ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μέτρηση Κύκλου

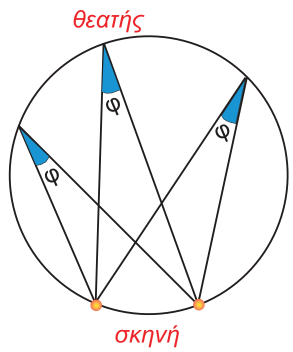
Εισαγωγικο Σημειωμα

*Το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου**, το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην **προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π**, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.*

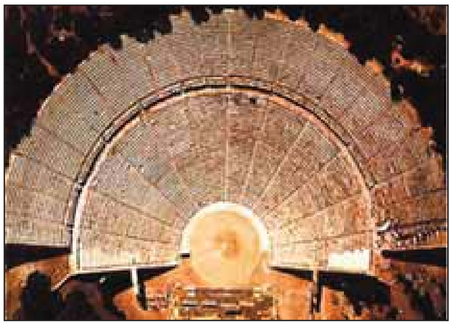
*Ο αριθμός **π** προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.*

Θα εξετάσουμε, επιπλέον, τα κανονικά πολύγωνα: πολύγωνα με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι πολύ γνωστά σχήματα σ' εμάς, αλλά τώρα θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα στοιχεία τους και την κατασκευή τους.

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

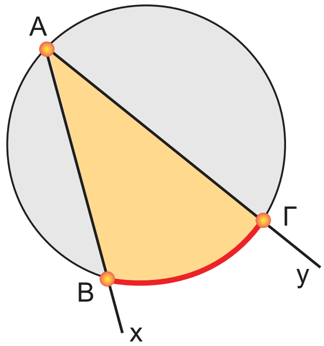


Έχετε αναρωτηθεί ποτέ γιατί τα θέατρα, όπως η Επίδαυρος, έχουν «κυκλικό» σχήμα;



Γιατί από κάθε κάθισμα, που βρίσκεται πάνω στον κύκλο, ο θεατής «βλέπει τη σκηνή με την ίδια γωνία φ».

Οι γωνίες που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα έχουν την κορυφή τους (θεατής) πάνω στον κύκλο και οι δύο πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.



Μια γωνία **$x\hat{A}y$** που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).

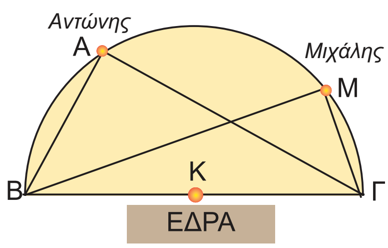
Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο Πανεπιστήμιο γίνεται μάθημα στο Αμφιθέατρο. Δύο φοιτητές, ο Αντώνης και ο Μιχάλης, κάθονται σε μία σειρά θέσεων που σχηματίζει με την έδρα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στο διάλειμμα ο Αντώνης μέτρησε την απόστασή του από τα δύο άκρα Β, Γ της έδρας και βρήκε ότι ΑΒ = 3 m, ΑΓ = 4 m, ενώ έχουμε ότι ΒΓ = 5 m. Ο Μιχάλης, αντίστοιχα, βρήκε ότι $BM = 2\sqrt{5}$ m και $M\Gamma = \sqrt{5}$ m.



α) Να εξετάσετε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Τι γωνίες είναι οι $\hat{A}$ και $\hat{M}$;

γ) Τι συμπεραίνετε γενικά για κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

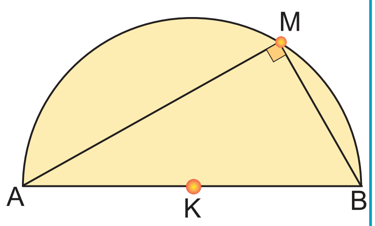
$AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = B\Gamma^2$

$BM^2 + M\Gamma^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 25 = B\Gamma^2$

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα έχουμε ότι: $\hat{A} = 90°$ και $\hat{M} = 90°$, δηλαδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.

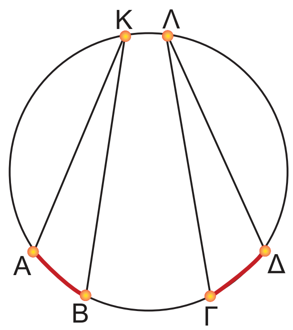
γ) Συμπεραίνουμε ότι η προηγούμενη διαπίστωση ισχύει γενικά, δηλαδή:



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Μια ορθή γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που είναι η πλήρης γωνία. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της.

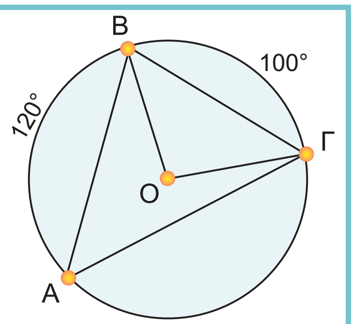
Συγκεκριμένα:



- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

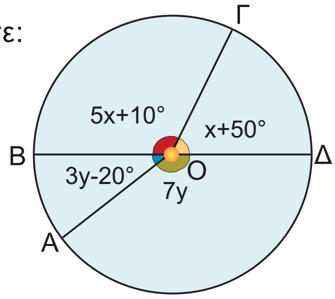


Λύση: Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι και αυτή ίση με 100°. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με την επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι: $B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = 50°$. Ομοίως προκύπτει ότι: $B\hat{\Gamma}A = 60°$. Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, θα ισχύει ότι: $A\hat{B}\Gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$.

