρά ΑΒ και έπειτα γύρω από την πλευρά ΑΓ, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

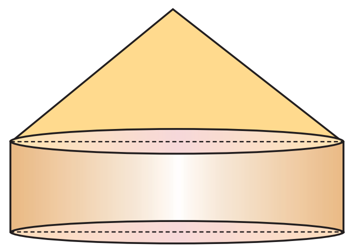


Να υπολογίσετε:
α) το λόγο των παράπλευρων επιφανειών των δύο κώνων που σχηματίζονται,
β) το λόγο των όγκων τους.

8 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ περιστρέφεται γύρω από τη βάση του ΒΓ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν ΒΓ=24 cm και ΑΒ=13 cm, να υπολογίσετε:
α) την ολική επιφάνεια του στερεού που σχηματίζεται,
β) τον όγκο του.



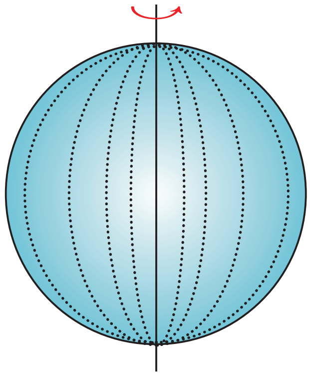
9 Η στέγη της κεντρικής σκηνής ενός τσίρκου έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 40 m και ύψος 15 m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα πλαστικοποιημένου υφάσματος χρειάστηκαν για την κατασκευή της;



10 Μια κλεψύδρα σχήματος κώνου «μετρά» το χρόνο αδειάζοντας 4 cm^3 άμμο το λεπτό (min). Αν η ακτίνα της βάσης είναι 5 cm και το ύψος 9,17 cm, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει τελείως η κλεψύδρα;

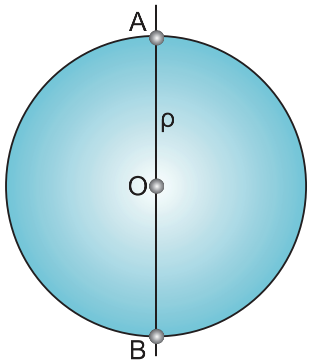
4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

Τα διπλανά σχήματα μάς δίνουν την έννοια της σφαίρας. Αν έχουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) και τον περιστρέψουμε γύρω από μία διάμετρο του ΑΒ, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μια σφαίρα.

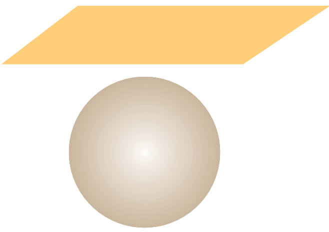


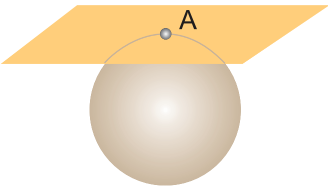
Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.

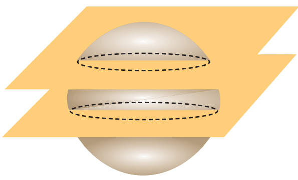
Κατά την περιστροφή ο κύκλος δημιουργεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.
Επομένως, η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ. Το σημείο **Ο** λέγεται **κέντρο της σφαίρας** και η ακτίνα **ρ** του κύκλου λέγεται ακτίνα της σφαίρας.



Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας



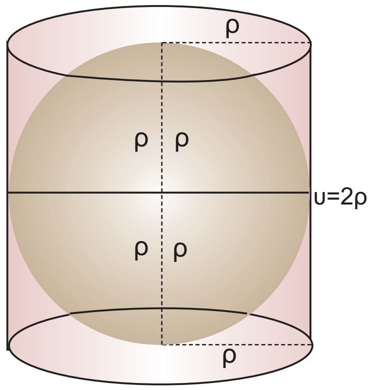




Μία σφαίρα και ένα επίπεδο στο χώρο έχουν τη δυνατότητα να τοποθετηθούν κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα:

α) Να μην τέμνονται μεταξύ τους.
β) Να εφάπτονται σε ένα σημείο.
γ) Να τέμνονται σε κύκλο.

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος που αποτελεί την τομή του επιπέδου με τη σφαίρα, «μεγαλώνει» όσο το επίπεδο «πλησιάζει» στο κέντρο της σφαίρας. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος της σφαίρας**.



Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας

Όπως είδαμε, η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή ενός κύκλου (Ο, ρ) γύρω από μια διάμετρό του, αποτελεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

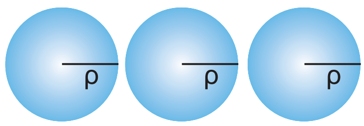
Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες με τον Αρχιμήδη υπολόγισαν το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας και μάλιστα συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου!

Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα «εγγράφεται» σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Επομένως: $E_{σφ} = 2πρ \cdot υ = 2πρ \cdot 2ρ$ ή $\boxed{E_{σφ} = 4πρ^2}$

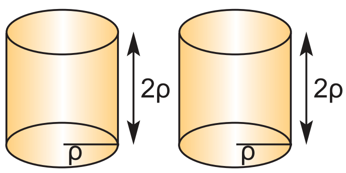
Το προηγούμενο συμπέρασμα διατυπώνεται και ως εξής:

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.



Όγκος της σφαίρας

Ας κατασκευάσουμε μια σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος υ = 2ρ.
Γεμίζουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το αλεύρι στους δύο κυλίνδρους.
Τελειώνοντας βλέπουμε ότι οι δύο κύλινδροι είναι τελείως γεμάτοι. Επομένως, ο τριπλάσιος όγκος σφαίρας ακτίνας ρ ισούται με τον διπλάσιο όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ = 2ρ:



$$3V_{σφ} = 2V_κ \quad ή \quad V_{σφ} = \frac{2}{3}V_κ = \frac{2}{3}πρ^2 \cdot (2ρ) \quad ή$$

$$\boxed{V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται σφαίρα ακτίνας ρ = 2 cm. Να βρείτε:
α) το εμβαδόν Ε της επιφάνειάς της,
β) τον όγκο της.

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24$ (cm²).

β) Γνωρίζουμε ότι: $V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3 = 33{,}49$ (cm³).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 144π (m^2). Να βρείτε τον όγκο της.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2$, οπότε $144π = 4πρ^2$ ή $36 = ρ^2$ ή $ρ = 6$ (m).

Από τον τύπο υπολογισμού του όγκου της σφαίρας έχουμε:

$$V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3}π \cdot 6^3 = 904{,}32 \ (m^3).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε πόσα χρήματα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή διαμέτρου δ = 20 m, αν το ένα κιλό χρώμα κοστίζει 8 € και καλύπτει επιφάνεια 4 m^2.

Λύση: Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4π \cdot 10^2 = 1256$ (m^2). Αφού κάθε κιλό χρώμα καλύπτει 4 m^2, για να καλυφθεί η επιφάνεια των 1256 m^2 της σφαίρας χρειάζονται $\frac{1256}{4} = 314$ κιλά χρώμα που κοστίζουν συνολικά $314 \cdot 8 = 2512$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

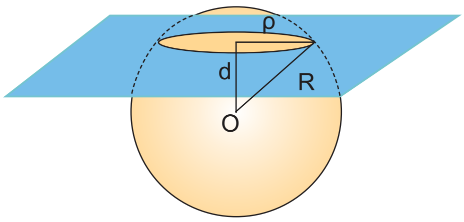
Να βρείτε το εμβαδόν της τομής επιπέδου και σφαίρας κέντρου Ο και ακτίνας R = 5 cm, όταν το επίπεδο απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση d = 3 cm.

Λύση: Αφού το επίπεδο απέχει απόσταση από το κέντρο της σφαίρας μικρότερη από την ακτίνα της, τότε η τομή είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας:

$ρ = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (cm).

Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

$E = πρ^2 = π \cdot 4^2 = 50{,}24$ (cm^2).



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1.	Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της.		
2.	Σε μια σφαίρα ακτίνας 3 cm το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό.		
3.	Η τομή σφαίρας και επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος.		
4.	Η τομή σφαίρας και επιπέδου που δε διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος.		
5.	Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το γινόμενο του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της με τη διάμετρο αυτής.		

6. Δύο σφαίρες με ακτίνες 5 cm και 12 cm είναι γεμάτες με νερό. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενό τους σε μία τρίτη σφαίρα με ακτίνα 13 cm, τότε:
Α: Η τρίτη σφαίρα θα γεμίσει πλήρως.
Β: Η τρίτη σφαίρα θα ξεχειλίσει.
Γ: Η τρίτη σφαίρα δε θα γεμίσει.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:
Α: Διπλασιάζεται Β: Τριπλασιάζεται Γ: Τετραπλασιάζεται Δ: Οκταπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Ένα τμήμα ΑΒ έχει μήκος 6 cm. Ένα σημείο Σ απέχει 4 cm από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Τότε:
Α: Το Σ ανήκει στη σφαίρα διαμέτρου ΑΒ.
Β: Το Σ ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.
Γ: Το Σ βρίσκεται εξωτερικά της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας ρ και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα έχουν λόγο:
Α: 1 Β: $\frac{1}{2}$ Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: 4
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

10. Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι:
Α: διπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Β: τριπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Γ: τετραπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Δ: ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

Α.

