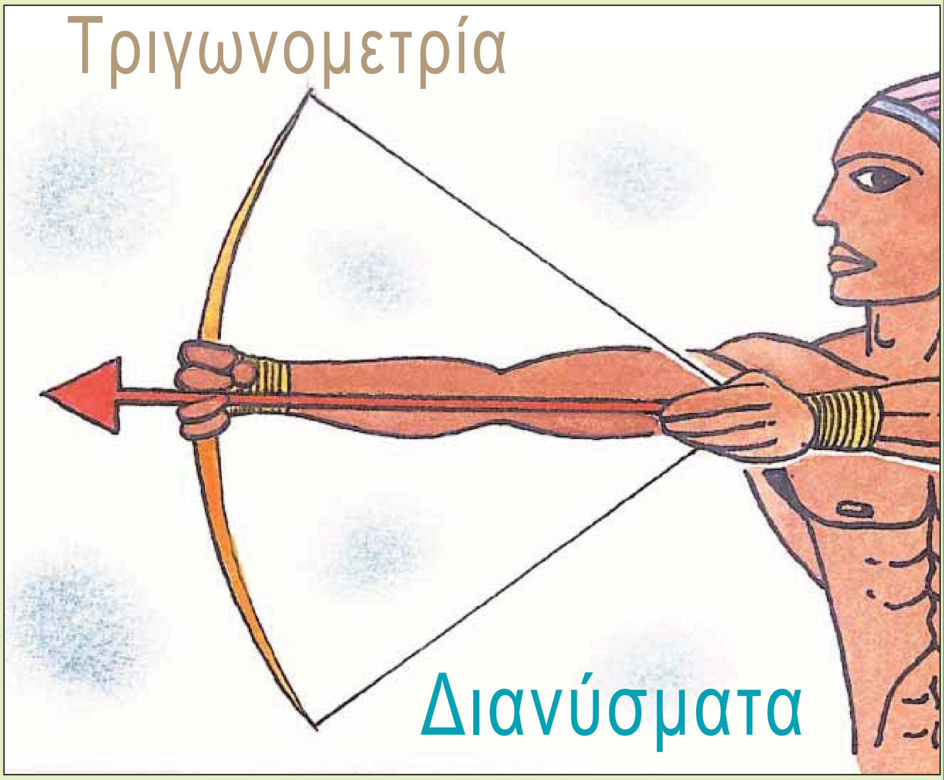
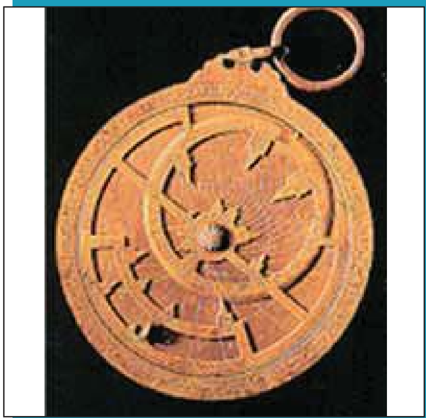
ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο



Εισαγωγικό Σημείωμα



Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ** και τα **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**.

Η Τριγωνομετρία, όπως προδίδει και το όνομά της, ασχολείται με τη μέτρηση των τριγώνων και για την ακρίβεια με τη μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι τη χρησιμοποίησαν με θαυμαστά αποτελέσματα.

Ιδιαίτερα εύστοχη ήταν η εκτίμηση του Γάλλου μαθηματικού D' Alembert το 1789: *«Η τριγωνομετρία είναι η τέχνη να βρίσκεις τα άγνωστα στοιχεία ενός τριγώνου με τα λιγότερα μέσα που διαθέτεις»*.

Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών (**ημίτονο, συνημίτονο** και **εφαπτομένη**) οξείας γωνίας. Θα εξετάσουμε τις μεταβολές τους και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε αρκετά προβλήματα.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα διανύσματα, μια έννοια γνωστή κυρίως από τη Φυσική.

Χρησιμοποιώντας διανύσματα μπορούμε να παραστήσουμε διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως τη δύναμη, την ταχύτητα κ.ά., στα οποία εκτός από το μέτρο τους είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και την κατεύθυνσή τους.

Είναι, λοιπόν, πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τα στοιχεία ενός διανύσματος, να μπορούμε να κάνουμε πράξεις μ' αυτά, καθώς και να τα αναλύουμε σε συνιστώσες.

Αρκετές δραστηριότητες από την καθημερινή μας ζωή και αρκετά παραδείγματα από τη Φυσική θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε πλήρως τη χρήση των διανυσμάτων.

Τι είναι η Τριγωνομετρία;

Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε αρχικά για τις ανάγκες της **Αστρονομίας** και της **Γεωγραφίας**, αλλά χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια πολλών αιώνων και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, στη **Φυσική**, στη **Μηχανική** και στη **Χημεία**.

Οι έννοιες του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των Αστρονόμων της Αρχαιότητας.

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα αστέρια βρίσκονταν πάνω σε μια τεράστια νοητή σφαίρα, στην οποία κινούνταν μόνο οι τότε γνωστοί πλανήτες: Ερμής, Αφροδίτη, Άρης, Δίας, Κρόνος, Σελήνη. Στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν τις αποστάσεις μεταξύ των πλανητών –που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα– οι αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο **Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Πτολεμαίος, ο Ίππαρχος** και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.

Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν τριγωνομετρικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονα, συνημίτονα, εφαπτομένες) γωνιών. Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον 17ο αιώνα μ.Χ. και στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

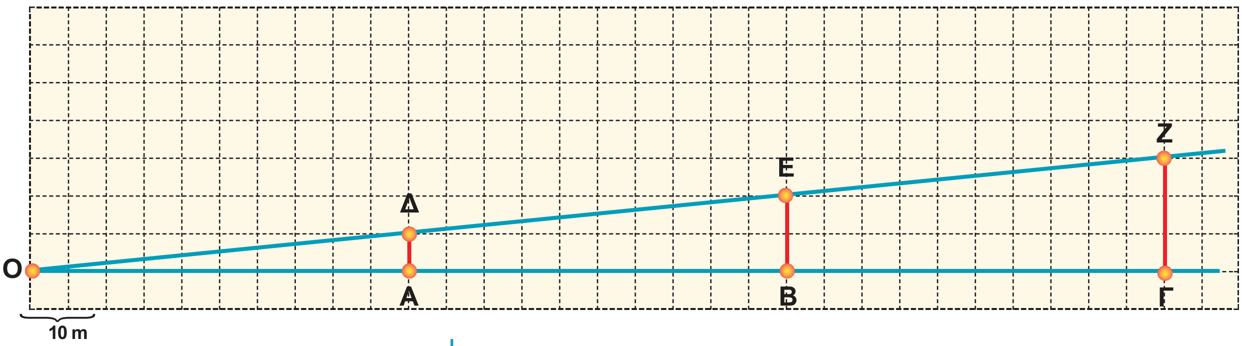
Οι εφαρμογές της Αστρονομίας ήταν πολλές και εντυπωσιακές. Ένα απλό παράδειγμα είναι η ναυσιπλοΐα κατά τη διάρκεια της νύχτας. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν ένα ναυτικό όργανο, τον αστρολάβο, με τον οποίο μετρούσαν ουσιαστικά γωνίες και με τη χρήση της τριγωνομετρίας υπολόγιζαν αποστάσεις και χάραζαν την πορεία τους.

Οι αρχαίοι Έλληνες γνωρίζοντας ότι η Γη είναι σφαιρική χρησιμοποίησαν την Τριγωνομετρία στη Γεωγραφία. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε τριγωνομετρικούς πίνακες στο έργο του «Γεωγραφία», ενώ ο Κολόμβος είχε πάντα μαζί του στα ταξίδια του το έργο του Regiomontanus: «Ephemerides Astronomicae». Παρόλο που η Τριγωνομετρία εφαρμόστηκε αρχικά στη σφαίρα, έχει περισσότερες εφαρμογές στο επίπεδο.

Η Τριγωνομετρία αποτελεί βασικό πεδίο γνώσης, καθώς συμβάλλει στην κατανόηση του χώρου και των ιδιοτήτων του.

Οι εφαρμογές της Τριγωνομετρίας δεν περιορίζονται στη Γεωμετρία, αλλά επεκτείνονται στις βολές στη Φυσική, στην ανάκλαση στην Οπτική, στις αντοχές υλικών στη Στατική και σε άλλους κλάδους των Φυσικών ή ακόμα και των Κοινωνικών επιστημών.

2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ. Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100} = 0{,}1$ σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m. Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι ΟΑ = 50 m και ανεβαίνουμε ΑΔ = 50 · 0,1 m = 5 m.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 5	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} =$
ΟΒ = 100	ΒΕ =	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} =$
ΟΓ = 150	ΓΖ =	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} =$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

Παρατηρούμε ότι ΒΕ = 10, ΓΖ = 15, οπότε οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

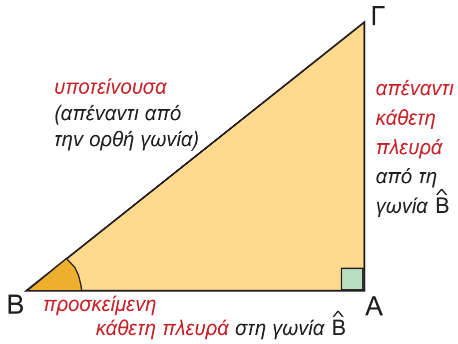
$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

$$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

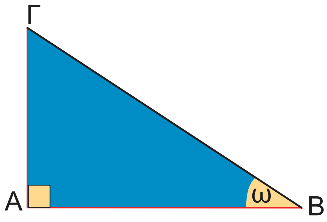
$$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{15}{150} = 0{,}1$$

Αν ονομάσουμε ω τη γωνία που σχηματίζει ο ανηφορικός δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο, τότε οι λόγοι $\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$, $\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$, $\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ και γενικά ο λόγος $\frac{\text{ύψος}}{\text{οριζόντια απόσταση}}$ είναι ο ίδιος για όλα τα σημεία

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ = 90°) η κάθετη πλευρά ΑΓ, ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Β}$» και η ΑΒ «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Β}$».



Φυσικά, προκειμένου για τη γωνία $\hat{Γ}$, η ΑΒ είναι η «απέναντι», ενώ η ΑΓ είναι η «προσκείμενη» κάθετη πλευρά.