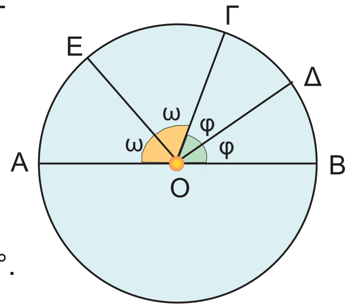
Λύση: Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $5x + 10° + x + 50° = 180°$ ή $6x = 120°$, επομένως $x = 20°$.
Ομοίως, τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{BA}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $3y - 20° + 7y = 180°$, επομένως $10y = 200°$ ή $y = 20°$.
Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{AB} = 3y - 20° = 60° - 20° = 40°$,
$\overset{\frown}{B\Gamma} = 5 \cdot 20° + 10° = 110°$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 20° + 50° = 70°$, $\overset{\frown}{\Delta A} = 7 \cdot 20° = 140°$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

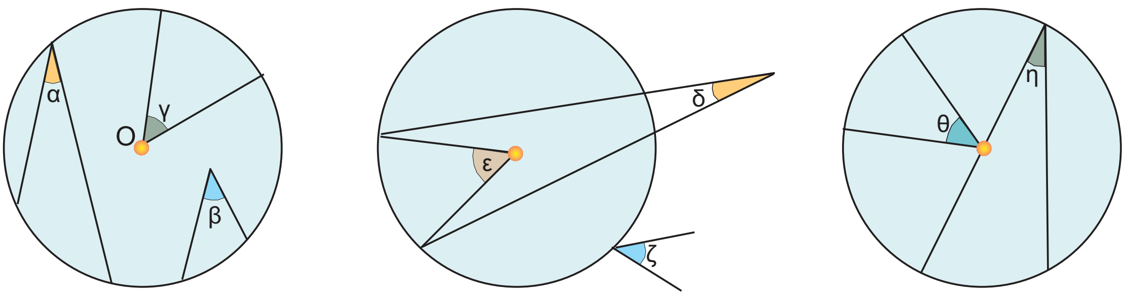
Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$, $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$.

Λύση: Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $B\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ και $A\hat{O}E = E\hat{O}\Gamma = \omega$.
Όμως, $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}\Gamma + E\hat{O}\Gamma = \varphi + \omega$.
Έχουμε $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}A = 180°$, δηλαδή $2\varphi + 2\omega = 180°$, οπότε $\varphi + \omega = 90°$.
Άρα $\Delta\hat{O}E = 90°$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$ είναι ίσο με 90°.



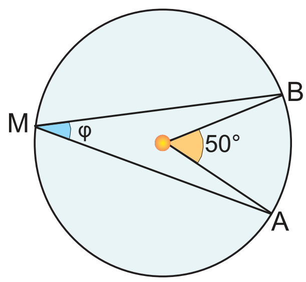
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;



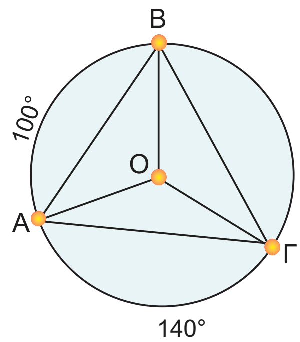
2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β)	Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι:	50°	25°	100°



3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
β)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$ είναι:	120°	140°	100°
γ)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
δ)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ είναι:	60°	70°	50°



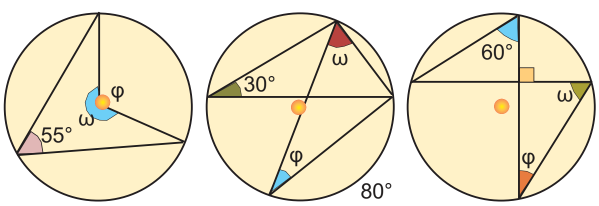
4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι:
Α: 80° Β: 180° Γ: 90° Δ: 45°.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

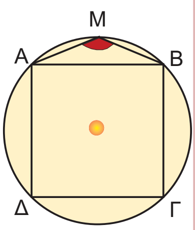
		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β)	Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ)	Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ)	Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

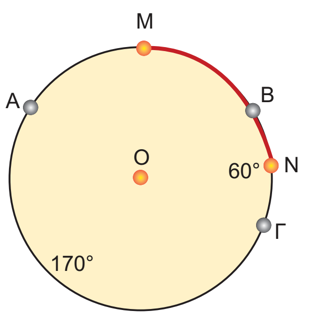
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



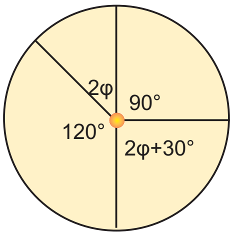
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{M}B$.



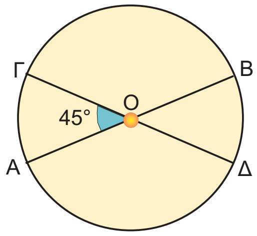
3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{B\Gamma}$ = 60° και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ = 170°, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{MN}$.



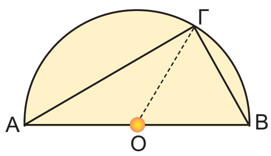
4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα.



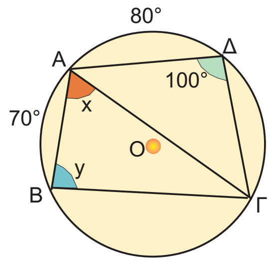
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΔΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΑ}$, αν γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Ο}Γ = 45°$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 2\overset{\frown}{ΒΓ}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

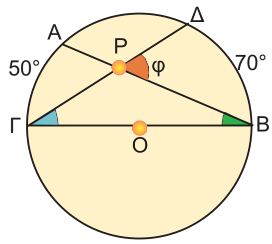


7 Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y στο παρακάτω σχήμα.