Ακτίνα σφαίρας (cm)	1	2		
Εμβαδόν επιφάνειας (cm^2)			400 π	
Όγκος (cm^3)				288 π

Β.

ρ: ακτίνα σφαίρας	1m	10cm	3,2dm	8dm	
Ε: εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας					
V: όγκος σφαίρας					36π m^3

2 Η διάμετρος μιας σφαίρας είναι δ = 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

3 Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας, καθώς και τον όγκο ημισφαιρίου ακτίνας R = 4 m.

4 Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, ώστε το εμβαδόν της επιφάνειάς της να πολλαπλασιαστεί επί 4; επί 36; επί 100;

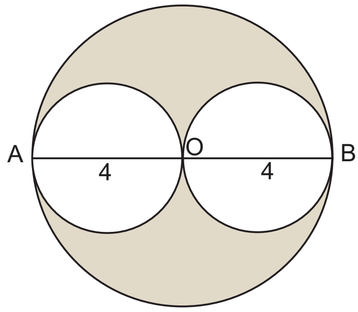
5 Να βρείτε την ποσότητα του χρώματος που χρειάζεται, για να βαφεί σφαιρική δεξαμενή ακτίνας ρ = 10 m, αν το ένα κιλό χρώματος βάφει επιφάνεια 8 m^2.

6 Τέσσερις κίτρινες μπάλες έχουν ακτίνα 5 cm και πέντε κόκκινες μπάλες έχουν ακτίνα 4 cm. Ποιου χρώματος μπάλες έχουν τη μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια και ποιου χρώματος μπάλες έχουν το μεγαλύτερο συνολικό όγκο;

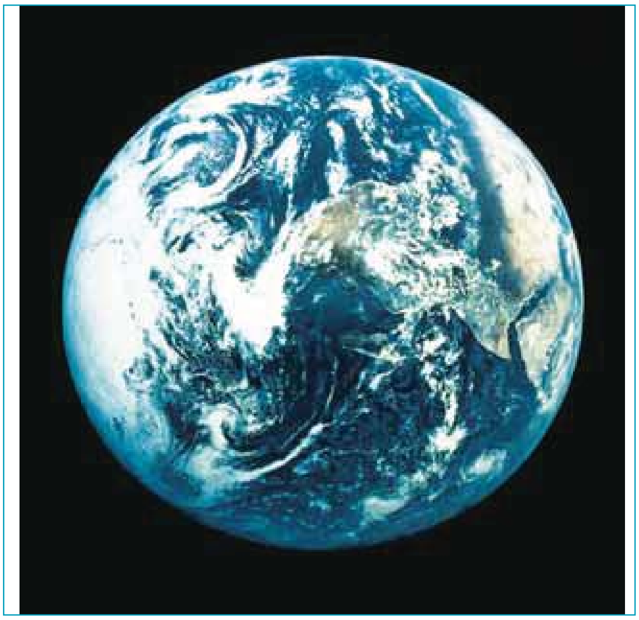
7 Σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου χωράει ακριβώς μια σφαίρα με ακτίνα 40 cm. Να βρείτε το μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο.

8 Δύο σφαίρες έχουν διαμέτρους 30 cm και 40 cm. Να υπολογίσετε τη διάμετρο μιας τρίτης σφαίρας, της οποίας το εμβαδόν της επιφάνειάς της είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών των δύο σφαιρών.

9 Στο παρακάτω σχήμα οι δύο μικρές σφαίρες έχουν διαμέτρους ΑΟ=ΟΒ= 4cm, και περιέχονται στη μεγάλη σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ΟΑ = ΟΒ.
Να βρείτε τον όγκο του γραμμοσκιασμένου στερεού.

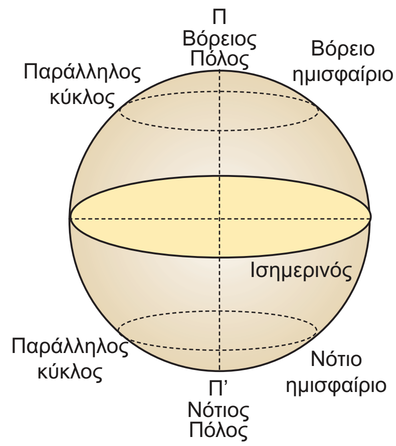


4.7. Γεωγραφικές συντεταγμένες



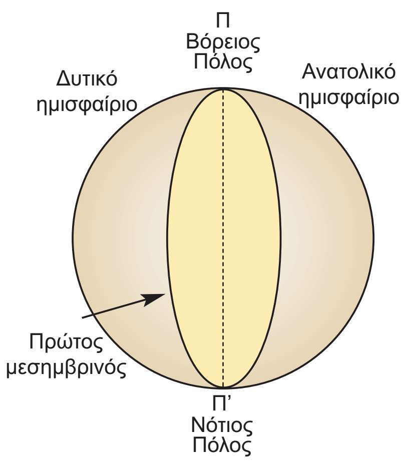
Το σχήμα της Γης είναι ελλειψοειδές. Για πρακτικούς λόγους, όμως, θεωρούμε ότι η Γη είναι σφαίρα και την ονομάζουμε **γήινη σφαίρα** ή **υδρόγειο σφαίρα**.

Η υδρόγειος σφαίρα περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της, γύρω από ένα νοητό άξονα, ο οποίος περνά από τους δύο πόλους.
Ο νοητός αυτός άξονας ονομάζεται **άξονας περιστροφής της Γης**. Ο μέγιστος κύκλος της γήινης σφαίρας, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής, ονομάζεται **ισημερινός**.

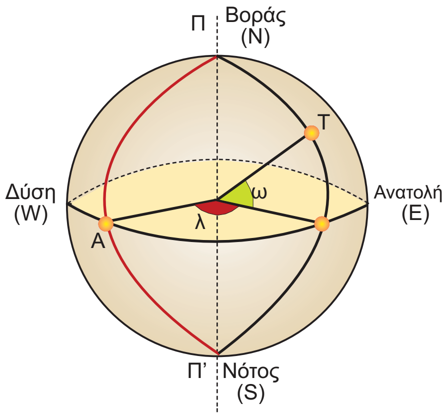


Ο ισημερινός χωρίζει τη Γη σε **δύο ημισφαίρια**, το **βόρειο** (συμβολίζεται με το γράμμα N από την αγγλική λέξη North που σημαίνει Βορράς) και το **νότιο** (συμβολίζεται με το γράμμα S από την αγγλική λέξη South που σημαίνει Νότος).

Η τομή κάθε επιπέδου, το οποίο είναι παράλληλο προς το επίπεδο του ισημερινού με την επιφάνεια της γήινης σφαίρας, είναι κύκλος με κέντρο πάνω στον άξονα περιστροφής.
Έτσι, το βόρειο και το νότιο ημισφαίριο χωρίζονται από παράλληλους προς τον ισημερινό κύκλους, με αποτέλεσμα από κάθε τόπο πάνω στην επιφάνεια της Γης να περνά ένας παράλληλος κύκλος, ο οποίος ονομάζεται **παράλληλος του τόπου**.



Το ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ′, το οποίο περνά από το αστεροσκοπείο Γκρήνουϊτς της Μ. Βρεττανίας, ονομάζεται **πρώτος μεσημβρινός**. Ο πρώτος μεσημβρινός χωρίζει τη γήινη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια, το **ανατολικό** (συμβολίζεται με το γράμμα E από την αγγλική λέξη East που σημαίνει ανατολή) και το **δυτικό** (συμβολίζεται με το γράμμα W από την αγγλική λέξη West που σημαίνει δύση).



Από κάθε τόπο περνά ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ'. Το ημικύκλιο ονομάζεται **μεσημβρινός του τόπου**.

Κάθε τόπος χαρακτηρίζεται από δύο διαφορετικές επίκεντρες γωνίες. Στο διπλανό σχήμα, αν Α είναι το σημείο τομής του ισημερινού με τον πρώτο μεσημβρινό, ο τόπος Τ χαρακτηρίζεται από την επίκεντρη γωνία λ και την επίκεντρη γωνία ω.

Η επίκεντρη γωνία λ ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος** του τόπου και η ω **γεωγραφικό πλάτος** του τόπου.

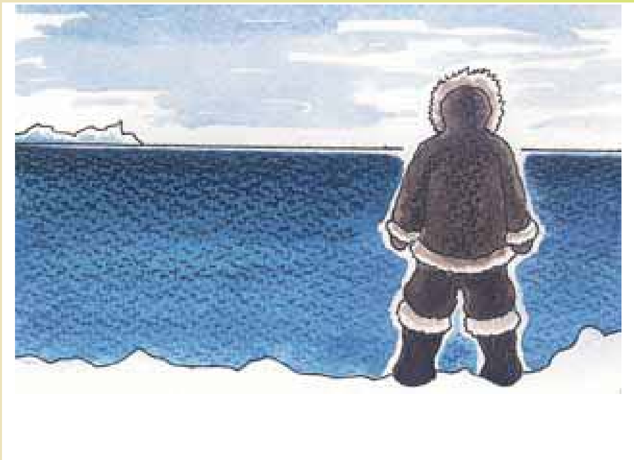
Ανάλογα με τη θέση του τόπου, το **γεωγραφικό μήκος** χαρακτηρίζεται ως **δυτικό** (W) ή ως **ανατολικό** (E) (αν ο τόπος βρίσκεται στο ανατολικό ή στο δυτικό ημισφαίριο αντίστοιχα).