της ευθείας ΟΖ. Ο σταθερός αυτός λόγος λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω και γράφουμε εφω = 0,1. Ειδικά, όταν αναφερόμαστε σε δρόμο, όπως παραπάνω, η εφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται **κλίση** του δρόμου.

Σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ω ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται ως εξής:

$$\frac{\textbf{απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}$$

ονομάζεται εφαπτομένη της γωνίας ω και συμβολίζεται με εφω.

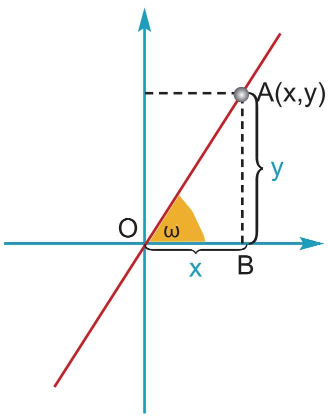
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη της γωνίας ω**.

***Σχόλιο 1*:**

Ας θυμηθούμε την κλίση της ευθείας με εξίσωση y = αx, που συναντήσαμε στην παράγραφο 3.2.

Είδαμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με τον αριθμό α για κάθε σημείο Α της ευθείας με εξίσωση y = αx.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με εξίσωση y = αx με τον άξονα x′x, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:



$$\boxed{\text{εφω} = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = \alpha}$$

Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση y = αx είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x′x.

***Σχόλιο 2*:**

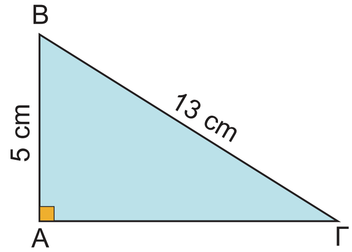
Για να υπολογίσουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 1° – 89°, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254).

Σε επόμενη παράγραφο (§2.3) θα μάθουμε να υπολογίζουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας χρησιμοποιώντας έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 5 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι:



$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Επομένως, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και αντικαθιστώντας με ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 13 cm, έχουμε:

$$5^2 + ΑΓ^2 = 13^2 \text{ ή } 25 + ΑΓ^2 = 169 \text{ ή } ΑΓ^2 = 169 - 25 = 144$$

Επομένως, $ΑΓ = \sqrt{144} = 12$ (cm).

Άρα: $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{12}{5}$ και $\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{5}{12}$.

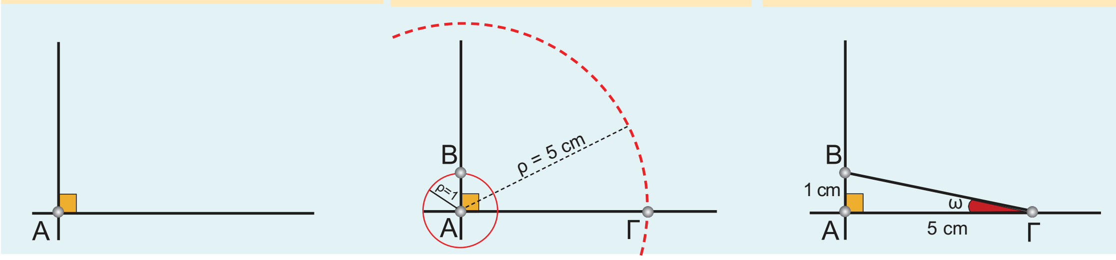
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με εφω = $\frac{1}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$.

Επομένως, για να σχεδιάσουμε μια οξεία γωνία ω με εφω = $\frac{1}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 1 και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με 5.

1ο βήμα	2ο βήμα	3ο βήμα
Κατασκευή ορθής γωνίας	Μέτρηση πλευρών	Κατασκευή τριγώνου



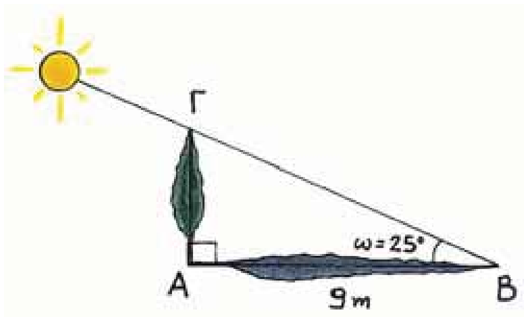
Για τη γωνία ω ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{1}{5}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε το ύψος του κυπαρισσιού του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας το μήκος της σκιάς του και τη γωνία ω.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 9 m και $\hat{B}$ = ω = 25°.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΓ.
Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{B}$.

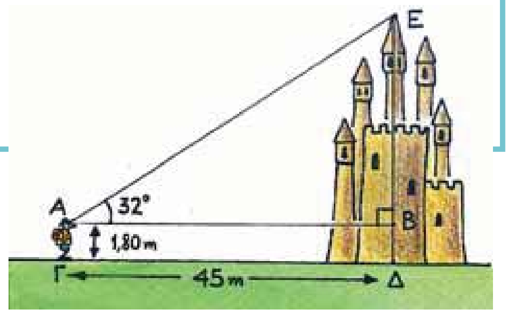
Έχουμε λοιπόν: $εφ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ οπότε



$ΑΓ = ΑΒ \cdot εφ\hat{B}$ άρα $ΑΓ = 9 \cdot εφ25°$.
Με τη βοήθεια του πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι εφ25° = 0,47.
Άρα, ΑΓ = 9 · 0,47 = 4,23, δηλαδή το ύψος του κυπαρισσιού είναι 4,23 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΒ = 45 m και μια οξεία γωνία 32°. Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΒΕ, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32°.

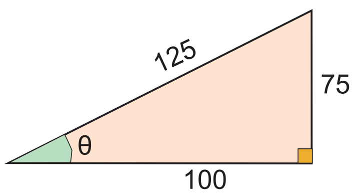
Είναι $εφ32° = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΒΕ}{ΑΒ} = \frac{ΒΕ}{45}$.

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: εφ32° = 0,62, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $0,62 = \frac{ΒΕ}{45}$, οπότε έχουμε: ΒΕ = 45 · 0,62 = 27,9 (m).

Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι:
ΔΕ = ΔΒ + ΒΕ = 1,8 + 27,9 = 29,7 (m).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα είναι εφθ = ...



Α: $\frac{100}{75}$, Β: $\frac{125}{75}$, Γ: $\frac{75}{100}$, Δ: $\frac{75}{125}$.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Στο διπλανό σχήμα είναι:

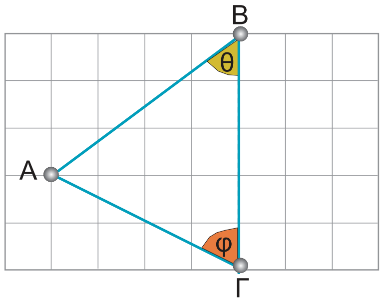
α) εφθ = ...

Α: $\frac{3}{4}$, Β: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{4}{5}$, Δ: $\frac{3}{5}$.

β) εφφ = ...

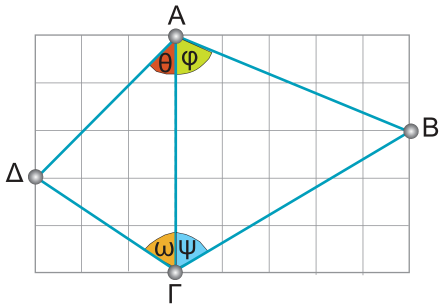
Α: $\frac{4}{3}$, Β: $\frac{3}{4}$, Γ: $\frac{2}{4}$, Δ: 2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



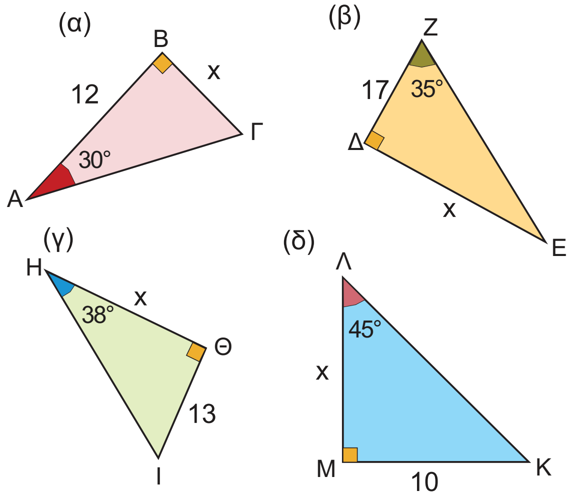
3. Σε κάθε γωνία θ, φ, ω, ψ του διπλανού σχήματος να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της.

Γωνία	Εφαπτομένη
θ	$\frac{5}{3}$
φ	$\frac{5}{2}$
ω	1
ψ	$\frac{3}{2}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

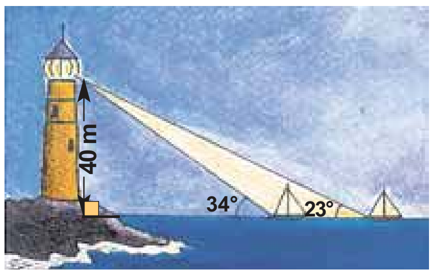
1 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το μήκος x:



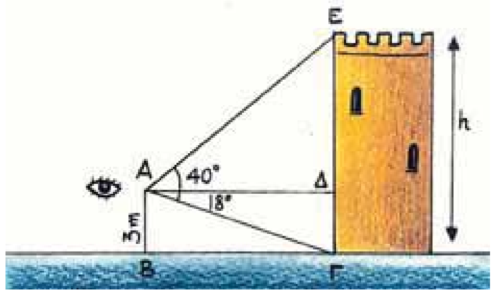
2 Να σχεδιάσετε μια γωνία ω με εφω = 0,7.

3 Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 30°, αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 4 cm;

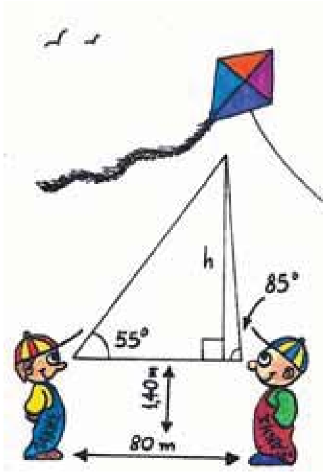
4 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση των δύο πλοίων.



5 Ένας τουρίστας βλέπει την κορυφή ενός πύργου από σημείο Α με γωνία 40° και τη βάση του πύργου με γωνία 18°. Αν γνωρίζετε ότι ΑΒ = 3 m, να υπολογίσετε το ύψος h του πύργου.