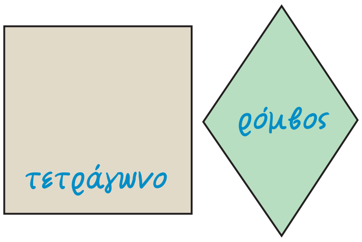


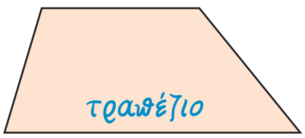
8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 100°$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 160°$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 80°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $\overset{\frown}{ΑΓ} = 50°$ και $\overset{\frown}{ΒΔ} = 70°$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.

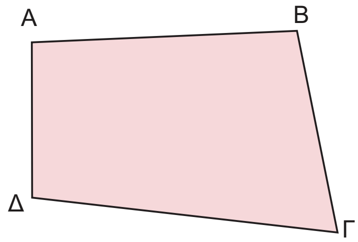


3.2. Κανονικά πολύγωνα



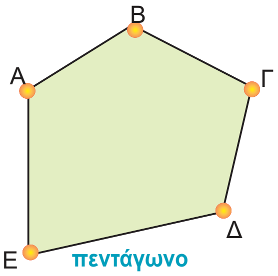


Στην Α′ Γυμνασίου μελετήσαμε διάφορα είδη τετραπλεύρων, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, το ρόμβο, το τετράγωνο και το τραπέζιο.

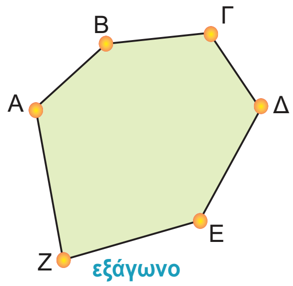


Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές.

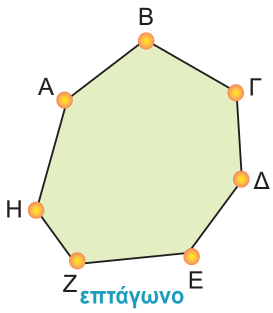
Μπορούμε να σχηματίσουμε και πολύγωνα με 5, 6, 7, ... κορυφές, τα οποία αντίστοιχα λέγονται πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο, ... , κ.τ.λ.



πεντάγωνο



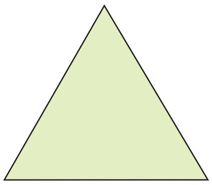
εξάγωνο

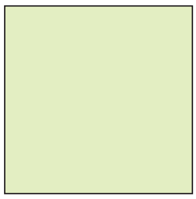


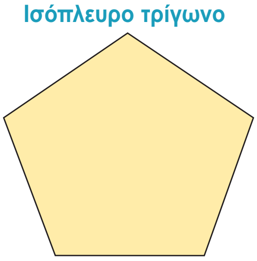
επτάγωνο

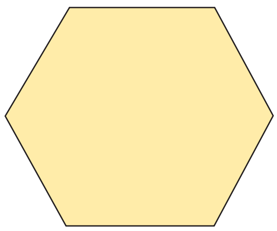
- Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε **ν-γωνο**. Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο.

- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες. π.χ.


Ισόπλευρο τρίγωνο


Τετράγωνο


Κανονικό πεντάγωνο


Κανονικό εξάγωνο

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να χωρίσετε έναν κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, $\overset{\frown}{EZ}$, $\overset{\frown}{ZA}$.

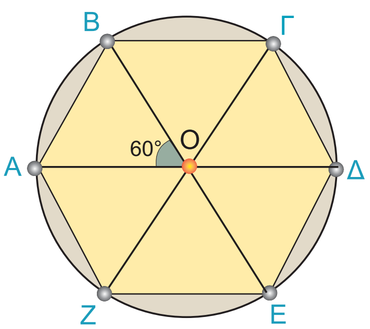
β) Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ;

γ) Τι είδους πολύγωνο είναι το ΑΒΓΔΕΖ;

Λύση

α) Αφού όλος ο κύκλος έχει μέτρο 360°, για να τον χωρίσουμε σε έξι ίσα τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο $\frac{360°}{6} = 60°$.

Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες ω = 60°, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα.



β) Γνωρίζουμε από την Α' Γυμνασίου ότι ίσα τόξα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές, επομένως:
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.

γ) Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ του εξαγώνου είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου με αντίστοιχο τόξο, μέτρου:
$\overset{\frown}{AZ} + \overset{\frown}{ZE} + \overset{\frown}{E\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 60° + 60° + 60° + 60° = 240°$.

Επομένως, $A\hat{B}\Gamma = \frac{1}{2}240° = 120°$.

Ομοίως, έχουμε ότι:
$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}Z = E\hat{Z}A = Z\hat{A}B = 120°$.
Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, οπότε είναι κανονικό.

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

1ο βήμα:
Υπολογίζουμε τη γωνία $\omega = \frac{360°}{\nu}$.

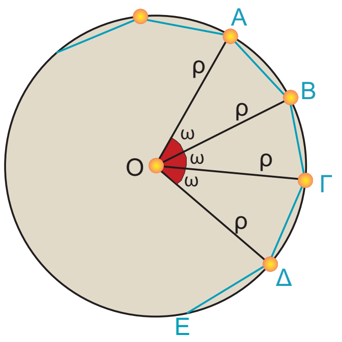
2ο βήμα:
Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ω, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

3ο βήμα:
Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

Είδαμε ότι με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζεται ένα κανονικό εξάγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πολυγώνου.