Επίσης, το **γεωγραφικό πλάτος** χαρακτηρίζεται ως **βόρειο** (N) ή **νότιο** (S), αν ο τόπος βρίσκεται στο βόρειο ή στο νότιο ημισφαίριο αντίστοιχα.

Έτσι, οι συντεταγμένες μερικών σπουδαίων πόλεων είναι:

	N	E	S	W
ΑΘΗΝΑ	37,27°°	23,45°		
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	40,15°	22,30°		
ΡΩΜΗ	40,04°	12,30°		
ΠΑΡΙΣΙ	48,23°	3,08°		
ΛΟΝΔΙΝΟ	51,29°	0,38°		
ΣΙΝΔΕΥ		151,15°	34,07°	
ΡΙΟ ΝΤΕ ΤΖΑΝΕΙΡΟ			23,38°	43,08°
ΝΕΑ ΥΟΡΚΗ	43,10°			73,45°

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



- Σε ποιο μέρος της Γης ένας άνθρωπος θα κοίταζε νότια προς όλες τις κατευθύνσεις;

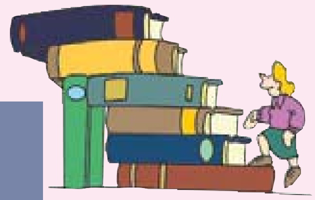
- Σχεδιάστε ένα σφαιρικό τρίγωνο που να έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

- Ένας ταξιδιώτης περπατώντας διέσχισε μια διαδρομή και ξαναγύρισε στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής το κεφάλι του διένυσε 12,56 μέτρα περισσότερα από τα πόδια του. Πώς είναι δυνατόν;

- Μια αρκούδα βγήκε από τη σπηλιά της, προχώρησε 1 km νότια, στη συνέχεια 1 km ανατολικά και τέλος 1 km βόρεια και ξαναβρέθηκε στη σπηλιά της! Τι χρώμα έχει η αρκούδα;

Επανάληψη Κεφαλαίου 4

Στερεομετρία



Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:

- να είναι παράλληλα,
- να τέμνονται κατά μία ευθεία.

Σχετικές θέσεις ευθειών στο χώρο

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ, τότε οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:

- Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

- Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.
- Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.
- Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: **$E_Π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)**
Ολικό εμβαδόν: **$E_{ολ} = E_Π + 2E_β$**

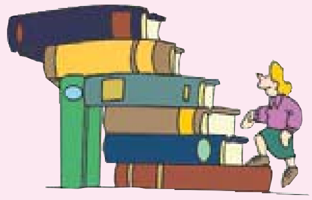
Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: **$E_Π = 2πρ \cdot υ$**
Ολικό εμβαδόν: **$E_{ολ} = E_Π + 2E_β$**

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Όγκος πρίσματος: **V = (εμβαδόν βάσης) · (ύψος)**

Όγκος κυλίνδρου: **$V = πρ^2υ$**



Πυραμίδα

Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας: $E_\Pi = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$

$E_{ολ} = E_\pi + E_\beta$

Όγκος πυραμίδας: $V = \frac{1}{3}(\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

Κώνος

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου: $E_\Pi = \pi\rho\lambda$

$E_{ολ} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$

Όγκος κώνου: $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 υ$

Σφαίρα

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.

Εμβαδόν σφαίρας: $E_{σφ} = 4\pi\rho^2$

Όγκος σφαίρας: $V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi\rho^3$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1
Εξισώσεις – Ανισώσεις

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** → iii, **β)** → iv, **γ)** → i, **δ)** → ii

2 **α)** Γ, **β)** Α, **γ)** Β, **δ)** Γ

3 **α)** → iv, **β)** → i, **γ)** → iii, **δ)** → ii

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 3x+12, **β)** (x+y)·9 **γ)** 2x+2(x–2)

2 **α)** 5x, **β)** $x+\frac{19}{100}x$

3 **α)** 17x, **β)** –16α, **γ)** 27y, **δ)** 4ω, **ε)** –2x+1, **στ)** –2β

4 **α)** 5x–y, **β)** 7ω+5α, **γ)** –2x–2y, **δ)** –7x+4ω

5 **α)** Α=–9, **β)** Β=–36,

6 **α)** Α=0,1, **β)** Β=1

7 **α)** BMI: 28,4 -1^{ος} βαθμός παχυσαρκίας για άνδρες,
β) BMI: 31,7 - 2^{ος} βαθμός παχυσαρκίας για γυναίκες

1.2 Εξισώσεις α΄ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** 30, **β)** 7, **γ)** 24, **δ)** –3, **ε)** –9, **στ)** 7

2 **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

3 **α)** → iii, **β)** → iv, **γ)** → i, **δ)** → ii

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Κάνοντας την επαλήθευση βρίσκουμε ότι: **α)** δεν είναι λύση, **β)** δεν είναι λύση, **γ)** είναι λύση.

2 **α)** x=–22, **β)** y=1, **γ)** t=–2

3 **α)** x=4, **β)** $y=\frac{11}{4}$, **γ)** $\omega=-\frac{1}{2}$

4 **α)** x=–11, **β)** $x=\frac{30}{13}$, **γ)** $x=\frac{9}{7}$

5 **α)** x=–61, β) y=4, γ) $\omega=\frac{11}{4}$

6 **α)** $x=\frac{9}{8}$, **β)** t=–26

7 **α)** $x=-\frac{1}{6}$, **β)** $t=\frac{12}{17}$

8 **α)** $x=\frac{15}{7}$, **β)** x=3,9

9 **α)** Για μ=2 λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το x,
β) για x=7 λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το μ,
γ) αδύνατη

10 **α)** x=2 με πλευρές 7, 7, 5 **β)** x=4 με πλευρές 11, 9, 9,
γ) η εξίσωση 2x+3=2x+1 είναι αδύνατη

11 x=4, y=3, ω=65°

1.3 Επίλυση τύπων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ 2 Β 3 Γ 4 Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $\rho=\frac{L}{2\pi}$

2 $y=\frac{P-2x}{2}$

3 $\rho=\frac{E}{2\pi\upsilon}$

4 $y=\frac{-\alpha x-\gamma}{\beta}$

5 $\omega=\frac{E-2xy}{2x+2y}$

6 $t=\frac{s}{\upsilon}$

7 $\beta=\frac{2E-B\upsilon}{\upsilon}$

8 $\lambda=\frac{s-\alpha}{s}$

9 $h=\frac{P-P_0}{\varepsilon}$

10 $c=\frac{Q}{m\cdot\theta}$

11 $q_1=\frac{F\cdot r^2}{k_c\cdot q_2}$

12 $\upsilon_0=\frac{2S-gt^2}{2t}$

13 **α)** $\theta=\frac{273{,}15\,(V-V_0)}{V_0}$, **β)** θ=54,63°C

14 **α)** D=11 ημέρες **β)** για D=180, h=1090,3 m,
γ) για D=360, h=2.251,6 m

1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Δ 2 Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Αν x είναι το μέτρο της μιας οξείας γωνίας και 2x το μέτρο της δεύτερης, τότε x=30° και 2x=60°.

2 $x=14$ m.

3 $x=10$ έτη.

4 Το αρχικό ποσό είναι 1200€. Ο πρώτος φίλος πήρε 300€, ο δεύτερος φίλος πήρε 400€, ο τρίτος φίλος πήρε 500€.

5 Το πρώτο αυτοκίνητο περιέχει 54 λίτρα και το δεύτερο περιέχει 27 λίτρα.

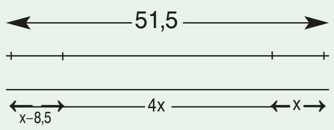
6 Είναι 7 τα λεωφορεία των 8 ατόμων και 5 των 14 ατόμων

7 Πρέπει να αυξηθεί κατά 4 m.

8 Το ωρομίσθιο του Πέτρου είναι 8€ και του Σάκη 6€.

9 Τα στιλό είναι 6.

10 **α)**



β) ο αγώνας δρόμου είναι 10 km, της κολύμβησης 1,5 km και της ποδηλασίας 40 km.

1.5 Ανισώσεις α′ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** $x+3<6$, **β)** $\frac{x}{2}<-\frac{3}{2}$, **γ)** $x-3>2$, **δ)** $\frac{x}{-3}\geq-2$, **ε)** $2x\geq-4$, **στ)** $\frac{3x}{2}<6$, **ζ)** $-3x>-21$, **η)** $-4x\geq2$

2 **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Λ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x\leq4$, **β)** $x>-5$, **γ)** $x<0$, **δ)** $x\geq-\frac{1}{6}$.

2 **α)** $\omega>\frac{1}{2}$, **β)** $x\geq0$, **γ)** $0\cdot y<8$, **δ)** $t<-8$

3 **α)** $x>\frac{32}{13}$, **β)** $0\cdot x>-1$, **γ)** $x>-\frac{22}{7}$, **δ)** $x>11$, **ε)** $\omega<-3$, **στ)** $0\cdot t>-11$

4 **α)** $-1<x<5$, **β)** $x>6$, **γ)** δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, **δ)** $y>14{,}2$, **ε)** $-1<x\leq3$, **στ)** $x>9$

5 **α)** $-4<x\leq9$, **β)** $-1<x<1$, **γ)** $\frac{2}{5}\leq x\leq\frac{7}{5}$

6 $\mu<5$

7 $\alpha<\frac{5}{4}$

8 Αν x€ είναι τα χρήματα της Μαρίας, τότε (3x–14)€ είναι τα χρήματα της Άννας μετά τη δαπάνη.