6 Την Καθαρά Δευτέρα ο Λάκης και ο Σάκης βλέπουν το χαρτaετό του Μάκη με γωνίες 55° και 85° αντίστοιχα.
Ο Λάκης και ο Σάκης βρίσκονται σε απόσταση 80 m. Να βρείτε σε τι ύψος από το έδαφος έχει ανέβει ο χαρτaετός του Μάκη, αν γνωρίζουμε ότι τα μάτια του Λάκη και του Σάκη βρίσκονται σε ύψος 1,40 m.



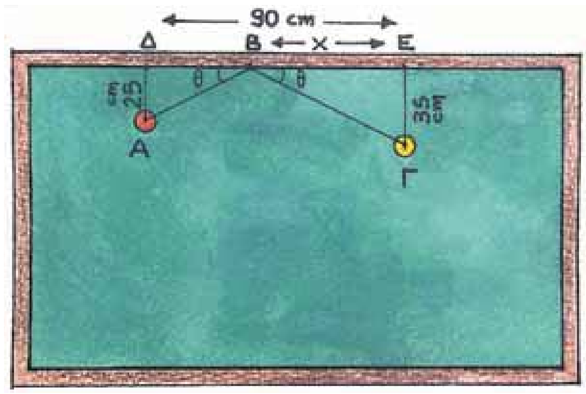
7 Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου.
Δύο μπάλες Α και Γ είναι τοποθετημένες έτσι ώστε, ΔΕ = 90 cm, ΑΔ = 25 cm, ΓΕ = 35 cm και ΒΕ = x cm. Ένας παίκτης θέλει να χτυπήσει τη μπάλα Γ με τη μπάλα Α ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΒΓ του σχήματος.

α) Να εκφράσετε την απόσταση ΒΔ ως συνάρτηση του x.

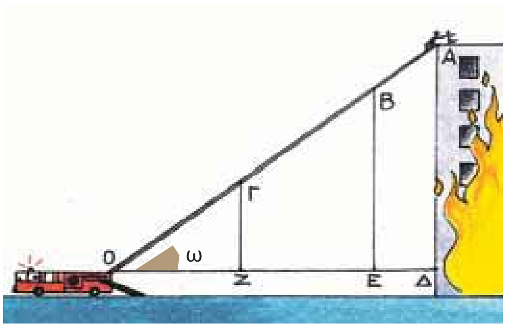
β) Στο τρίγωνο ΑΔΒ να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του x.

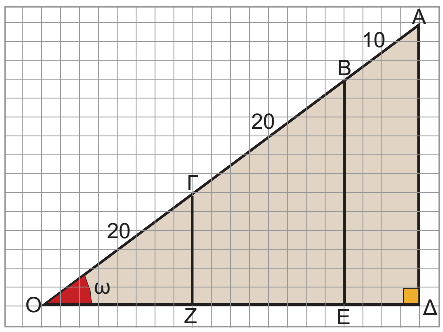
γ) Στο τρίγωνο ΒΕΓ να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του x.

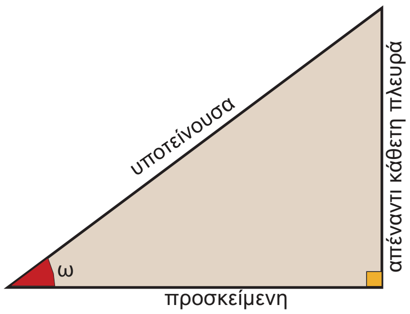
δ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα των ερωτημάτων (β) και (γ), να αποδείξετε ότι το x είναι λύση της εξίσωσης 35(90 – x) = 25x. Να προσδιορίσετε τον αριθμό x.



2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας







Το ημίτονο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ένα πυροσβεστικό όχημα σταματά μπροστά από ένα κτίριο που φλέγεται, για να κατεβάσει έναν άνθρωπο που βρίσκεται στην ταράτσα του κτιρίου. Η σκάλα του οχήματος έχει μήκος ΟΑ = 50 m και το κτίριο έχει ύψος ΑΔ = 30 m. Ο πυροσβέστης που βρίσκεται στην άκρη της σκάλας παίρνει τον άνθρωπο που κινδυνεύει και η σκάλα αρχίζει να μαζεύεται.
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 30	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} =$
ΟΒ = 40	ΒΕ = 24	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} =$
ΟΓ = 20	ΓΖ = 12	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} =$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}, \quad \frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος αυτός παραμένει σταθερός για κάθε διαδοχική θέση της σκάλας. Επίσης, είναι φανερό ότι η γωνία ω στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ που σχηματίζονται, παραμένει σταθερή.

Ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται ως: $\dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

ονομάζεται **ημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **ημω**. Δηλαδή

$$\boxed{ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο της γωνίας ω**.

Το συνημίτονο

Αν συμπληρώσουμε, τώρα, τον παρακάτω πίνακα για το ίδιο σχήμα:

ΟΑ = 50	ΟΔ = 40	$\frac{ΟΔ}{ΟΑ} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
ΟΒ = 40	ΟΕ = 32	$\frac{ΟΕ}{ΟΒ} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$
ΟΓ = 20	ΟΖ = 16	$\frac{ΟΖ}{ΟΓ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

παρατηρούμε ότι σχηματίζεται και ένας δεύτερος σταθερός λόγος:

$$\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται **συνω**.

$$\textbf{συνω} = \frac{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω.**

Παρατηρήσεις:

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

$$\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

είναι μικρότεροι της μονάδας. Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

$$\mathbf{0 < ημω < 1 \quad και \quad 0 < συνω < 1}$$

για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

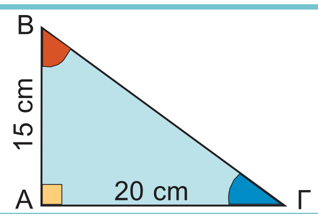
β) Αν τώρα διαιρέσουμε το ημω με το συνω θα προκύψει $\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{ΑΔ}{ΟΑ}}{\frac{ΟΔ}{ΟΑ}} = \frac{ΑΔ}{ΟΔ} = εφω$, όπως φαίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ του σχήματος της προηγούμενης σελίδας. Άρα:

$$\mathbf{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 15 cm και ΑΓ = 20 cm. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.

Τι παρατηρείτε;



Λύση: Για τον υπολογισμό του ημιτόνου ή του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε και το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ οπότε $ΒΓ = \sqrt{625} = 25$ cm.

Άρα: $$ημ\hat{Β} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Β}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$συν\hat{Β} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Β}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$ημ\hat{Γ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$συν\hat{Γ} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε ότι $ημ\hat{Β} = συν\hat{Γ}$ και $ημ\hat{Γ} = συν\hat{Β}$.

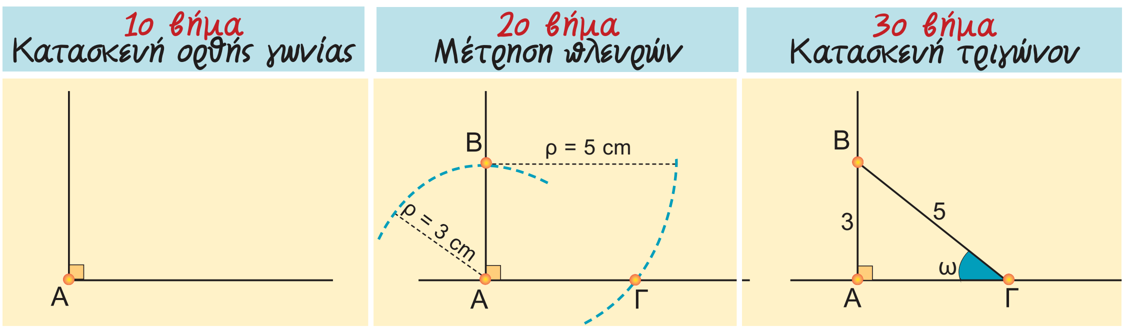
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιαστεί μία οξεία γωνία ω, με ημω = $\frac{3}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}.$$

Επομένως, για να κατασκευάσουμε οξεία γωνία ω με ημω = $\frac{3}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 3 και η υποτείνουσά του ίση με 5.

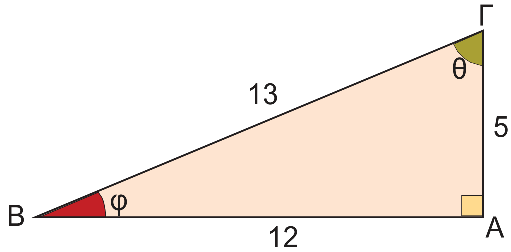


Για τη γωνία ω ισχύει: $ημω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

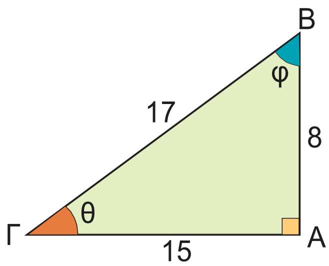
		Α	Β	Γ	Δ
α)	ημθ =	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
β)	ημφ =	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{5}$
γ)	συνθ =	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{5}{13}$
δ)	συνφ =	$\frac{5}{13}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{13}{12}$



2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ποιος από τους παρακάτω αριθμούς:

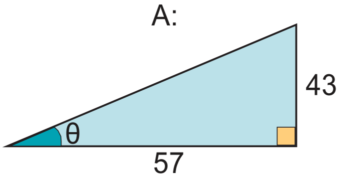
Α: συνθ Β: συνφ Γ: ημφ

ισούται με $\frac{8}{17}$;

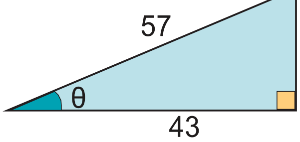


3. Σε ποιο από τα παρακάτω τρίγωνα ισχύει συνθ = $\frac{43}{57}$;

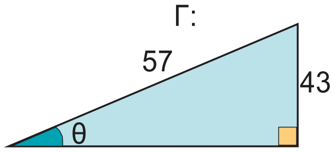
Α:



Β:



Γ:



4. Αν ημθ = $\frac{3}{5}$ και συνθ = $\frac{4}{5}$, τότε: εφθ = ... Α: $\frac{3}{4}$, Β: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{5}{3}$, Δ: $\frac{5}{4}$

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

5. Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που δε μπορούν να εκφράζουν το συνημίτονο οξείας γωνίας:

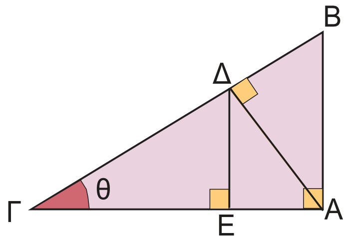
α) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $-\frac{1}{2}$ γ) $\frac{2}{3}$ δ) $\frac{3}{2}$ ε) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ στ) 1,45

6. Δίνεται το διπλανό σχήμα. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω σχέσεις:

α) συνθ = $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ β) συνθ = $\frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ γ) συνθ = $\frac{ΓΒ}{ΓΕ}$

δ) συνθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ ε) συνθ = $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$ στ) ημθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

ζ) ημθ = $\frac{ΔΕ}{ΓΔ}$ η) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΓΔ}$ θ) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΑΓ}$

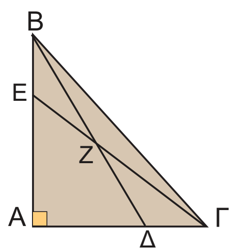


7. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω φράσεις:

α) Στο τρίγωνο .... είναι: συν $Α\hat{Δ}Β$ = $\frac{.......}{.......}$.