Επίσης, λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο κύκλο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε ένα κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και γενικά ένα κανονικό ν-γωνο.

Γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου



➤ Κεντρική γωνία ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).

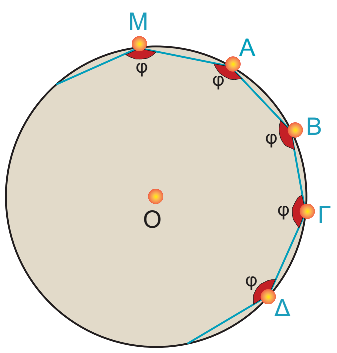
Είδαμε προηγουμένως ότι για να χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, θεωρούμε ν διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $ω = \frac{360°}{ν}$.

Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού ν-γώνου.

Επομένως:

Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $ω = \frac{360°}{ν}$.

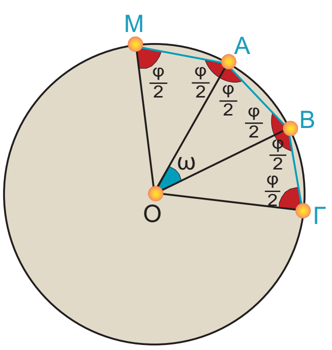
➤ Γωνία ν-γώνου



Σε οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο οι γωνίες $M\hat{A}B$, $A\hat{B}Γ$, $B\hat{Γ}Δ$, ... κ.ο.κ. είδαμε ότι είναι ίσες, αφού είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και τις συμβολίζουμε με φ.

● Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία του κανονικού ν-γώνου**.

Ας δούμε τη σχέση της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ του ν-γώνου. Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα.



Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\frac{φ}{2}$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι:

$$ω + \frac{φ}{2} + \frac{φ}{2} = 180° \quad ή \quad ω + φ = 180° \quad ή \quad \boxed{φ = 180° – ω}$$

Επομένως:

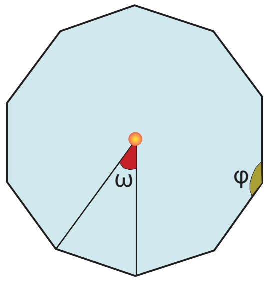
Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.
β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162°.

Λύση: α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:

$$\varphi = 180° - \omega = 180° - \frac{360°}{10} = 180° - 36° = 144°.$$



β) Ισχύει ότι: $\varphi = 180° - \omega$ ή $162° = 180° - \frac{360°}{\nu}$ ή

$$\frac{360°}{\nu} = 180° - 162° \text{ ή } \frac{360°}{\nu} = 18° \text{ ή } \nu = \frac{360}{18} \text{ ή } \nu = 20.$$

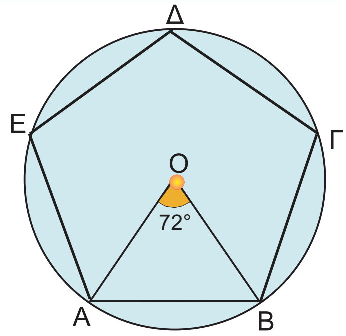
Δηλαδή, το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία φ = 162°.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

Λύση:

- Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = \frac{360°}{5} = 72°$.
- Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$.
- Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.

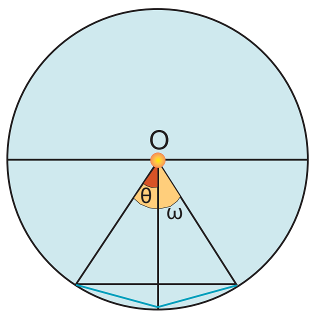


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση: Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι $\omega = \frac{360°}{\nu}$ και $\theta = \frac{360°}{2\nu}$.

Επομένως, $\theta = \frac{\omega}{2}$.



Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές. Οι διχοτόμοι, όπως γνω-ρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου είναι:	120°	30°	60°
β)	Η κεντρική γωνία κανονικού δωδεκάγωνου είναι:	120°	30°	60°
γ)	Η κεντρική γωνία κανονικού πεντάγωνου είναι:	52°	72°	132°
δ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 36°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	6	10	12
ε)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 10°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	12	24	36

2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 40°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	50°	90°	140°
β)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 72°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	108°	18°	172°
γ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 30°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	150°	30°	60°

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 15 πλευρές.	α) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	β) Η γωνία του πολυγώνου είναι:	24°	156°	72°
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 150°	γ) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	δ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	15	12	8
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135°	ε) Η κεντρική του γωνία είναι:	35°	45°	65°
	στ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	8	12	18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3		
5		
6		
10		

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	
	150°
72°	
	160°

2 Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

3 Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού εξαγώνου και να επαληθεύσετε ότι: $ω + φ = 180°$.

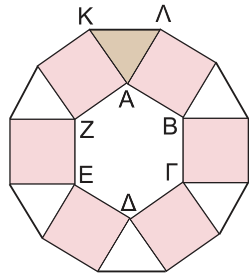
4 Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:
α) με κεντρική γωνία $ω = 16°$.
β) με γωνία $φ = 130°$.

6 Να κατασκευάσετε κανονικό οκτάγωνο.

7 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

8 Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξάγωνου, κατασκευάζουμε τετράγωνα εξωτερικά του εξαγώνου. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι και κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

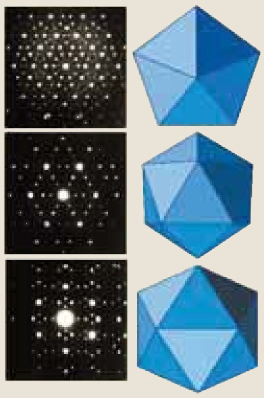
Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο “συμμετρικός” τρόπος χρωματισμού.