9 Πρέπει να γράψει $16<x\leq20$.

10 Για χρόνο ομιλίας $x>150$ λεπτά.

11 $37{,}5<x<40$.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Α, **β)** Α, **γ)** Β **2** Γ

3 $9\rightarrow3$, $16\rightarrow4$, $4\rightarrow2$, $25\rightarrow5$, $36\rightarrow6$

4 **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ, **στ)** Λ, **ζ)** Λ, **η)** Σ, **θ)** Λ, **ι)** Λ

5 **1)** Β, **2)** Β, **3)** Ε, **4)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 9, 0,9, 90, **β)** 2, 0,2, 20, 200, **γ)** 11, 1,1, 110, 0,11, **δ)** $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{20}{7}$, $\frac{6}{11}$.

2 **α)** 6, **β)** 6, **γ)** 18, **δ)** 18

3 **α)** 9, **β)** 5, **γ)** 33, **δ)** 81, **ε)** 4, **στ)** 4,4 ή 2,16 ή 1,25 ή 3,9 ή 5,1 ή 6,0

4 Υπολογίζουμε τις τετραγωνικές ρίζες ξεκινώντας από τις απλούστερες.

5 $x=10$, $y=5$, $\beta=4$, $\alpha=29$, $\gamma=35$, $\omega=77$

6 **α)** $x=3$, **β)** $x=5$, **γ)** $x=8$, $x=\frac{10}{9}$

7 $\upsilon=3{,}5$

8 $\delta=97$

9 $x=2$

10 $\alpha=5$, $\beta=12$, $\gamma=15$, $x=8$

11 **α)** $\sqrt{\alpha}<\alpha<\alpha^2$, **β)** $\sqrt{\alpha}>\alpha>\alpha^2$

12

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

13

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

14

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16	3	4	7	5
64	36	8	6	14	10

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$.

2.2 Άρρητοι αριθμοί Πραγματικοί αριθμοί

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Σ

2 **α)** Δ, **β)** Ε, **γ)** Γ, **δ)** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** άρρητος, ρητός, **β)** ρητός, άρρητος, **γ)** άρρητος, ρητός, ρητός

2 **α)** $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{5}<\sqrt{7}$, **β)** $\sqrt{2}<2<\sqrt{5}<\sqrt{7}$, **γ)** $\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$, **δ)** $\sqrt{2}<\sqrt{1+\sqrt{2}}$

3 **α)** 1,73, **β)** 2,23, **γ)** 2,64, **δ)** 2,82

4 **α)** $x=0$, **β)** $x=\pm\sqrt{5}$, **γ)** αδύνατη, **δ)** $x=\pm\sqrt{17}$

5 $\alpha=3{,}46$ cm

6 **α)** $\alpha=8{,}48$ cm, **β)** $E=72\text{cm}^2$

2.3 Προβλήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $E=400\text{ cm}^2$ 2 $E=151{,}38\text{ cm}^2$

3 Βρίσκουμε ότι $ΚΛ=\sqrt{5}$, $ΛΜ=\sqrt{10}$, $ΚΜ=\sqrt{5}$, οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο.

4 ΒΕ=7,93 cm

5 Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την τρίτη πλευρά ως υποτείνουσα (α' περίπτωση: $x=\sqrt{164}=12{,}81$) ή ως κάθετη πλευρά (β' περίπτωση: $x=6$).

6 **α)** i) υποτείνουσα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 cm,
ii) υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 cm και 2 cm,
iii) υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 2 cm και 3 cm.
β) Χρησιμοποιούμε τα τμήματα του ερωτήματος (α).

7 2,5196 m 8 5 βέλη

9 Ο οδηγός μπορεί να κάνει αναστροφή.

Κεφάλαιο 3 Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 β 2 γ 3 γ 4 β 5 **(α)** → ii), **(β)** → i), **(γ)** → iii)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)**

x	–3	–2	–1	0	2
y	–11	–8	–5	–2	4

β)

x	–1	0	2	4	5
y	–1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

2 **α)**

x	–3	–1	0	2	5
y	10	2	1	5	26

β)

x	–3	–2	0	1	3
y	–2	–4	–2	2	16

3 $y=1{,}08x$

4 $y=600+0{,}07x$

5 **α)** $y=30-x$, **β)** $y=\frac{100}{x}$

6 $E=x^2$ και $Π=4x$. Επομένως:

x	1	2	2,5	5	0,3
Ε	1	4	6,25	25	0,09
Π	4	8	10	20	1,2

7

x	2	4	–3	1
y	1	7	–14	–2

8 **α)** Σε 2 ώρες θα έχει διανύσει 140 χιλιόμετρα, ενώ σε 5 ημέρες θα έχει διανύσει 8400 χιλιόμετρα, **β)** $s=70t$.

3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Α(2, 3), Β(–2, 3), Γ(–2, –3), Δ(2, –3)

2

Σημείο Α	Συμ/κό ως προς x′x	Συμ/κό ως προς y′y	Συμ/κό ως προς Ο
(–2, 3)	(–2, –3)	(2, 3)	(2, –3)
(3, 5)	(3, –5)	(–3, 5)	(–3, –5)
(–3, 5)	(–3, –5)	(3, 5)	(3, –5)
(–3, –5)	(–3, 5)	(3, –5)	(3, 5)
(3, –5)	(3, 5)	(–3, –5)	(–3, 5)

3 α) 4 **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β, **δ)** Γ

5 **α)** Γ, **β)** Δ, **γ)** Δ, **δ)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Α(2, 3), Β(4, 0), Γ(–3, 3), Δ(0, –4), Ε(–4, –2), Ζ(5, –3), Η(–2, 1), Θ(–5, 0), Ι(0, 5)

3 Ως προς x′x: $A_1(-3,-4)$, $B_1\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

Ως προς y′y: $A_2(3, 4)$, $B_2\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$.

Ως προς Ο: $A_3(3, -4)$, $B_3\left(-2, \frac{7}{2}\right)$.

4 **α)** Α(1, 3) Β(–2, –1) Γ(–2, 3), **β)** i) Α, ii) Β,
γ) Αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.

5 **α)** 5 και 3, **β)** 2 και 3, **γ)** 4 και 0

6 **α)** $\sqrt{20}$, **β)** $\sqrt{32}$, **γ)** 5, **δ)** 9

7 17 μίλια και 2h 7′ 30″

8 **β)** 64 cmHg, **γ)** 0,75 km 9 **β)** 19°C, **γ)** 1,6 km

3.3 Η συνάρτηση $y = \alpha x$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)**

x	2	4	6
y	5	10	15

β) Γ

2 Η ευθεία του πρώτου σχήματος **3** (δ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)**

x	1	2	5	7	10
y	3	6	15	21	30

β) $y=3x$

2 Διέρχονται όλες από το Ο και από τα σημεία (1, 2), (1, 3), (1, 5) αντίστοιχα.

3 Διέρχονται και οι δύο από το Ο και από τα σημεία (2, 1), (2, –1) αντίστοιχα.

4 $s=5t$.

5 $y=3x$.

6 Διέρχεται από το Ο και το σημείο (2, 3).

7 $\alpha=-3$.

8 **α)** $y=1{,}2x$, **γ)** i) 8,4 €, ii) x=5,83 €.

9 **α)** $y=1{,}12x$, **β)** 280$, **γ)** 223 €.

3.4 Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** $\varepsilon_1 \rightarrow y=2x+2$, $\varepsilon_2 \rightarrow y=2x$, $\varepsilon_3 \rightarrow y=2x-1$,

3 ΑΒ → $y=2$, ΑΓ → $x=-3$, ΓΔ → $y=-2$, ΒΔ → $x=3$

4 **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β **5** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Η $y=\frac{1}{2}x$ διέρχεται από το Ο και το σημείο (2, 1). Με παράλληλη μετατόπιση προκύπτουν οι άλλες δύο ευθείες.

2 **α)** Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (1, –1) και (0, 2), **β)** ημιευθεία με αρχή το σημείο (0, 2), **γ)** ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (–2, 8) και (5, –13).

3 $y=2x-3$

4 **α)** Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ, **β)** επαλήθευση

5 $y=0{,}2x+0{,}5$.

6 (0, –2), (3, 0).

7 Διέρχεται από τα σημεία (1, 1) και (2, 0).

8 Α(–2, 2), Β(1, 2), Γ(1, 3), Δ(–2, 3), Ε=3τ.μ.

9 **α)** $y=200x+100$.

10 **α)** $\omega=20-x$, **β)** $y=150x$, $0 \le x \le 20$.

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) και γ) **2** **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Σ

3 α → $y=\frac{3}{x}$, β → $y=\frac{2}{x}$ γ → $y=\frac{1}{x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

4 **α)** $\upsilon=5277{,}78$ km/h, **β)** $\upsilon=\frac{380.000}{t}$

5 **α)**

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y	36	18	12	9	6	3	2	1

Τα x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα. **β)** $y=\frac{36}{x}$, $x>0$.