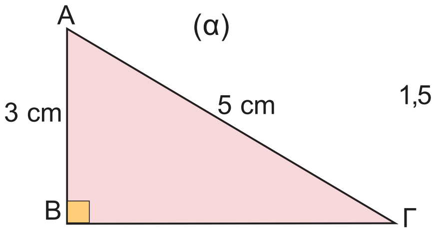
β) Στο τρίγωνο .... είναι: ημ $Α\hat{Β}Γ$ = $\frac{.......}{.......}$.

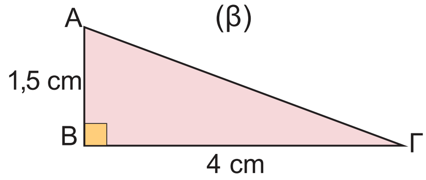
γ) Στο τρίγωνο .... είναι: συν......... = $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

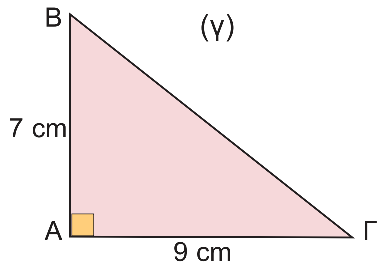


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.



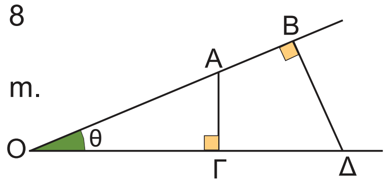




2 Δίνεται μια οξεία γωνία ω για την οποία ισχύει συνω = $\frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε το ημω.

3 Δίνεται μια οξεία γωνία ω. Να αποδείξετε ότι:
α) 2 + 5ημω < 7 β) 4 – 2συνω > 2 γ) 5ημω + 3συνω < 8

4 Στο διπλανό σχήμα είναι: ΟΑ = 10 m, ΟΒ = 12 m και ΟΓ = 8 m. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΟΔ, ΑΓ και ΒΔ.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο το 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαιρέσεων.

Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά το μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60°.

2.3. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Η χρήση του υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας ω

Επειδή ο υπολογισμός του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης μιας γωνίας δεν είναι απλός, χρησιμοποιούμε συχνά έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης. Ο «επιστημονικός» υπολογιστής περιλαμβάνει τα πλήκτρα **sin**, **cos** και **tan**.

Το πρώτο υπολογίζει το ημίτονο, το δεύτερο το συνημίτονο και το τρίτο την εφαπτομένη μίας γωνίας (π.χ. των 63°) ως εξής:

α) Πατάμε το πλήκτρο που μετατρέπει τους αριθμούς σε μοίρες. Το πλήκτρο αυτό διαφέρει από υπολογιστή σε υπολογιστή. Συνήθως η ένδειξη που φανερώνει ότι έχουμε πατήσει το σωστό πλήκτρο είναι DEG.

β) Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα:

6 **3** **sin** ή **sin** **6** **3** που υπολογίζει το ημ63°.

γ) Στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 0,891 που είναι το ημ63°.

δ) Ανάλογα πατώντας τα πλήκτρα:

6 **3** **cos** ή **cos** **6** **3** έχουμε ότι: συν63° = 0,454 και

6 **3** **tan** ή **tan** **6** **3** έχουμε ότι: εφ63° = 1,963.

Παρατήρηση:

Στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254) μπορείτε να βρείτε έναν πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 1° έως 89°, για να τον χρησιμοποιήσετε στις ασκήσεις.

Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης οξείας γωνίας ω

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται η γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

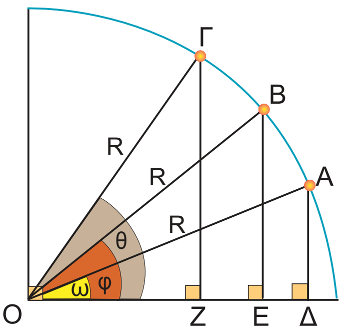
Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης ή τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

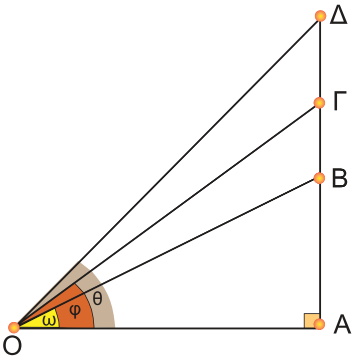
	28°	47°	68°	83°
ημίτονο				
συνημίτονο				
εφαπτομένη				

Λύση

Βρίσκουμε ότι:

	28°	47°	68°	83°
ημίτονο	0,469	0,731	0,927	0,992
συνημίτονο	0,883	0,682	0,375	0,122
εφαπτομένη	0,532	1,072	2,475	8,144





Από τον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε ότι:

Όταν μια οξεία γωνία αυξάνεται, τότε: **αυξάνεται το ημίτονό της, ελαττώνεται το συνημίτονό της και αυξάνεται η εφαπτομένη της.**

Γεωμετρικά, τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στα διπλανά σχήματα:

Σχηματίζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ, με σταθερή υποτείνουσα R = ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ και θεωρούμε τρεις γωνίες: ω < φ < θ.

Παρατηρούμε ότι: ΑΔ < ΒΕ < ΓΖ.

Επομένως, διαιρώντας με R έχουμε ότι: $\frac{ΑΔ}{R} < \frac{ΒΕ}{R} < \frac{ΓΖ}{R}$ ή

ημω < ημφ < ημθ.

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι: ΟΔ > ΟΕ > ΟΖ.

Οπότε: $\frac{ΟΔ}{R} > \frac{ΟΕ}{R} > \frac{ΟΖ}{R}$ ή **συνω > συνφ > συνθ**.

Ας θεωρήσουμε ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΑΔ με σταθερή τη μία κάθετη πλευρά ΟΑ και ορθή τη γωνία $\hat{A}$.

Παρατηρούμε ότι, όταν η οξεία γωνία με κορυφή το σημείο Ο μεγαλώνει, δηλαδή: ω < φ < θ, τότε μεγαλώνει αντίστοιχα η απέναντι κάθετη πλευρά: ΑΒ < ΑΓ < ΑΔ.

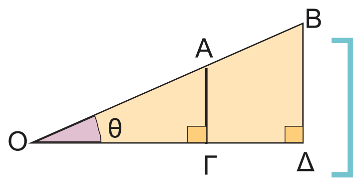
Επομένως: $\frac{ΑΒ}{ΟΑ} < \frac{ΑΓ}{ΟΑ} < \frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ ή **εφω < εφφ < εφθ.**

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = 5 cm, ΟΒ = 8 cm και ΑΓ = 2 cm. Να υπολογίσετε την απόσταση ΒΔ.



Λύση: Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα ΟΑΓ και ΟΒΔ με κοινή γωνία θ.

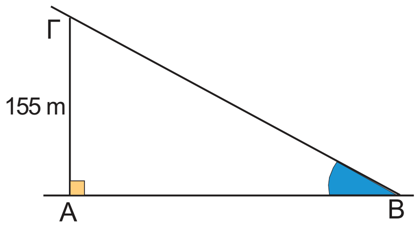
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε: ημθ = $\frac{ΑΓ}{ΟΑ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ έχουμε: ημθ = $\frac{ΒΔ}{ΟΒ}$.

Άρα, θα ισχύει ότι: $\frac{ΑΓ}{ΟΑ} = \frac{ΒΔ}{ΟΒ}$ οπότε: ΒΔ = $\frac{ΑΓ}{ΟΑ} \cdot ΟΒ$ ή ΒΔ = $\frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5} = 3{,}2$ (cm).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζει μια πίστα του σκι με το οριζόντιο επίπεδο είναι ημ$\hat{B}$ = 0,31. Αν ένας σκιέρ βρίσκεται σε σημείο Γ ύψους ΑΓ = 155 m από το έδαφος, να βρεθεί η απόσταση ΒΓ που θα διανύσει ο σκιέρ ώσπου να φτάσει στο έδαφος.

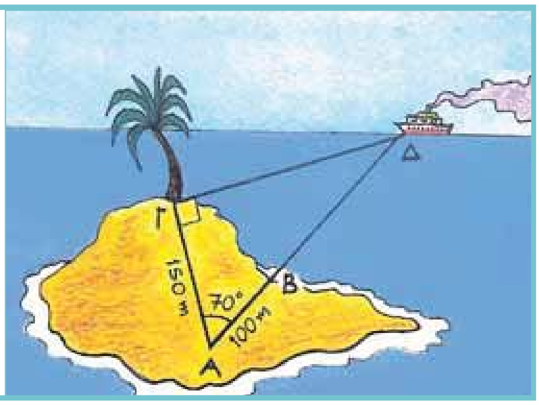


Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) πρέπει να βρούμε την πλευρά (υποτείνουσα) ΒΓ γνωρίζοντας ότι: ΑΓ = 155 m και ημ$\hat{B}$ = 0,31.