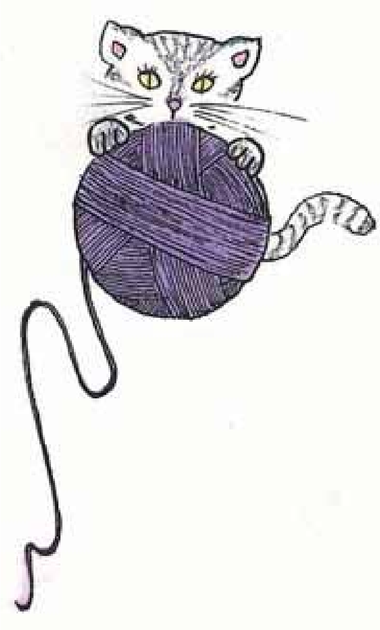
Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ’ αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για το λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.

Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ου αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.



Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

3.3. Μήκος κύκλου



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα νόμισμα των 2 €. Αφού μετρήσετε τη διάμετρό του δ, να βάλετε μελάνι γύρω - γύρω από το νόμισμα και να το κυλίσετε κάθετα στο χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή.

α) *Το μήκος L που διαγράφει είναι το μήκος του κύκλου. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:*

δ =	
L =	
$\frac{L}{δ}$ **=**	

β) *Ας δούμε κατόπιν μερικές προσεγγιστικές μετρήσεις από την Αστρονομία για την «περιφέρεια» και τις διαμέτρους κάποιων πλανητών. Συμπληρώστε τον πίνακα:*

Πλανήτες	L	δ	$\frac{L}{δ}$
Ερμής	15320 km	4879 km	
Αφροδίτη	38006,6 km	12104 km	
Άρης	21333,2 km	6794 km	
Γη	40053,8 km	12756 km	
Σελήνη	10914,6 km	3476 km	

Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

δ=	2,5 cm
L=	7,85 cm
$\frac{L}{δ}$ **=**	3,14 cm

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{L}{δ}$ είναι περίπου 3,14 για όλους τους πλανήτες. Αυτός ο σταθερός λόγος ονομάστηκε από τους αρχαίους Έλληνες ως «ο αριθμός π», ο πιο διάσημος και αξιοσημείωτος απ' όλους τους αριθμούς (βλέπε Ιστορικό σημείωμα).

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta} = \pi$, προκύπτει ότι:

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{L = \pi\delta} \quad \text{ή} \quad \boxed{L = 2\pi\rho}$$

Παρατήρηση:

*Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον **π** την προσεγγιστική τιμή **3,14**.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση: Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$L = 2\pi\rho$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9{,}42}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}5$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση: Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$. Επομένως:

$\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2\pi}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2 \cdot 3{,}14}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + 1{,}59$.

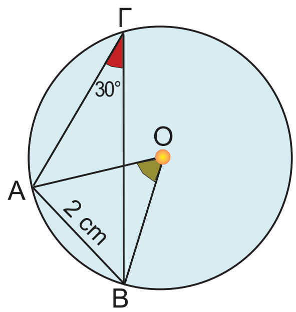
Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο παρακάτω σχήμα.

Λύση: Η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με 30°, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{O}B = 2 \cdot 30° = 60°$. Επομένως, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι:

$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

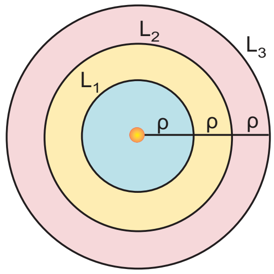
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	5 cm		4 cm	3 cm		9 cm
Μήκος κύκλου L		37,68 cm			12,56 cm	

2. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: τετραπλασιάζεται Δ: παραμένει το ίδιο.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ, 2ρ, 3ρ αντίστοιχα.
Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2\rho}$	$\frac{L_2}{4\rho}$	$\frac{L_3}{6\rho}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος έχει μήκος 20 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

2 Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,5 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού.

3 Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 2 προς 1. Να βρείτε το λόγο:
α) των διαμέτρων τους.
β) των ακτίνων τους.

5 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5 cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

6 Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν ρ_A = 2 cm και ρ_B = 8 cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

7 Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20km/h;

8 Γνωρίζουμε ότι ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος 40.000 km περίπου. Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαιρική να βρείτε την ακτίνα της.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \ldots$$

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. *Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο* **π** *θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο* **π** *είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το* $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, *όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε,* $\pi \approx 3{,}16049\ldots$

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του **π**. *Το συνδύασαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.*

Εκτιμήσεις του π

Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρούν προσεγγίσεις του **π** *με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \le \pi \le 3\,\frac{10}{70}$

$3{,}14085\ldots \le \pi \le 3{,}142857$

$\pi \approx 3\,\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}$ $(=3{,}1416\ldots)$

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3{,}1415926 \le \pi \le 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\cdots$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707*

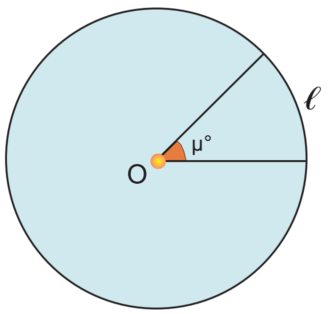
CDC 6600 *(1967): 500.000*

JOLIANN DASE *(1824 - 1861): 200*

ENIAC *(H/Y)(1949): 2037*

Ιαπωνική Ομάδα *(1993): 16.777.216* $(=2^{24})$.