Κεφάλαιο 4
Περιγραφική Στατιστική

4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 γ) **2** δ) **3** β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 72, **β)** 30, **γ)** 20, **δ)** 7, **ε)** 16, **στ)** 7 2

2 **α)** 12, **β)** 24, **γ)** 42, **δ)** 60, **ε)** 9, **στ)** 50

3 β) **4** α) **5** 15%

6 Για τον «Α» είναι 45%, για τον «Β» 35% και για τον «Γ» 20%

7 **α)** 60%, **β)** 30%

8 Πληθυσμός: το σύνολο των οπαδών. Δείγμα: τα 1000 άτομα που ρωτήθηκαν. Το δείγμα δεν είναι αξιόποστο

9 Το δείγμα πρέπει να αποτελείται από ανθρώπους όλων των ηλικιών.

4.2 Γραφικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1.Γ, 2.Β, 3.Β, 4.Δ, 5.Γ, 6.Β, **2** 1.Α, 2.Β, 3.Β, 4.Γ, 5.Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 2000 : 80.000, 2001 : 110.000, 2002 : 160.000, 2003 : 130.000. Συνολικά: 480.000, **β)** 33,33%

2 **α)** 300 μαθητές, **β)** 24% **3** **β)** Α:40, Β:120, Γ:160, Δ:80

4 **α)** 3 μαθητές, 5% **5** **α)** 105°

6 **β)** Τουλάχιστον 90′ μελετά το 80% των αγοριών και το 84% των κοριτσιών. Το πολύ 120′ μελετά το 83% των αγοριών και το 76% των κοριτσιών.

4.3 Κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ, 2Α, 3Β, 4Δ, 5Α

2

Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
40	20
10	5
30	15
20	10
70	35
30	15
Σύνολο: 200	100

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Αριθμός παιδιών

Συχνότητα	Σχετική συχνότ.
4	10%
10	25%
14	35%
8	20%
4	10%
Σύνολο 40	100%

Αριθμός απουσιών

Συχνότητα	Σχετική συχνότ.
3	7,5%
8	20%
12	30%
6	15%
6	15%
4	10%
1	2,5%
Σύνολο 40	100%

2 α)

Έτος	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
2000	400	20
2001	250	12,5
2002	450	22,5
2003	500	25
2004	400	20
Σύνολο	2.000	100

β) Αύξηση: 2002, 2003. Μείωση: 2001, 2004

3 α)

Αριθμός προϊόντων	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	3	30
1	4	40
2	3	30
Σύνολο	10	100

4 α)

Αποτελέσματα	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
Η	8	23,53
Ι	18	52,94
Ν	8	23,53
Σύνολο	34	100

5 α)

Αριθμός μηνυμάτων	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	1	3,23
1	2	6,45
2	8	25,81
3	5	16,13
4	5	16,13
5	6	19,35
6	2	6,45
7	2	6,45
Σύνολο	31	100

β) 15 ημέρες, γ) 51,61 %

6 α)

Ομάδα αίματος	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
Ο	5	20
Α	11	44
Β	6	24
ΑΒ	3	12
Σύνολο	25	100

β) 68 %, γ) Η ΑΒ με συχνότητα 12%

7 α)

Σωστές απαντήσεις	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	8,3
1	25
2	41,7
3	16,7
4	8,3
Σύνολο	100

β) 75 %

8 α) 20.000 υπολογιστές

β)

Μάρκα Η/Υ	Συχνότητες
Α	4000
Β	7000
Γ	4000
Δ	5000
Σύνολο	20000

γ) 45 %

4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Β, 2Γ, 3Δ

2

Κλάσεις	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
Συχνότητες	1	4	5	6	14
Σχετ. συχνότητες	0,05	0,2	0,25	0,3	0,2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** Η συχνότητα που λείπει είναι 24

2 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 2	8
2 – 4	15
4 – 6	15
6 – 8	8
8 – 10	4
Σύνολο	50

3 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 4	1
4 – 8	5
8 – 12	4
12 – 16	12
16 – 20	8
Σύνολο	30

4 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
200 – 220	8
220 – 240	4
240 – 260	7
260 – 280	7
280 – 300	4
Σύνολο	30

5 Οι συχνότητες για την κάθε κλάση είναι 28, 32, 12, 8 αντίστοιχα.

4.5 Μέση τιμή - Διάμεσος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Δ **2** Γ **3** Β **4** **α)** α, **β)** Γ, **γ)** Δ

5 Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $\bar{x}=7$, **β)** $\bar{x}=5{,}5$, **γ)** $\bar{x}=-\frac{4}{7}$, **δ)** $\bar{x}=\frac{12}{350}$

2 **α)** $\delta=1{,}5$, **β)** $\delta=2$, **γ)** $\delta=101$, **δ)** $\delta=-1$

3 **α)** $\bar{x}_A=17{,}9$, $\bar{x}_B=18{,}6$, **β)** Ο μαθητής Β, **γ)** $\delta_A=18$, $\delta_B=19$

4 **α)** $\bar{x}=199{,}9$, **β)** $\delta=200$, **γ)** $\bar{x}'=200{,}58$

5 **α)**

Θερμοκρασία	Συχνότητες	Σχετ. Συχνότητες %
10	5	16,67
12	5	16,67
14	9	30
16	6	20
17	2	6,66
18	3	10
Σύνολο	30	100

β) $\bar{x} = 14$, $\delta = 14$

6 **α)**

Ηλικία παιδιών	Συχνότητες	Σχετ. Συχνότητες %
0 – 2	50	25
2 – 4	40	20
4 – 6	60	30
6 – 8	30	15
8 – 10	10	5
10 – 12	10	5
Σύνολο	200	100

β) $\bar{x}=4{,}4$

7 $\bar{x}=24{,}72$

8 **α)** i)

Τιμές	Συχνότητες
45	1
46	1
47	2
48	1
49	4
50	3
51	2
52	3
53	1
54	2
Σύνολο	20

ii) Μ= 49,9

β) i)

Τιμές	Συχνότητες
45 – 47	2
47 – 49	3
49 – 51	7
51 – 53	5
53 – 55	3
Σύνολο	20

ii) Μ′= 50,4.

iii) Η τιμή Μ.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1
Εμβαδά επίπεδων σχημάτων Πυθαγόρειο θεώρημα

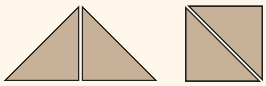
1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

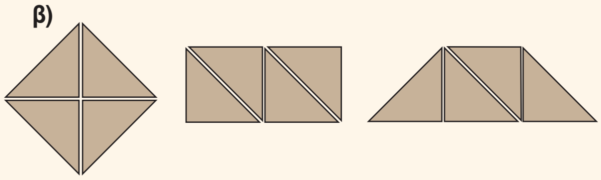
1 Το σχήμα Α.

2 Και τα τρία έχουν εμβαδόν 39.

3 **α)**



β)



1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ 2Δ 3Δ 4Α 5Β 6Α

2 1Α 2Β 3Γ 4Β 5Γ 6Α 7Β 8Α 9Β 10Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 32 cm^2=0,0032 m^2 312 cm^2=0,0312 m^2
127km^2=127.000 m^2 710 dm^2=7,1 m^2
12720 mm^2=0,01272 m^2 212 dm^2=2,12 m^2
1280 mm^2=0,00128 m^2 79 km^2=79.000.000 m^2

2 12 m^2=120.000 cm^2 175 dm^2=17.500 cm^2
456 m^2=4.560.000 cm^2 136 m^2=1.360.000 cm^2
3 km^2=30.000.000.000 cm^2 1750 mm^2=17,5 cm^2
256 km^2=2.560.000.000.000 cm^2

3 12 km^2=12.000.000.000.000 mm^2
431 m^2=431.000.000 mm^2
17 dm^2=170.000 mm^2
236 cm^2=23.600 mm^2

4 7233 mm^2=0,000000007233 km^2
4321 cm^2=0,0000004321 km^2
6322 dm^2=0,00006322 km^2
14632 mm^2=0,000000014632 km^2
560 m^2=0,00056 km^2

5 **α)** 13850 mm^2=0,013850 m^2
670 cm^2=0,067 m^2
13,7 dm^2=0,137 m^2
13850 mm^2<670 cm^2<13,7 dm^2<0,23 m^2<0,48 m^2
β) 32 dm^2=0,32 m^2
23270 mm^2=0,02327 m^2
1356 cm^2=0,1356 m^2
23270 mm^2<1356 cm^2<32 dm^2<1,23 m^2

6 **α)** m^2, **β)** km^2, **γ)** στρέμμα, **δ)** cm^2, **ε)** cm^2

1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ, 2Γ, 3Β, 4Α, 5Γ, 6Β, 7Α, 8Β

2 1Γ, 2Γ, 3Α, 4Α, 5Α, 6Γ, 7Β, 8Α, 9Γ, 10Α, 11Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Ε=225 cm^2

2 Ε=12.600 cm^2

3 Υπολογίζουμε το εμβαδόν του ροζ σχήματος και το εμβαδόν του κίτρινου σχήματος, τα οποία είναι ίσα με 48□.

4 **α)** Παρατηρούμε τις διαστάσεις του τριγώνου ΑΕΔ.
β) Συγκρίνουμε τα εμβαδά των τριγώνων με το εμβαδόν του τετραγώνου.

5 Είναι $E_1=E_2=x^2+3x$.

6 Ε=64 cm^2

7 Το κόστος θα είναι 11.477,76 €.

8 Συγκρίνουμε τις διαστάσεις των τριγώνων με τις διαστάσεις των ορθογωνίων.