Έχουμε ότι: $ημ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ή $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{ημ\hat{B}}$ ή $ΒΓ = \frac{155}{0,31}$ ή ΒΓ = 500 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένας παρατηρητής Α, που βρίσκεται 100 m από την ακτή Β και 150 m από ένα δέντρο Γ, θέλει να υπολογίσει την απόσταση ΒΔ του πλοίου Δ από την ακτή Β. Μ' ένα γωνιόμετρο (ένα όργανο που μας επιτρέπει να μετράμε γωνίες) σκοπεύει το πλοίο και το δέντρο και βρίσκει τη γωνία Δ$\hat{A}$Γ=70°. Αν $\hat{Γ}$ = 90°, να υπολογίσετε την απόσταση ΔΒ.



Λύση: Έστω x = ΒΔ η απόσταση του πλοίου από την ακτή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ χρησιμοποιούμε το συνημίτονο της γωνίας των 70°.

Είναι: $συν70° = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{150}{100 + x}$

Μ' έναν επιστημονικό υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε: συν70° = 0,34, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $0,34 = \frac{150}{100 + x}$ και έχουμε:

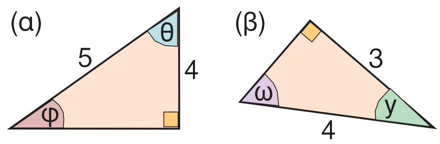
$$(100 + x) \cdot 0,34 = 150 \quad ή$$
$$34 + 0,34\,x = 150 \quad ή$$
$$0,34\,x = 150 - 34 \quad ή$$
$$x = \frac{116}{0,34} = 341,18\ (m).$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις που αφορούν τις γωνίες των διπλανών ορθογωνίων τριγώνων:

α) Α: $\varphi < \theta$ Β: $\varphi = \theta$ Γ: $\varphi > \theta$

β) Α: $\omega < y$ Β: $\omega = y$ Γ: $\omega > y$

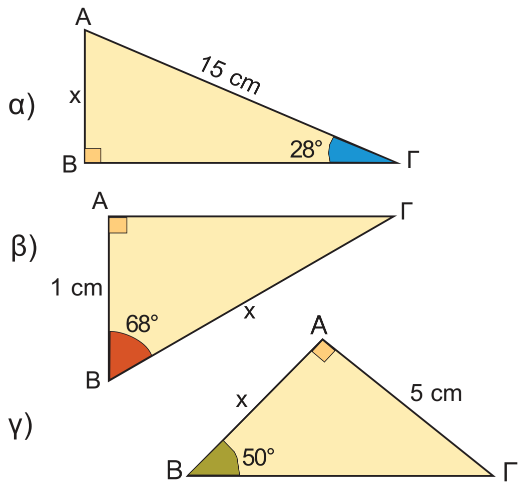


2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λανθασμένο).

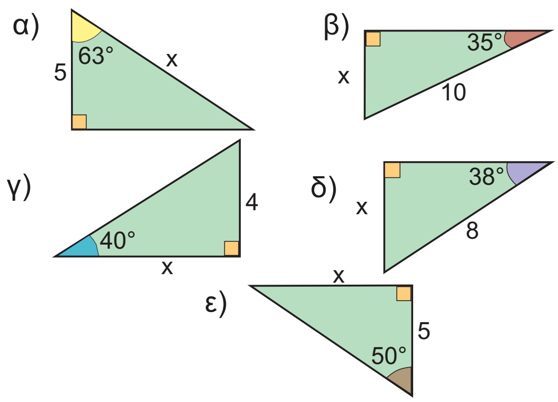
	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) ημ13° < ημ15°		
β) συν13° < συν15°		
γ) συν57° < συν27°		
δ) ημ57° < ημ27°		
ε) ημ32° < ημ23°		
στ) συν32° < συν23°		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

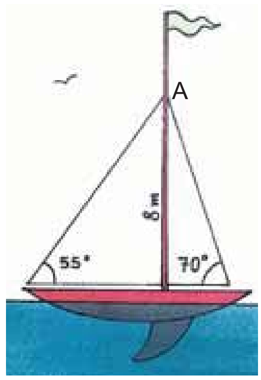
1 Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα:



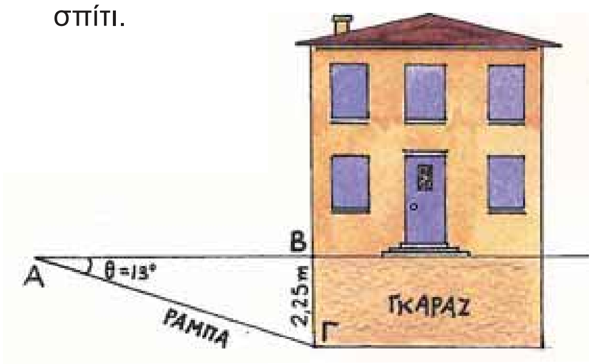
2 Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω τρίγωνα:



3 Σ' ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος το ύψος του καταρτιού έως το σημείο Α είναι 8 m. Να βρείτε το μήκος που έχουν τα συρματόσχοινα που στηρίζουν τα πανιά, αν αυτά σχηματίζουν γωνίες 55° και 70° αντίστοιχα με το επίπεδο της θάλασσας.

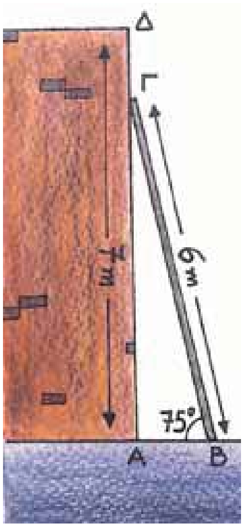


4 Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει ένα σπίτι με υπόγειο γκαράζ. Το ύψος του γκαράζ πρέπει να είναι ΒΓ = 2,25 m και η κλίση της ράμπας θ = 13°.
Να βρείτε το μήκος ΑΓ της ράμπας και την απόσταση ΑΒ του σημείου Α από το σπίτι.

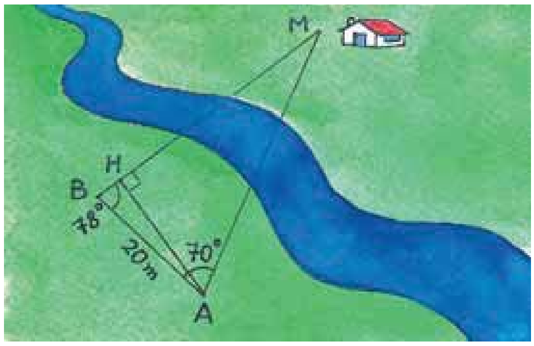


5 Να διατάξετε από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (χωρίς να τους υπολογίσετε):
α) ημ37°, ημ56°, ημ16° και ημ20°
β) συν25°, συν36°, συν20° και συν28°
γ) εφ18°, εφ22°, εφ51° και εφ89°

6 Μια σκάλα ύψους 6 m είναι ακουμπισμένη σε τοίχο ύψους 7 m. Για λόγους ασφαλείας, η γωνία στο έδαφος πρέπει να είναι 75°. Να βρείτε την απόσταση ΑΒ όπου πρέπει να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας από τον τοίχο, καθώς και την απόσταση ΓΔ από το πάνω μέρος της σκάλας έως το πάνω μέρος του τοίχου.

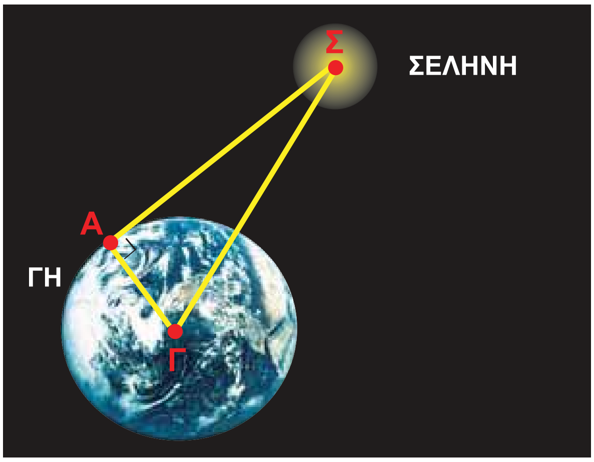


7 Ένας γεωλόγος θέλει να υπολογίσει την απόσταση από το σημείο Α, όπου βρίσκεται, μέχρι το σπίτι Μ στην άλλη πλευρά ενός ποταμού. Χρησιμοποιεί ένα γειτονικό σημείο Β που βρίσκεται σε



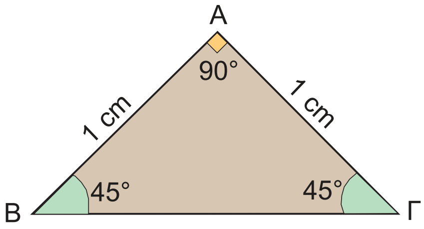
απόσταση ΑΒ = 20 m και με τη βοήθεια ενός γωνιόμετρου βρίσκει ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$ = 78° και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ = 70°. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΗ και ΑΜ.

8 Η ακτίνα της Γης είναι R=ΓΑ=6371 km και η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Sigma$ είναι 89,05°. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος την απόσταση Γης - Σελήνης (ΓΣ).



2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1 cm. Τότε οι γωνίες της βάσης του είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ45°, συν45° και εφ45°.

Λύση

Από το Πυθαγόρειο θέωρημα έχουμε:

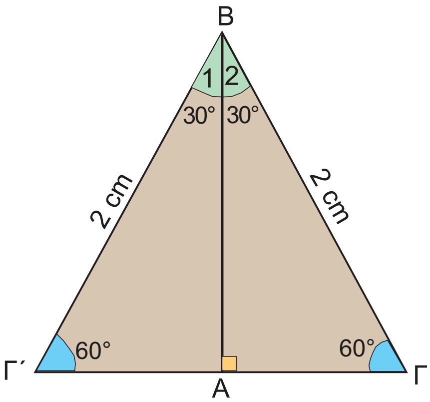
$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως: $ημ45° = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$συν45° = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$εφ45° = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{1} = 1$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° και 60°



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ με κοινή πλευρά την ΑΒ, οξείες γωνίες $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30°$ και υποτείνουσες ΒΓ = ΒΓ΄ = 2 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ30°, συν30°, εφ30°, ημ60°, συν60° και εφ60°.

Λύση

Το τρίγωνο ΒΓΓ΄ είναι ισόπλευρο, αφού όλες οι γωνίες του είναι 60°, οπότε:

ΓΓ΄ = 2 cm και ΑΓ = ΑΓ΄ = 1 cm.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$ημ\hat{B}_2 = ημ30° = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{2}$.