3.4. Μήκος τόξου



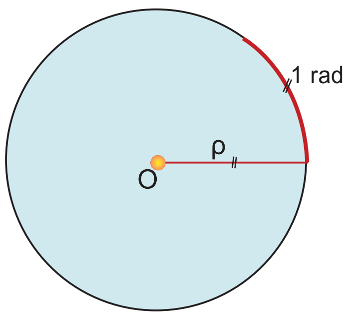
Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την **απλή μέθοδο** των τριών.

Ένα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος 2πρ.
Ένα τόξο μ° πόσο μήκος έχει;

Τόξο	Μήκος
360°	2πρ
μ°	ℓ

Έχουμε: $\dfrac{360}{2\pi\rho} = \dfrac{\mu}{\ell}$ ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

Το μήκος ενός τόξου μ° ισούται με: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.



Ακτίνια (rad)

Αρκετές φορές ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου θεωρούμε το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα ρ του κύκλου. Αυτή η μονάδα μέτρησης λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**.
Αν χρησιμοποιήσουμε ακτίνια,τότε:

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $\ell = \alpha\rho$.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$

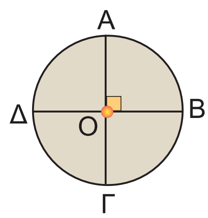
$$\ell = \alpha\rho$$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή $\pi \cdot \dfrac{\mu}{180} = \alpha$ ή $\boxed{\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}}$.

Η αναλογία αυτή εκφράζει τη σχέση των μοιρών με τα ακτίνια.

Σχόλιο:

Ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα από δύο κάθετες διαμέτρους:
$\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{ΓΔ} = \overset{\frown}{ΔΑ}$.
Καθένα από αυτά τα τόξα έχει μέτρο 90° και ονομάζεται τεταρτοκύκλιο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω τόξα:

$\frac{\pi}{4}$ *rad,* $25°$, $48°$, $\frac{3\pi}{2}$ *rad,* $225°$, $\frac{11\pi}{6}$ *rad.*

Λύση: Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα τόξα, θα πρέπει είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε μοίρες είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε rad. Ας κάνουμε και τις δύο μετατροπές:

Μοίρες	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$25°$	$48°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$225°$	$\frac{11\pi}{6} = 330°$
rad	$\frac{\pi}{4}$	$25° = \frac{5\pi}{36}$	$48° = \frac{4\pi}{15}$	$\frac{3\pi}{2}$	$225° = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Επομένως, ισχύει ότι:

$25° < 45° < 48° < 225° < 270° < 330°$ ή $\frac{5\pi}{36} < \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα τόξο 30° έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι: $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$1{,}3 = \pi\rho\frac{30}{180}$$

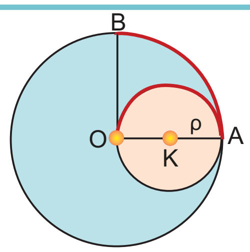
$$1{,}3 = \pi\rho\frac{1}{6}$$

$$\pi\rho = 7{,}8$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} = 2{,}48 \text{ (cm)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο διπλανό σχήμα είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.



Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AO}$ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:

$\ell_1 = 2\pi\rho\frac{180}{360} = \pi\rho$. Στον κύκλο (Ο, 2ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο,

οπότε έχει μήκος: $\ell_2 = 2\pi \cdot (2\rho)\frac{90}{360} = \pi\rho$. Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος.

Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα των τόξων της πρώτης γραμμής από μοίρες σε ακτίνια (rad) της δεύτερης γραμμής.

Μοίρες	90°	60°	180°	270°	45°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Αν το μήκος ℓ ενός τόξου μ° είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: μ = 45° Β: μ = 90° Γ: μ = 60° Δ: μ = 180°

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	30°				100°		60°	270°
Τόξο σε ακτίνια		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	Τόξο σε ακτίνια
	$\frac{\pi}{3}$
15°	
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{3\pi}{2}$
180°	

2 Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας ρ = 8 cm.

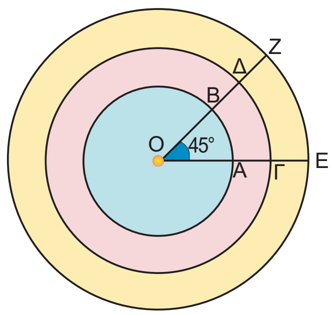
3 Σ' έναν κύκλο που έχει μήκος 188,4 cm να βρείτε το μήκος τόξου 30°.

4 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ = 10 cm.

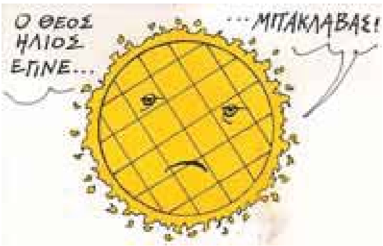
5 Ένα τόξο 45° έχει μήκος 15,7 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

6 Δίνονται 2 τόξα π ακτινίων. Να εξετάσετε αν είναι πάντοτε ίσα.

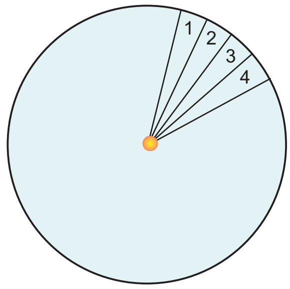
7 Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων 1 cm, 1,5 cm και 2 cm και μια επίκεντρη γωνία 45°. Να βρείτε τα μήκη των τόξων που αντιστοιχούν στη γωνία αυτή.