9 **α)** Οι πλευρές των τριγώνων είναι 18 m και (30–x) m,
β) x=6 m.

10 **α)** Συγκρίνουμε τα εμβαδά των τριγώνων με το εμβαδόν του τετραγώνου.
β) Συγκρίνουμε τα (ΜΔΒ), (ΔΝΒ) με τα (ΜΑΒ), (ΝΓΒ) αντίστοιχα.

11 $E_1=15\ cm^2$ $E_2=12\ cm^2$ $E_3=7{,}5\ cm^2$
$E_4=16\ cm^2$ $E_5=16\ cm^2$ $E_6=15\ cm^2$
$E_7=9\ cm^2$ $E_8=16\ cm^2$ $E_9=18{,}5\ cm^2$
$E_{10}=10\ cm^2$ $E_{11}=11\ cm^2$ $E_{12}=22\ cm^2$

12 (ΑΒΓΔ)=22,5 cm^2

13 x=10 cm, x=6 cm, x=10 cm, x=6 cm.

14 Ε=60 cm^2, Ε=34 cm^2, Ε=32 cm^2,
Ε=24 cm^2, Ε=81 cm^2, Ε=12,5 cm^2.

15 $E=169$ τ.μ.

16 **α)** $E_{σαλ}=34\ m^2$ $E_{κουζ}=12\ m^2$ $E_{γραφ}=9\ m^2$
$E_{wc}=4{,}5\ m^2$ $E_{υπν1}=12\ m^2$ $E_{μπαλ}=7{,}5\ m^2$
$E_{υπν2}=10\ m^2$
β) $E_{διαδ}=10{,}5\ m^2$, **γ)** $E_{βερ}=49\ m^2$

17 **α)** 56800 €, **β)** 1136 κλήματα

1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** Β **3** Γ **4** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $E_1=16\ m^2$, $E_2=6{,}76\ m^2$, $E_3=0{,}36\ m^2$.

2 Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

3 **α)** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για την τριάδα 6 cm, 8 cm, 10 cm.
β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για τις τριάδες 12 cm, 16 cm, 20 cm και 3 cm, 4 cm, 5 cm.

4 $E=64\ dm^2$

5 $E=5{,}41\ m^2$

6 Αποδεικνύουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

7 $Π=40$ dm, $E=96\ dm^2$

8 $x=4$ m.

9 Οι τοποθεσίες Α, Δ.

Κεφάλαιο 2

Τριγωνομετρία - Διανύσματα

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** **α)** Β, **β)** Δ

3 $θ \longrightarrow 1,\ φ \longrightarrow \frac{5}{2},\ ω \longrightarrow \frac{3}{2},\ y \longrightarrow \frac{5}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x = 6{,}92$ cm **β)** $x = 11{,}9$ cm
γ) $x = 16{,}64$ cm **δ)** $x = 10$ cm

2 Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2.

3 Έχουμε ότι: $ΑΓ = 6{,}93$ cm, $ΒΓ = 8$ m, $\hat{B} = 60^\circ$, εμβαδόν $E = 13{,}86\ cm^2$ και $υ = 0{,}87$ cm (το ύψος από το Α).

4 Η απόσταση είναι 34,93 m.

5 $h = 10{,}74$ m.

6 Ο χαρταετός βρίσκεται σε ύψος 102,67 m.

7 **α)** $ΒΔ = (90–x)$ cm, **β)** $εφθ = \frac{25}{90-x}$, **γ)** $εφθ = \frac{35}{x}$.
δ) Τα κλάσματα των ερωτημάτων (β) και (γ) είναι ίσα για $x = 52{,}5$ cm.

2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Β **γ)** Δ **δ)** Γ

2 Β **3** Β **4** Α **5** δ) και στ)

6 **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ,
στ) Σ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Σ

7 **α)** ΔΑΒ, $συν\hat{ΑΔΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ **β)** ΑΒΓ, $ημ\hat{ΑΒΓ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$
γ) ΑΕΓ, $συν\hat{ΑΕΓ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $ημ\hat{A} = \frac{4}{5}$, $συν\hat{A} = \frac{3}{5}$, $ημ\hat{Γ} = \frac{3}{5}$, $συν\hat{Γ} = \frac{4}{5}$
β) $ημ\hat{A} = 0{,}94$, $συν\hat{A} = 0{,}35$, $ημ\hat{Γ} = 0{,}35$, $συν\hat{Γ} = 0{,}94$
γ) $ημ\hat{B} = 0{,}79$, $συν\hat{B} = 0{,}61$, $ημ\hat{Γ} = 0{,}61$, $συν\hat{Γ} = 0{,}79$

2 $ημω = \frac{4}{5}$.

3 Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $ημω < 1$ και $συνω < 1$.

4 $ΟΔ = 15$ m, $ΑΓ = 6$ m, $ΒΔ = 9$ m.

2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Γ

2 **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x = 7{,}04$ cm **β)** $x = 2{,}67$ cm **γ)** $x = 4{,}2$ cm

2 **α)** $x = 11{,}01$ cm **β)** $x = 5{,}74$ cm **γ)** $x = 4{,}77$ cm
δ) $x = 4{,}93$ cm **ε)** $x = 5{,}96$ cm.

3 Τα μήκη των συρματόσχοινων που αντιστοιχούν στις γωνίες 55° και 70° είναι 9,77 m και 8,51 m αντίστοιχα.

4 $ΑΓ = 10$ m, $ΑΒ = 9{,}74$ m

5 **α)** $ημ56^\circ > ημ37^\circ > ημ20^\circ > ημ16^\circ$
β) $συν20^\circ > συν25^\circ > συν28^\circ > συν36^\circ$
γ) $εφ89^\circ > εφ51^\circ > εφ22^\circ > εφ18^\circ$

6 $ΑΒ = 1{,}55$ m, $ΓΔ = 1{,}2$ m

7 $ΑΗ = 19{,}56$ m, $ΑΜ = 36{,}9$ m

8 $ΓΣ = \frac{6371}{συν89{,}05^\circ}$

2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45°, και 60°

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) →i), β) →iii), γ) →i), δ) →v), ε) →iii), στ) →v)

2 Β

3 α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ **4** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 α) $\alpha = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ $\beta = \frac{10\sqrt{3}}{6}$

α) $\beta = 7$ cm $\alpha = 7\sqrt{2}$ cm

2 α) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β.

β) $\eta\mu\hat{A} = \frac{5}{13}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{12}{13}$

3 Εκτελούμε τις πράξεις μετά από αντικατάσταση των τριγωνομετρικών αριθμών.

4 α) $A = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ β) $A = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ γ) $A = 1$

5 ΠΒ = 2598 m

6 $AB = 4\sqrt{2}$ m, $A\Delta = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ m

7 $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{3}$ m

8 α) $\theta = 30^\circ$ β) $AE = 4\sqrt{3}$ m γ) ΕΔ = 9,1 m

9 $\Pi = 18 + 4\sqrt{3}$

10 $\Gamma\Delta = 7 + 3\sqrt{2}$

11 Πρώτο θα φθάσει το σπουργίτι από το Β.

12 15,98 m

2.5 Η έννοια του διανύσματος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

2 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

3 α) $\vec{AB} = \vec{E\Delta} = \vec{O\Gamma} = \vec{ZO}$

β) $\vec{AZ} = \vec{BO} = \vec{\Gamma\Delta} = \vec{OE}$

γ) $|\vec{B\Gamma}| = |\vec{EZ}| = |\vec{EO}| = |\vec{E\Delta}|$

4 δ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Ίσα: $\vec{AB} = \vec{E\Delta}$, $\vec{B\Gamma} = \vec{ZE}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{AZ}$

Αντίθετα: $\vec{AB}$ και $\vec{\Delta E}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{EZ}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{ZA}$

2 Ίσα: $\vec{\theta}$, $\vec{\zeta}$

Αντίθετα: $\vec{\lambda}, \vec{\varepsilon}$

3 Δεν είναι ίσα.

4 α) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\delta}|$, $|\vec{\gamma}| = |\vec{\varepsilon}| = |\vec{\zeta}|$ και $|\vec{\iota}| = |\vec{\kappa}|$

β) $\vec{\gamma}, \vec{\zeta}$, γ) $\vec{\iota}$, $\vec{\kappa}$

5 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{10}$ cm, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ cm, $|\vec{\gamma}| = 4$ cm, $|\vec{\delta}| = 5$ cm

6 Παρατηρούμε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7 α) $(\vec{F_1}, \vec{F_3}, \vec{F_5})$ και $(\vec{F_2}, \vec{F_4}, \vec{B})$

β) $(\vec{F_3}, \vec{F_1})$, $(\vec{F_5}, \vec{F_1})$, $(\vec{F_4}, \vec{F_2})$, $(\vec{B}, \vec{F_2})$,

γ) $\vec{F_4}$, $\vec{F_2}$

δ) $\vec{F_3}$, $\vec{F_5}$

2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) Γ, β) Β, γ) Γ, δ) Β, ε) Α

2 α) $\vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{A\Delta}$, β) $\vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$,

γ) $\vec{\Gamma B} - \vec{\Gamma A} = \vec{AB}$, δ) $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$

3 Β **4** α) Δ, β) Γ, γ) Α, δ) Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του πολυγώνου ή του παραλληλογράμμου.