Για να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}_2 = 30°$, θα υπολογίσουμε πρώτα την πλευρά ΑΒ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $AB = \sqrt{3}$.

Επομένως: $συν\hat{B}_2 = συν30° = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ακόμα: } εφ\hat{B}_2 = εφ30° = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επίσης, στο ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{Γ} = 60°$:

$$ημ\hat{Γ} = ημ60° = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad συν\hat{Γ} = συν60° = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$εφ\hat{Γ} = εφ60° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα:

	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $ημ^2 45° = 1 - ημ30°$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $ημ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $ημ^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $ημ30° = \frac{1}{2}$, οπότε $1 - ημ30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Επομένως $ημ^2 45° = 1 - ημ30° = \frac{1}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

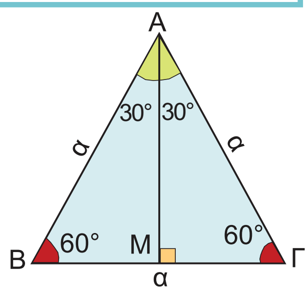
Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους: $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ και $Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.

Λύση: Φέρνουμε το ύψος ΑΜ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$ημ\hat{B} = ημ60° = \frac{ΑΜ}{ΑΒ} \quad \text{ή} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{υ}{α} \quad \text{ή} \quad υ = α\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}α\cdot υ = \frac{1}{2}α\cdot α\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}.$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $Α = ημ30° + συν60° + 2συν30° - 2εφ45° + 2ημ45°$.

Λύση: Έχουμε: $Α = ημ30° + συν60° + 2συν30° - 2εφ45° + 2ημ45°$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε κάθε αριθμό της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τον ίσο του αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) συν60°	i) $\frac{1}{2}$
β) ημ45°	ii) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
γ) ημ30°	iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
δ) ημ60°	iv) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
ε) συν45°	v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
στ) συν30°	

2. Αν ημθ = συνθ, όπου θ οξεία γωνία, τότε:

Α: θ = 30° Β: θ = 45° Γ: θ = 60° Δ: θ = 90°

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

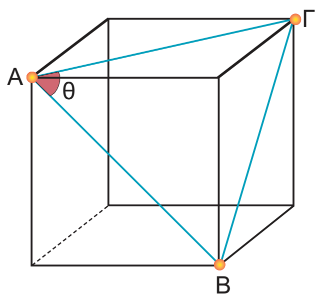
	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) ημ60° = 2ημ30°		
β) 2συν60° = 1		
γ) ημ45° + συν45° = 2ημ45°		
δ) συν30° = ημ60°		
ε) συν60° = ημ30°		

4. Στο διπλανό κύβο για τη γωνία θ = Β$\hat{Α}$Γ, ισχύει ότι:

Α: συνθ = $\frac{1}{2}$ Β: συνθ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Γ: συνθ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ: συνθ = 1

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

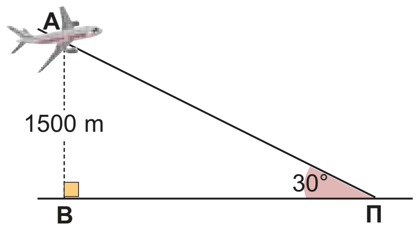
1 Να υπολογίσετε τις πλευρές α και β ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $\hat{Α}$ = 90°, $\hat{Β}$ = 30°, γ = 5 cm.
β) $\hat{Α}$ = 90°, $\hat{Β}$ = 45°, γ = 7 cm.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 13 cm.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε το ημ$\hat{Α}$ και το συν$\hat{Α}$.

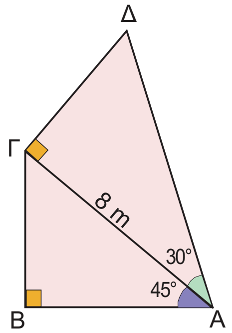
3 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:
α) $ημ^2 30° + ημ^2 45° + ημ^2 60° = \frac{3}{2}$.
β) $2ημ^2 30° + 2συν^2 60° - 2ημ^2 45° = 0$.

4 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $Α = 2ημ^2 ω - συνω$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) ω = 30° β) ω = 45° γ) ω = 60°

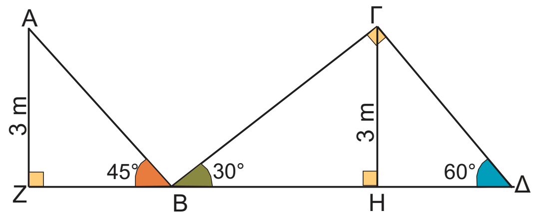
5 Ένα αεροπλάνο Α πετά σε ύψος 1500m και φαίνεται από τον πύργο ελέγχου του αεροδρομίου με γωνία 30°. Ποια είναι η οριζόντια απόσταση ΠΒ από τον πύργο ελέγχου;



6 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΔ.

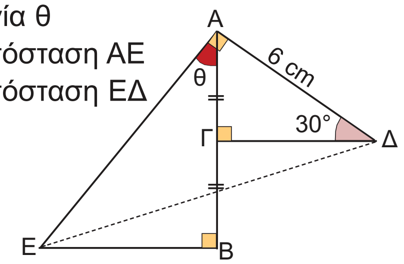


7 Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.

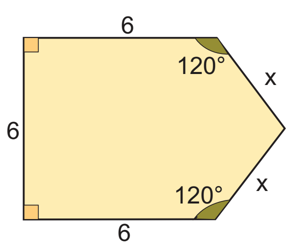


8 Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Γ είναι μέσο του ΑΒ. Να υπολογίσετε:

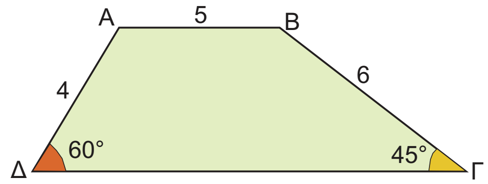
α) τη γωνία θ
β) την απόσταση ΑΕ
γ) την απόσταση ΕΔ



9 Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.

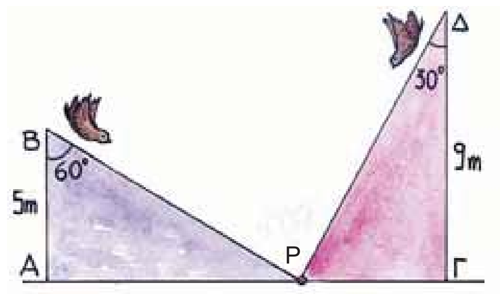


10 Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε το μήκος της μεγάλης βάσης ΓΔ.

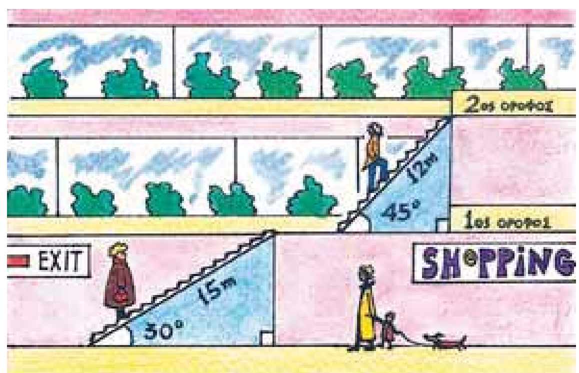


11 ***Σε μια ρώγα από σταφύλι...***

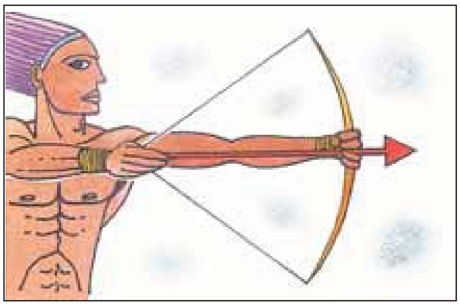
Δύο σπουργίτια βρίσκονται στην κορυφή δύο στύλων ύψους 5 m και 9 m αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ξεκινούν την ίδια στιγμή και με την ίδια ταχύτητα με στόχο μια ρώγα από σταφύλι που βλέπουν υπό γωνίες 60° και 30° στο έδαφος στο σημείο Ρ. Ποιο από τα δύο σπουργίτια θα φτάσει πρώτο τη ρώγα;



12 Για ν' ανέβουμε στον 2ο όροφο ενός εμπορικού κέντρου χρησιμοποιούμε τις κυλιόμενες σκάλες, όπως βλέπουμε στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του 2ου ορόφου από το έδαφος.



2.5. Η έννοια του διανύσματος



Χαρακτηριστικά στοιχεία ενός διανύσματος

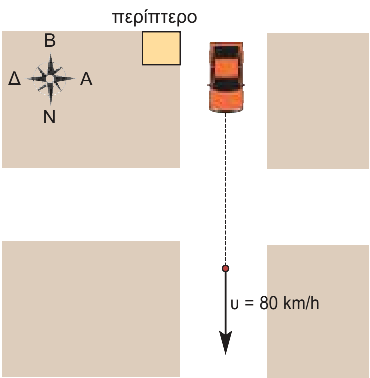
Όταν μετράμε ένα μέγεθος, όπως π.χ. το χρόνο που χρειαζόμαστε για να διαβάσουμε αυτή την παράγραφο, γράφουμε τη μέτρηση ως έναν αριθμό που ακολουθείται συνήθως από μία μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, χρειαζόμαστε 30 δευτερόλεπτα για να διαβάσουμε την παράγραφο αυτή. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο t για το χρόνο, γράφουμε: t = 30 (s).

Μερικά μεγέθη προσδιορίζονται πλήρως, αν δοθεί μόνο το μέτρο τους. Για παράδειγμα: ο χρόνος, που εκφράζεται σε ώρες, λεπτά, δευτερόλεπτα κ.τ.λ., η θερμοκρασία που εκφράζεται σε βαθμούς Κελσίου, Φαρενάϊτ κ.τ.λ., η μάζα που εκφράζεται σε χιλιόγραμμα, γραμμάρια κ.τ.λ.