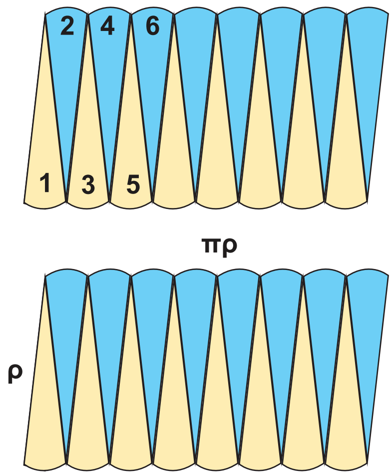


3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:





Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με **πρ**, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με **ρ · πρ**.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $Ε = πρ^2$

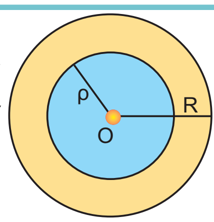
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση: Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο $L=2πρ$, δηλαδή $6,28=2 \cdot 3,14$ ρ, οπότε ρ=1 (cm).
Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $Ε = πρ^2 = 3,14 \cdot 1^2 = 3,14$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος. Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα $ρ = \sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση: Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών $Ε_1= πR^2$ και $Ε_2= πρ^2$ των δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως, $Ε = Ε_1 – Ε_2 = πR^2 – πρ^2$.
Αφού $Ε = Ε_2$, θα έχουμε:
$πR^2 – πρ^2 = πρ^2$ ή $πR^2 = 2πρ^2$ ή $R^2 = 2ρ^2$ ή $R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$.
Οπότε: R = 2 cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σε τρία μεγέθη: τη μικρή, τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά. Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση: Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα.

Η μικρή έχει εμβαδόν: $E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^2 = 415,27$ (cm^2).

Η μεσαία έχει εμβαδόν: $E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615,44$ (cm^2).

Η μεγάλη έχει εμβαδόν: $E_3 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 = 854,87$ (cm^2).

Το κόστος του 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι:

Μικρή	$\frac{700}{415,27} = 1,69$ (λεπτά/cm^2)
Μεσαία	$\frac{850}{615,44} = 1,38$ (λεπτά/cm^2)
Μεγάλη	$\frac{1190}{854,87} = 1,39$ (λεπτά/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Η ακτίνα του είναι ίση με:
Α: 4 Β: 2 Γ: 6 Δ: 5.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 4 cm. Το εμβαδόν του είναι:
Α: 12 cm^2 Β: $\frac{4}{\pi}$ cm^2 Γ: 9 cm^2 Δ: 16 cm^2.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν του:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm		2,5 cm	
Εμβαδόν κύκλου Ε		28,26 cm^2		942 cm^2

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

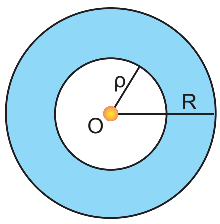
Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		
ρ cm		
2ρ cm		
3ρ cm		
4ρ cm		

Τι παρατηρείτε;

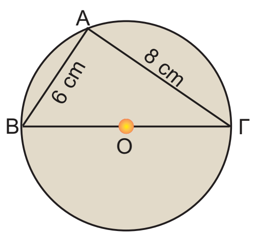
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος (Ο, ρ) έχει διάμετρο 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει τετραπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο, ρ).

2 Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.



3 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



4 Ένας κύκλος έχει ακτίνα 10 cm. Να κατασκευάσετε κυκλικό δίσκο με διπλάσιο εμβαδόν.

5 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να βρεθεί (κατά προσέγγιση) η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου που είναι ισοδύναμος (δηλαδή έχει το ίδιο εμβαδόν) με το τετράγωνο.

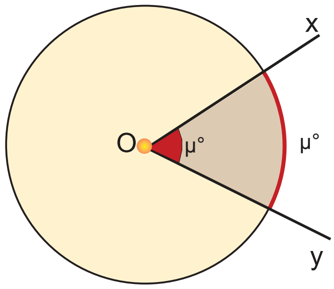
6 Λυγίζουμε ένα σύρμα μήκους 1,256 m, ώστε να σχηματίσει κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί στο συρμάτινο κύκλο.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α = 6 cm.

8 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 144π cm^2. Να βρείτε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°.

3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ας θεωρήσουμε ένα κύκλο (Ο, ρ) και μια επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ μέτρου μ°. Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στη γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται **κυκλικός τομέας γωνίας μ°** του κύκλου (Ο, ρ).



Αν η επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ είναι μέτρου μ°, τότε και το αντίστοιχο τόξο της έχει μέτρο μ°, οπότε βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:

Τόξο σε μοίρες	360°	μ°
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

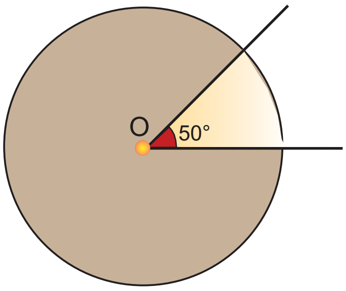
$$\frac{360}{\pi\rho^2} = \frac{\mu}{E} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}}$$

Αν το τόξο έχει μετρηθεί σε ακτίνια και ισούται με α rad, τότε πάλι έχουμε:

Τόξο σε ακτίνα (rad)	2π	α
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\rho^2\alpha}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\rho^2}$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα ρ = 20 m. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει μια δέσμη φωτός που φωτίζει ένα κυκλικό τομέα γωνίας 50°.

α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που φωτίζεται.

Λύση

α) Το εμβαδόν της πλατείας είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256$ (m²).