2 α) $\vec{A\Delta}$, β) $\vec{0}$, γ) $\vec{\Delta\Gamma}$

3 α) $\vec{A\Gamma}$, β) $\vec{B\Delta}$, γ) $\vec{\Delta\Gamma}$

4 α) $\vec{AO}$, β) $\vec{O\Gamma}$, γ) $\vec{AO}$, δ) $\vec{O\Gamma}$

Είναι ίσες οι διαφορές α), γ) και β) δ).

5 α) $\vec{A\Gamma}$, β) $\vec{EB}$, γ) $\vec{A\Gamma}$, δ) $\vec{A\Delta}$

8 Χρησιμοποιούμε την ισότητα $\vec{\Gamma M} = \vec{MB}$ αφού το Μ είναι μέσο του ΓΒ.

10 Χρησιμοποιούμε τις ισότητες $\vec{N\Gamma} = -\vec{N\Delta}$ και $\vec{AM} = -\vec{BM}$.

2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) Β, β) Γ, γ) Α

2 Γ **3** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

2 $|\vec{B_2}| = 135\sqrt{2}$ N **3** $|\vec{F}| = 15000\sqrt{3}$ N

4 $|\vec{B_1}| = |\vec{B_2}| = 100\sqrt{2}$ N **5** $|\vec{B_1}| = 400$N

Κεφάλαιο 3
Μέτρηση κύκλου

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Εγγεγραμμένες: α, η   Επίκεντρες: γ, ε, θ
2 **α)** Β, **β)** Α
3 **α)** Α, **β)** Β, **γ)** Β, **δ)** Γ
4 Γ **5** **α)** Γ, **β)** Γ, **γ)** Β, **δ)** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $\varphi = 110^\circ$, $\omega = 250^\circ$ **β)** $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 40^\circ$
γ) $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 60^\circ$
2 $A\widehat{M}B = 135^\circ$ **3** $\overset{\frown}{MN} = 95^\circ$ **4** $\varphi = 30^\circ$
5 $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$, $\overset{\frown}{\Delta B} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 135^\circ$, $\overset{\frown}{A\Gamma} = 45^\circ$
6 $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $B\Gamma = 3$ cm, $A\Gamma = 3\sqrt{3}$ cm.
7 $x = 65^\circ$, $y = 80^\circ$
8 $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\hat{\Delta} = 130^\circ$
9 $\varphi = 60^\circ$

3.2 Κανονικά πολύγωνα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Β **γ)** Β **δ)** Β **ε)** Γ
2 **α)** Γ **β)** Α **γ)** Α
3 **α)** Β **β)** Β **γ)** Γ **δ)** Β **ε)** Β **στ)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3	60°	120°
5	108°	72°
6	120°	60°
10	144°	36°

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	165°
30°	150°
72°	108°
20°	160°

2 $\nu = 10$ **3** $\omega = 60^\circ$, $\varphi = 120^\circ$ **4** $\nu = 12$
5 **α)** δεν υπάρχει, **β)** δεν υπάρχει.
6 Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2.
7 Το τετράγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία.
8 Αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες με ΚΛ, όπου ΚΛ = ΑΒ και υπολογίζουμε τις γωνίες.

3.3. Μήκος κύκλου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Ακτίνα ρ	5	6	4	3	2	9
Μήκος κύκλου L	31,4	37,68	25,12	18,84	12,56	56,52

2 Β

3 Οι λόγοι είναι: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{L_2}{L_3} = \frac{2}{3}$, $\frac{L_3}{L_1} = 3$.

$\frac{L_1}{2\rho} = \pi$, $\frac{L_2}{4\rho} = \pi$, $\frac{L_3}{6\rho} = \pi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Η διαφορά είναι $\frac{10}{\pi}$.
2 $\rho = 0{,}56$ m **3** **α)** 2,5 cm **β)** 5π
4 **α)** 2 προς 1 **β)** 2 προς 1 **5** 188,4 cm
6 4 στροφές **7** 318,47 στροφές **8** 6.369,43 km

3.4 Μήκος τόξου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 $90^\circ \to \frac{\pi}{2}$, $60^\circ \to \frac{\pi}{3}$, $180^\circ \to \pi$

$270^\circ \to \frac{3\pi}{2}$, $45^\circ \to \frac{\pi}{4}$, $360^\circ \to 2\pi$

2 Α

3

Τόξο σε μοίρες	30°	90°	135°	225°	100°	210°	60°	270°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Τόξο σε μοίρες	60°	15°	120°	270°	180°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	π

2 $\ell = 4\pi$ **3** $\ell = 15{,}7$ cm **4** $\ell = 15{,}7$ cm
5 $\rho = 20$ cm
6 Είναι ίσα μόνο αν είναι τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων.
7 $\ell_{AB} = \frac{\pi}{4}$ cm, $\ell_{\Gamma\Delta} = \frac{3\pi}{8}$ cm, $\ell_{ZE} = \frac{\pi}{2}$ cm

3.5 Εμβαδόν κυκλικού τόξου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Β **2** Β **3** Δ

4

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm	3 cm	2,5 cm	$\sqrt{300}$
Εμβαδόν κύκλου Ε	78,5cm^2	28,26cm^2	19,625cm^2	942cm^2

5

Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν
1 cm	6,28 cm	3,14 cm^2
2 cm	12,56 cm	12,56 cm^2
3 cm	18,84 cm	28,26 cm^2
4 cm	25,12 cm	50,24 cm^2
ρ cm	6,28ρ cm	3,14ρ^2 cm^2
2ρ cm	12,56ρ cm	12,56ρ^2 cm^2
3ρ cm	18,84ρ cm	28,26ρ^2 cm^2
4ρ cm	25,12ρ cm	50,24ρ^2 cm^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 ρ = 10 cm **2** Ε = 15,7 cm^2
3 L = 31,4 cm, Ε = 78,5 cm^2
4 Κατασκευάζουμε κύκλο με ακτίνα ρ = 14,14 cm.
5 ρ = 1,69 cm **6** Ε = 0,1256 m^2 = 1256 cm^2
7 Ε = 56,52 cm^2 **8** 12,56 cm.

3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν
ρ = 2 cm	μ = 60°	Ε = $\frac{2\pi}{3}$ cm^2
ρ = 8 cm	μ = 45°	Ε = 8π cm^2
ρ = 3 cm	μ = 120°	Ε = 3π cm^2

2 ρ = 9 cm, Ε = 27π cm^2
3 Α **4** Β **5** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 μ = 45° **2** ρ = 1,95 m
3 Ε = 125,6 cm^2 **4** Ε = 508,68 cm^2
5 Ε = 5,5 cm^2 **6** Ε = 4893 cm^2
7 **α)** Ε = 38,88 cm^2 **β)** Ε = 38,88 cm^2
γ) Ε = 50,24 cm^2 **δ)** Ε = 13,76 cm^2
ε) Ε = 36,48 cm^2
8 Ε=31,35 cm^2

Κεφάλαιο 4

Γεωμετρικά στερεά Μέτρηση στερεών

4.1 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σ **2** Λ **3** Σ **4** Λ **5** Σ **6** Σ **7** Σ **8** Β **9** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** ΑΒ, ΕΖ, ΑΔ, ΕΘ, **β)** ΔΓ, ΘΗ, ΕΖ, **γ)** ΕΑ, ΕΘ, ΖΒ, ΖΗ
2 **α)** Παράλληλο είναι το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ΓΔ, ΔΖ, **β)** Τα επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη (ΑΕ, ΕΔ), (ΕΗ, ΗΖ) και (ΘΗ, ΗΖ) τέμνουν το p στις ΑΕ, ΕΗ και ΘΗ αντίστοιχα.
4 ΑΒ = 10, **5** ΑΗ = 13 cm
6 **α)** Είναι κάθετες στα τεμνόμενα ζεύγη (ΔΓ, ΒΓ) και (ΔΒ, ΑΓ) στα σημεία τομής τους Γ, Κ αντίστοιχα.
β) ΚΓ = $6\sqrt{2}$ cm
7 39 m.

4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Β, **2** **α)** Β, **β)** Β, **3** **α)** Γ, **β)** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Περίμετρος βάσης	8	7	4	5	0,5
Ύψος υ	5	10	6	2,8	10
Εμβαδόν E_π	40	70	24	14	5

2 E_π = 112 cm^2
3

α	2	3	2	3	5
β	3	5	5	2	2
γ	4	2	13	5	2
υ	5	4	4	8	5
E_π	45	40	80	80	45

4 6 κιλά χρώμα, **5** $E_{ολ} = 240 + 8\sqrt{3}$ cm^2
6 Χρειάστηκαν 16 m^2 ύφασμα.
7 **α)** E_π = 94,2 cm^2 και $E_{ολ}$ = 150,72 cm^2
β) E_π = 75,36 cm^2 και $E_{ολ}$ = 100,48 cm^2
γ) E_π = 502,4 cm^2 και $E_{ολ}$ = 541,65 cm^2
δ) E_π = 502,4 cm^2 και $E_{ολ}$ = 602,88 cm^2
8

ακτίνα βάσης (cm)	3	2	10	10	1
ύψος κυλίνδρου (cm)	5	4	1	2	9
εμβαδόν E_π (cm^2)	94,2	50,24	62,8	125,6	56,52
ολικό εμβαδόν (cm^2)	150,72	75,36	690,8	753,6	62,8

9 9,61 €

4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Εμβαδόν βάσης (cm)	12	8	5
ύψος (cm)	3	7	6
όγκος (cm^3)	36	56	30

2

Εμβαδόν βάσης (cm)	22	9	20
ύψος (cm)	4	8	6
όγκος (cm^3)	88	72	120

3

ύψος κυλίνδρου	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
εμβαδόν παράπλ. E_π	16π cm^2	32π cm^2	48π cm^2	64π cm^2
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$	48π cm^2	64π cm^2	80π cm^2	96π cm^2
όγκος V	32π cm^3	64π cm^3	96π cm^3	128π cm^3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $E_\pi = 60$ cm^2 **β)** $E_{ολ} = 72$ cm^2 **γ)** $V = 30$ cm^3

2 $V = 216\sqrt{3}$ cm^3

3 Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο του $E_{ολ}$.