Τέτοια μεγέθη λέγονται **βαθμωτά** ή **μονόμετρα μεγέθη**. Όμως, δεν είναι όλα τα μεγέθη μονόμετρα. Υπάρχουν και άλλα, που εκτός από μέτρο έχουν και κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα τέτοιου μεγέθους είναι το παρακάτω:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Αντώνης συζητά με το Βαγγέλη για ένα αυτοκίνητο που πέρασε από μπροστά του την ώρα που βρισκόταν σε ένα σταυροδρόμι, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Αντώνης: Άσε, Βασίλη, πέρασε από μπροστά μου ένα αυτοκίνητο σαν σίφουνας! Πρέπει να έτρεχε τουλάχιστον με 100 χιλιόμετρα την ώρα.
Βαγγέλης: Καλά, προς τα πού πήγαινε τόσο γρήγορα;
Μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου;



Λύση

Για να προσδιορίσουμε πλήρως την κίνηση του αυτοκινήτου, πρέπει να γνωρίζουμε:

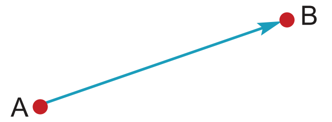
α) Από ποιο σημείο ξεκίνησε το αυτοκίνητο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι ξεκίνησε από το περίπτερο.

β) Προς ποια κατεύθυνση ή αλλιώς με ποια φορά κινείται; Στο σχήμα φαίνεται ότι κινείται νότια.

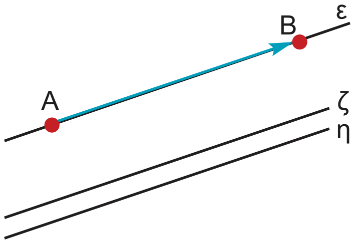
γ) Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται. Εδώ, το μέτρο της ταχύτητας είναι 80 km/h.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο της ταχύτητας (80 km/h) αλλά για να καταλάβουμε προς τα πού κινείται το αυτοκίνητο, χρειάζεται η αρχική του θέση και η κατεύθυνσή του.

Μεγέθη, όπως η ταχύτητα, που έχουν μέτρο και κατεύθυνση, ονομάζονται διανυσματικά μεγέθη.



Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** που συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο Α που είναι η **αρχή** και λέγεται σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα σημείο Β που είναι το **πέρας** (τέλος) του διανύσματος.
Το διάνυσμα, τότε, συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

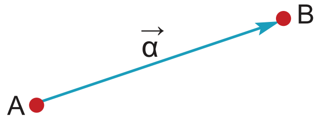


Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:

α) **Διεύθυνση**, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

β) **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το Β και πέρας το Α ($\overrightarrow{BA}$).

γ) **Μέτρο**, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.



Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την κατεύθυνση ενός διανύσματος.

Παρατήρηση:

Συχνά για ευκολία συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$,...

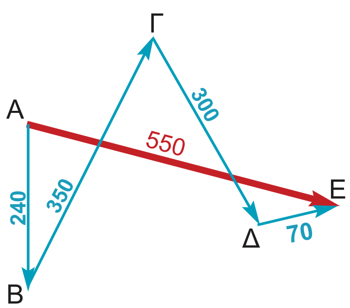
Τα διανύσματα παίζουν βασικό ρόλο στη Φυσική. Εκτός από τη μετατόπιση και την ταχύτητα άλλα διανυσματικά μεγέθη είναι η επιτάχυνση, η δύναμη, το βαρυτικό, το ηλεκτρικό, το μαγνητικό πεδίο κ.ά.

Μέτρο διανύσματος

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του μέτρου του διανύσματος, αρκεί να καταλάβουμε τη διαφορά μεταξύ απόστασης και μετατόπισης. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ένα πλοίο του Πολεμικού Ναυτικού συμμετέχει σε μια άσκηση. Αποπλέει αρχικά από τη Σαλαμίνα (Α) και σταματάει διαδοχικά σε τέσσερα προκαθορισμένα σημεία ανεφοδιασμού (Β), (Γ), (Δ) και (Ε). Διανύοντας τις αποστάσεις που φαίνονται στον πίνακα,



Διαδρομή	Απόσταση
(Α) → (Β)	240 ναυτικά μίλια
(Β) → (Γ)	350 ναυτικά μίλια
(Γ) → (Δ)	300 ναυτικά μίλια
(Δ) → (Ε)	70 ναυτικά μίλια

ποια είναι η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο και ποια είναι η απόσταση της αρχικής και της τελικής του θέσης;

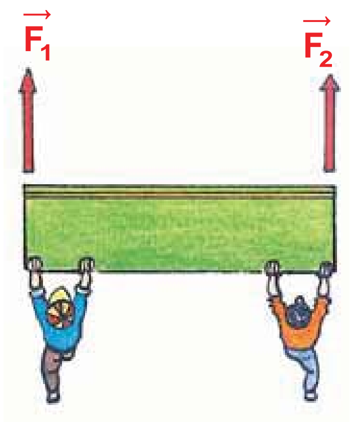
Λύση

Η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο είναι:
$|\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| + |\vec{\Gamma\Delta}| + |\vec{\Delta E}| = 240 + 350 + 300 + 70 = 960$ ναυτικά μίλια.
Η απόσταση της αρχικής και τελικής του θέσης είναι:
$|\vec{AE}| = 550$ ναυτικά μίλια.

Η απόσταση είναι **βαθμωτό (αριθμητικό) μέγεθος**. Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο διένυσε απόσταση 960 ναυτικών μιλίων, αλλά δεν ξέρουμε πού πήγε.

Ποια είναι όμως η μετατόπιση του πλοίου;
Η μετατόπιση είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο ξεκίνησε από τη Σαλαμίνα και μετατοπίστηκε 240 ναυτικά μίλια προς Νότο, οπότε ξέρουμε ακριβώς από πού ξεκίνησε και πού κατέληξε. Η τελική μετατόπιση του πλοίου εκφράζεται από το διάνυσμα $\vec{AE}$, καθώς μας ενδιαφέρει η αρχική και η τελική θέση του πλοίου.
Ας προσέξουμε ιδιαίτερα ότι το μέτρο της μετατόπισης $\vec{AE}$ είναι $|\vec{AE}| = 550$ ναυτικά μίλια και δεν έχει καμία σχέση με τη συνολική απόσταση που διένυσε από τη Σαλαμίνα έως το τελευταίο σημείο ανεφοδιασμού (960 ναυτικά μίλια).

Ίσα και αντίθετα διανύσματα



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Σε μια μετακόμιση ο Μιχάλης και ο Γρηγόρης προσπαθούν να μετακινήσουν ένα θρανίο σπρώχνοντάς το από τα δύο άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα, σε μια παράλληλη θέση.
Τι νομίζετε ότι ισχύει για τις δυνάμεις που εφαρμόζει ο Μιχάλης και ο Γρηγόρης στα άκρα του θρανίου;

Λύση

Όπως καταλαβαίνουμε τα διανύσματα $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ θα είναι ίσα.

Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.

Ας θυμηθούμε ένα παιχνίδι που παίζεται συχνά στις παραλίες ή στις κατασκηνώσεις. Δύο ομάδες παιδιών αρχίζουν να τραβάνε ένα σχοινί προς αντίθετη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ακριβώς στη μέση του σχοινιού υπάρχει μια γραμμή. Αν μία ομάδα καταφέρει να τραβήξει τον πρώτο παίκτη της άλλης ομάδας μετά τη γραμμή, τότε η ομάδα κερδίζει.
Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται από τις δύο ομάδες,

όταν παραμένουν ακίνητες, αλληλοεξουδετερώνονται ή όπως λέμε, είναι αντίθετες.

Δύο διανύσματα είναι αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

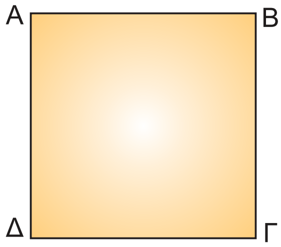
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται το διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ. Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{A\Delta}$,

α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;

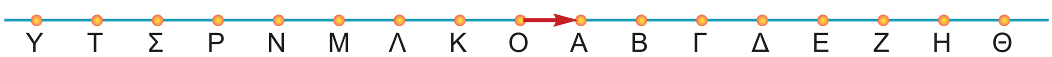


Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου έχουν το ίδιο μήκος. Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ έχουν ίσα μέτρα.
Δηλαδή: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| = |\overrightarrow{\Delta A}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα. Ομοίως, τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσα.
Δηλαδή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$.

γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά. Ομοίως τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta A}$ είναι αντίθετα.

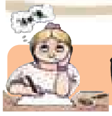
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2



Στο παραπάνω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων είναι ίσες με 1 cm. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, $\overrightarrow{\Theta Z}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{P\Delta}$, $\overrightarrow{T\Lambda}$, $\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AZ}$ *και* $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$. *Ποια από τα διανύσματα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;*

Λύση: Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΒ είναι 2 cm. Δηλαδή: $|\overrightarrow{OB}| = 2$.
Ομοίως βρίσκουμε: $|\overrightarrow{O\Gamma}| = 3$, $|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| = 5$, $|\overrightarrow{\Theta Z}| = 2$, $|\overrightarrow{\Delta A}| = 3$, $|\overrightarrow{P\Delta}| = 9$, $|\overrightarrow{T\Lambda}| = 5$, $|\overrightarrow{K\Theta}| = 9$, $|\overrightarrow{NA}| = 5$, $|\overrightarrow{BH}| = 5$ και $|\overrightarrow{PK}| = 4$.