β) Γνωρίζουμε ότι όλη η πλατεία αντιστοιχεί σε τόξο 360° και έχει εμβαδόν 1256 m². Για να βρούμε το εμβαδόν ε του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο 50°, χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο των τριών, οπότε:

360°	50°
1256	ε

$$\frac{360}{1256} = \frac{50}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \varepsilon = 1256 \cdot \frac{50}{360} = 174{,}44 \text{ (m}^2\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα στον στίβο της σφαιροβολίας ακτίνας ρ = 24 m και γωνίας 65°.

Λύση: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

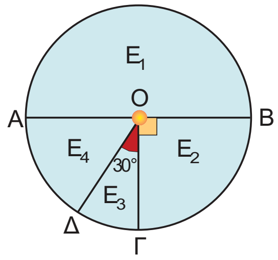
$$E = \pi\rho^2 \frac{\mu}{360} = 3{,}14 \cdot 24^2 \cdot \frac{65}{360} = 326{,}56 \text{ (m}^2\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο παρακάτω κύκλος έχει διάμετρο ΑΒ και εμβαδόν 40 cm². Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4.

Λύση: Έχουμε ότι:

$\Delta\hat{O}\Gamma = 30°$, $\Gamma\hat{O}B = 90°$ και $\Delta\hat{O}A = 90° - \Delta\hat{O}\Gamma = 90° - 30° = 60°$



Επομένως: $E_1 = (\pi\rho^2)\dfrac{180}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{2} = 20\ (cm^2)$.

$E_2 = (\pi\rho^2)\dfrac{90}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{4} = 10\ (cm^2)$.

$E_3 = (\pi\rho^2)\dfrac{30}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{12} = 3{,}33\ (cm^2)$.

$E_4 = (\pi\rho^2)\dfrac{60}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{6} = 6{,}67\ (cm^2)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν κυκλικού τομέα
ρ = 2 cm	μ = 60°	
	μ = 45°	Ε = 8π cm²
ρ = 3 cm		Ε = 3π cm²

2. Σ' έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ... (cm) ο κυκλικός τομέας γωνίας 120° έχει μήκος τόξου 6π (cm) και εμβαδόν .... (cm²). Να συμπληρώσετε τα κενά.

3. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι 12 cm. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 60° έχει εμβαδόν:
Α: 24π (cm²) Β: 36π (cm²) Γ: 54π (cm²) Δ: 108π (cm²).
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι 12,56 cm² και η γωνία του είναι 90°, η ακτίνα του κύκλου είναι: Α: 2 cm, Β: 4 cm, Γ: 9 cm, Δ: 7 cm.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

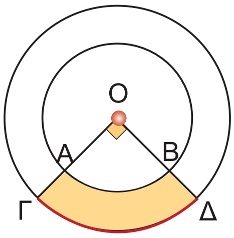
1 Να υπολογιστεί η γωνία κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν ίσο με το $\dfrac{1}{8}$ του εμβαδού του κύκλου.

2 Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 30° έχει εμβαδόν 1 m². Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

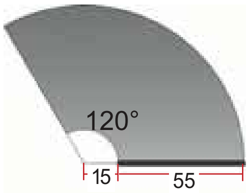
3 Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1256 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 36°.

4 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας 45° είναι 20,25π cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

5 Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $ρ_1$=3 cm και $ρ_2$=4 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

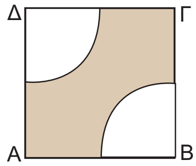


6 Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 120°, να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.

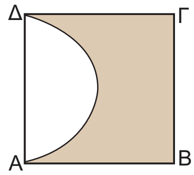


7 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων καμπυλόγραμμων επιφανειών στα παρακάτω τετράγωνα:

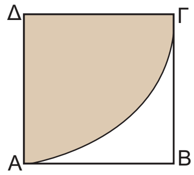
α) ΑΒ=ΒΓ=8 cm



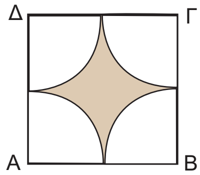
β) ΑΒ = 8 cm



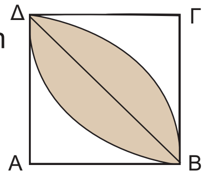
γ) ΑΒ = 8 cm



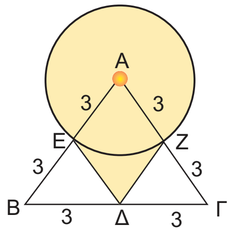
δ) ΑΒ = 8 cm



ε) ΑΒ = 8 cm



8 Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο σχήμα, αν οι αριθμοί εκφράζουν τα μήκη των αντίστοιχων τμημάτων σε cm.



Επανάληψη Κεφαλαίου

Μέτρηση Κύκλου

- **Εγγεγραμμένες γωνίες** ενός κύκλου που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** ή σε **ίσα τόξα** είναι μεταξύ τους **ίσες**.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Κανονικό πολύγωνο: **ίσες πλευρές**, **ίσες γωνίες**
- Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου: $ω = \frac{360°}{ν}$
- Γωνία κανονικού ν-γώνου: $φ = 180° - ω$
- Μήκος κύκλου: $\frac{L}{δ} = π$ ή $L = 2πρ$
- Μήκος τόξου: $\ell = 2πρ \cdot \frac{μ}{360}$ ή $\ell = αρ$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου: $Ε = πρ^2$
- Εμβαδό κυκλικού τομέα: $Ε = πρ^2 \cdot \frac{μ}{360}$ ή $Ε = \frac{αρ^2}{2}$