4 **α)** $E_\beta = 18$ cm^2, περίμετρος = 22 cm
β) ΑΒ = 2 cm, ΓΔ = 10 cm

5 ρ = 4,62 cm, V = 1407,45 cm^3

6 **α)** 120π cm^3 **β)** 20000 mm^3

7 28,26 mg πίσσας.

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Λ **2** Σ **3** Σ **4** Λ **5** Λ **6** Σ **7** Γ **8** Β **9** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

ύψος (cm)	8	12	6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	12
απόστημα (cm)	10	12,64	8
εμβ. παρ.επιφ.(cm^2)	240	202,24	192
όγκος (cm^3)	384	256	288

2 $V = 480$ cm^3

3 $E_\pi = 324$ cm^2

4 **α)** $E_\pi = 144$ cm^2 **β)** $E_{ολ} = 225$ cm^2

5 α = 11,1 cm

6 $E_\pi = 320$ cm^2, $V = 512$ cm^3

7 $E_{ολ} = 62{,}28$ cm^2

8 Αν $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{9}$ τότε $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{1}{3}$.

9 $V = 1200$ cm^3

10 **α)** $E_\pi = 162$ cm^2 **β)** $E_{ολ} = 255{,}53$ cm^2
γ) $V = 249{,}4$ cm^3

4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Λ **2** Σ **3** Σ **4** Σ **5** Β **6** Γ **7** Α
8 Β **9** Γ **10** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

ύψος (cm)	4	8	10	6,7
ακτίνα βάσης (cm)	3	6	4	6
γενέτειρα (cm)	5	10	10,8	9
όγκος (cm^3)	37,68	301,44	167,46	252,45
εμβ.παράπλ. επιφ. (cm^2)	47,1	188,4	135,6	169,56

2 **α)** $2m^3$, **β)** $4m^3$, **γ)** $8m^3$

3 Το νερό δεν θα ξεχειλίσει.

4 Τουλάχιστον 5 m.

5 $V_{ολ} = 301{,}44$ cm^3, $E_{ολ} = 241{,}15$ cm^2

6 $V = 335$ cm^3

7 **α)** $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$, **β)** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$

8 **α)** $E_{ολ} = 408{,}2$ cm^2, **β)** $V_{ολ} = 628$ cm^3

9 1570 m^2 ύφασμα.

10 Περίπου 60 min.

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σ **2** Σ **3** Σ **4** Λ **5** Σ
6 Γ **7** Δ **8** Γ **9** Δ **10** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **Α.**

ακτίνα σφαίρας (cm)	1	2	10	6
εμβαδόν επιφάνειας (cm^2)	4π	16π	400π	144π
όγκος (cm^3)	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{32\,\pi}{3}$	$\dfrac{4000\,\pi}{3}$	288π

Β.

ρ	1m	10cm	3,2dm	8dm	3m
Ε	4π m^2	400π cm^2	$40{,}96\pi$ dm^2	256π dm^2	36π m^2
V	$\dfrac{4}{3\pi}$ m^2	$\dfrac{4000\,\pi}{3}$ cm^2	$43{,}69\pi$ dm^3	$682{,}67\pi$ dm^3	36π m^3

2 $E = 50{,}24$ cm^2, $V = 33{,}5$ cm^3

3 $E = 100{,}48$ m^2, $V = 133{,}97$ m^2

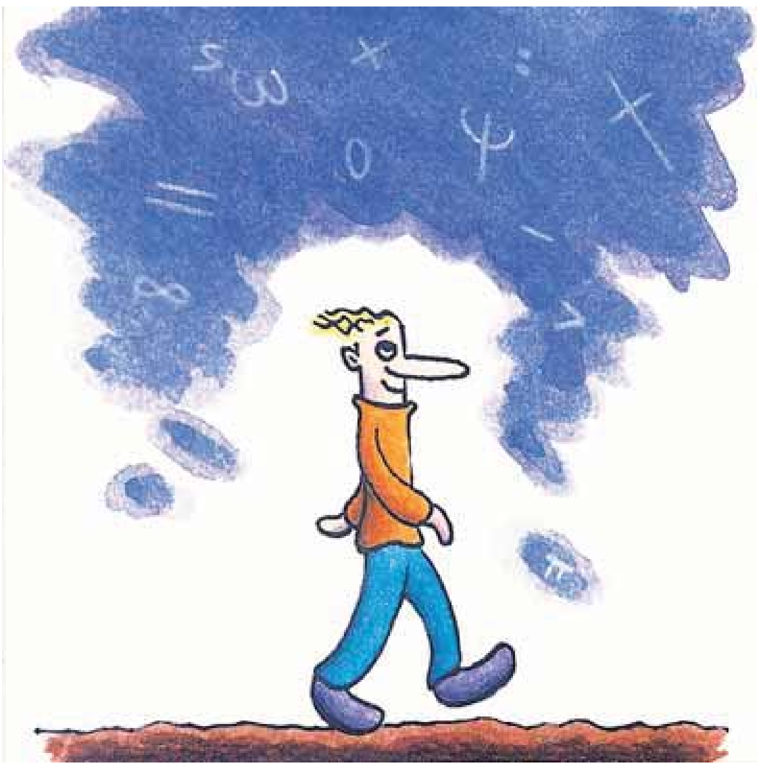
4 Με 2, 6, 10 αντίστοιχα. **5** 157 κιλά χρώμα.

6 Οι κίτρινες μπάλες έχουν μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια και μεγαλύτερο συνολικό όγκο.

7 Ο όγκος που απομένει είναι 244.053 cm^3.

8 δ = 50 cm **9** $V = 200{,}96$ cm^3.

ευρετήριο όρων



βιβλιογραφία

1. Andibi, André: “*Nouveau Transmath, 5e*”, Nathan, 2000.
2. Bolt, Brian: “*A Mathematical Jamboree*”, Cambridge University Press, 1995.
3. Buckwell, Geoff: “*Work Out Core Mathematics Gcse/ks4*”, Palgrave Macmillan, 1995.
4. Crisler, Nancy - Froelich, Gary: “*Discrete Mathematics through Applications*”. W. H. Freeman, 2006.
5. Gérald, Nadine - Jacob, Nadine - Riou, Elisabeth - Courivaud, Claude - Dodard, Alain - Roncin, Pascal: “*Trapèze. Math*ématiques 3e”, Bréal Rosny, 1999.
6. Hoffmann, Banesh: “*About Vectors*”, Dover Publications, 1966.
7. Jacobs, Harold R.: “*Elementary Algebra*”, W. H. Freeman, 1979.
8. Jacobs, Harold R.: “*Mathematics. A Human Endeavor*”, W. H. Freeman, 1994.
9. Laborde, Jean-Marie and Bellemain, Franck: “*Cabri - Geometry II*”, Texas Instruments, 1993.
10. Lanoëlle, Alain - Nassiet, Francis - Perrinaud, Jean-Claude - Porté, Daniel - Rivoallan, Louis: “*Dimathème, 4ème*”, Didier, 1998.
11. National Council of Teachers of Mathematics: “*Principles and Standards for School Mathematics*”, NCTM, 2000.
12. Parker, Marla: “*She Does Math ! : Real - Life Problems from Women on the Job*”, Mathematical Association of America, 1995.
13. Rayner, Douglas: “*General mathematics: revision and practice*”, Oxford University Press, 1984.
14. Serra, Eric - Barberi, Daniel - Concas, Christine - Escalier, Elian - Germoni, Louis - Germoni, Michèle - Pupin, Cathy: “*Math 3e*”, Bordas, 1999.
15. Serra, Michael: “*Discovering Geometry: An Inductive Approach (Student)*”, Key Curriculum Press, 1997.
16. Serra, Michael: “Discovering Geometry: An Investigative Approach”, Key Curriculum Press, 2002.
17. The Consortium for Mathematics and its Applications: “*Mathematics; Modelling Our World*”, W. H. Freeman, 1998.
18. Γαβρίλης, Κωνσταντίνος - Γαβρίλης, Δημήτρης: «*Μαθαίνοντας στο Internet Μαθηματικά*», Εκδόσεις Καστανιώτη, 2001.
19. Δημητρακόπουλος, Δημήτρης: «*Καινοτόμες προσεγγίσεις των Μαθηματικών μέσα από εφαρμογές*», Εκδόσεις Προμηθεύς, 2000.
20. Τουμάσης, Μπάμπης: «*Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*», Εκδόσεις Κωστόγιαννου, 1999.
21. Τουμάσης, Μπάμπης: «*Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*», Εκδόσεις Gutenberg, 2002.
22. Τουμάσης, Μπάμπης - Αρβανίτης, Τάσος: «*Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*», Εκδόσεις Σαββάλα, 2003.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	,01908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,2698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				