Ίσα διανύσματα είναι τα: $\overrightarrow{T\Lambda} = \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BH}$ και $\overrightarrow{P\Delta} = \overrightarrow{K\Theta}$.
Αντίθετα είναι τα: $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{T\Lambda}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{\Theta Z}$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

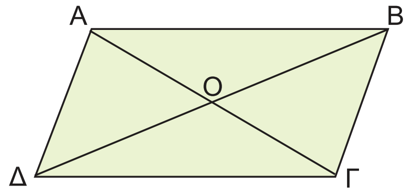
α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

β) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

γ) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta}$

δ) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Gamma}$

ε) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$



2. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

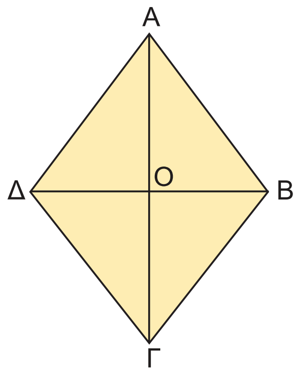
α) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$

β) $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{AB}|$

γ) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$

δ) $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{BA}$

ε) $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB}$

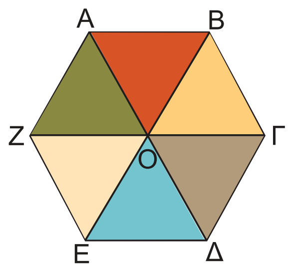


3. Στο διπλανό εξάγωνο όλα τα τρίγωνα διαφορετικού χρώματος είναι ισόπλευρα. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{\ldots\Gamma} = \overrightarrow{\ldots O}$

β) $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{\ldots\Delta} = \overrightarrow{\ldots E}$

γ) $|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{E\ldots}| = |\overrightarrow{E\ldots}| = |\overrightarrow{E\ldots}|$



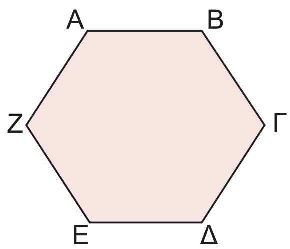
4. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη χρειάζονται ένα διάνυσμα για να παρασταθούν;

α) βάρος β) ύψος γ) μάζα δ) ταχύτητα

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

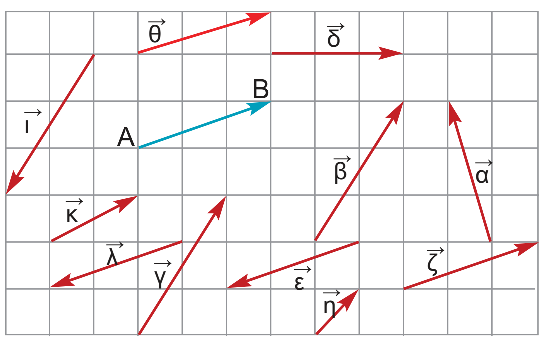
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο εξάγωνο του διπλανού σχήματος όλες οι πλευρές είναι ίσες.

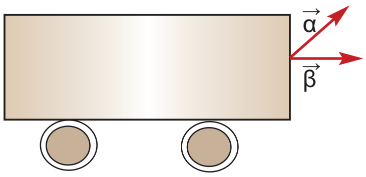


Από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{E\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{AZ}$ ποια είναι ίσα και ποια αντίθετα;

2 Ποια από τα διανύσματα του σχήματος είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$; Ποια είναι αντίθετα με το $\overrightarrow{AB}$;



3 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του παρακάτω σχήματος έχουν ίσα μέτρα. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα αυτά είναι ίσα.

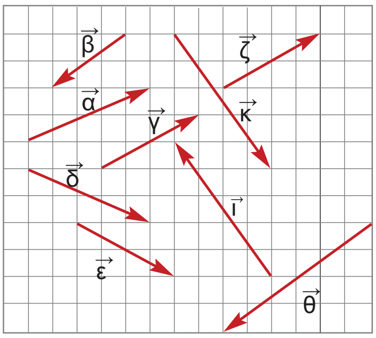


4 Ποια από τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος:

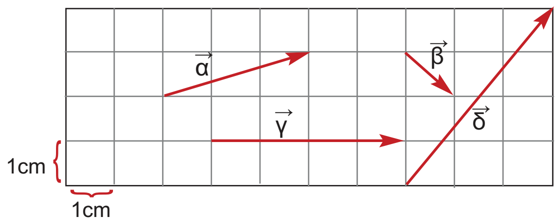
α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



5 Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του σχήματος.



6 Σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Γ, ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ΓΔ}$ αντίθετο του $\overrightarrow{ΑΒ}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Δ, το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΑ}$.
Να αποδείξετε ότι το $\overrightarrow{ΔΑ}$ είναι αντίθετο του $\overrightarrow{ΒΓ}$.

7 Στη δοκό ΑΓ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{B}$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$.
Να βρείτε ποιες από αυτές:

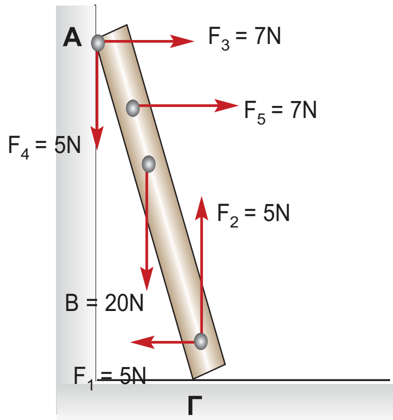
α) έχουν ίδια διεύθυνση

β) έχουν αντίθετη φορά

γ) είναι αντίθετες

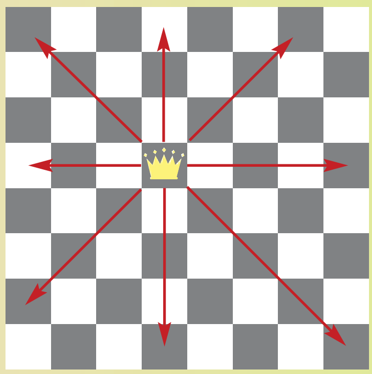
δ) είναι ίσες

ε) έχουν ίσα μέτρα

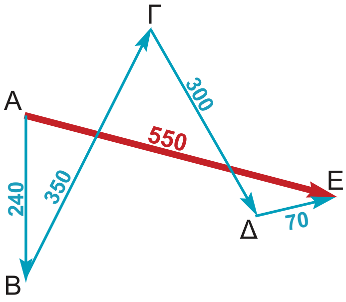


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο σκάκι, η βασίλισσα μπορεί να κινηθεί οριζόντια, κάθετα και διαγώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορείτε να τοποθετήσετε άλλες 4 βασίλισσες, έτσι ώστε, μαζί μ' αυτήν που έχει ήδη τοποθετηθεί, να καλύπτουν και τα 64 τετράγωνα του σκακιού;



2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων



Άθροισμα διανυσμάτων

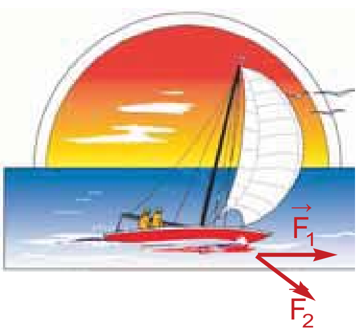
Στη δραστηριότητα 2 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι η τελική μετατόπιση ήταν το διάνυσμα $\vec{ΑΕ}$. Οι διαδοχικές μετατοπίσεις ήταν τα διανύσματα: $\vec{ΑΒ}$, $\vec{ΒΓ}$, $\vec{ΓΔ}$ και $\vec{ΔΕ}$, τα οποία λέγονται διαδοχικά διανύσματα, γιατί το τέλος του καθενός είναι η αρχή του επομένου. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των διαδοχικών μετατοπίσεων ισούται με την τελική μετατόπιση, δηλαδή: $\vec{ΑΒ} + \vec{ΒΓ} + \vec{ΓΔ} + \vec{ΔΕ} = \vec{ΑΕ}$.

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων. Τι γίνεται, όμως, όταν τα διανύσματα δεν είναι διαδοχικά; Ας δούμε ένα διαφορετικό παράδειγμα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

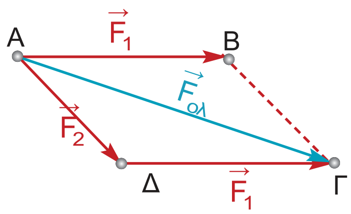
Ο Σέργιος είναι καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού, που έχει αναμμένη τη μηχανή του και κρατάει σταθερή πορεία. Χωρίς να ελέγξει την κατεύθυνση του ανέμου που φυσάει, σηκώνει το ένα πανί. Το ιστιοπλοϊκό αρχίζει να αλλάζει πορεία, καθώς ο άνεμος φυσά προς άλλη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν $\vec{F_1}$ είναι η δύναμη που ασκεί στο σκάφος η μηχανή και $\vec{F_2}$ η δύναμη που ασκεί στο σκάφος ο άνεμος, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το ιστιοπλοϊκό;



Λύση

Έχουμε λοιπόν δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ (μηχανή) και $\vec{F_2}$ (άνεμος) που ασκούνται στο ιστιοπλοϊκό ταυτόχρονα και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη, όπως λέμε στη Φυσική, δηλαδή το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.



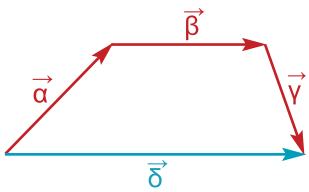
Μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{F_1}$, έτσι ώστε να γίνει διαδοχικό με το $\vec{F_2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:

$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{ΑΒ} + \vec{ΑΔ} = \vec{ΑΔ} + \vec{ΔΓ} = \vec{ΑΓ} = \vec{F_{ολ}}$.

Οι δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ λέγονται **συνιστώσες** της $\vec{F_{ολ}}$.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το $\vec{F_{ολ}}$ είναι να δούμε ότι αποτελεί τη διαγώνιο $\vec{ΑΓ}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

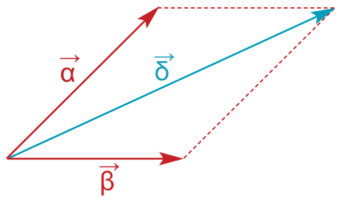
Επομένως, έχουμε δύο μεθόδους, για να βρίσκουμε το άθροισμα διανυσμάτων.



Α. Η μέθοδος του πολυγώνου

Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν όλα διαδοχικά.

Το άθροισμα των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$, θα είναι το διάνυσμα $\vec{δ}$, που θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου

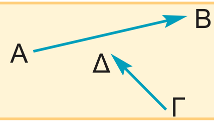
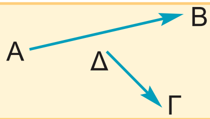
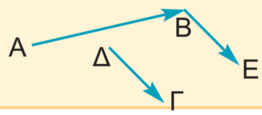
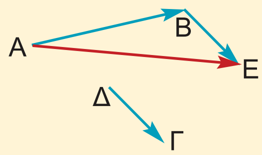
Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

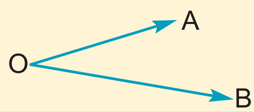
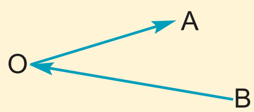
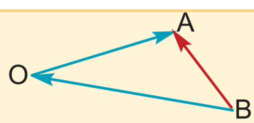
Διαφορά διανυσμάτων

Η διαφορά δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και ορίζεται ως άθροισμα του $\overrightarrow{AB}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

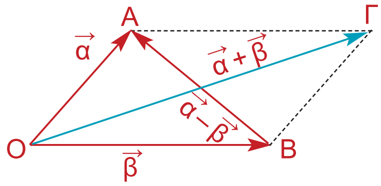
Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα,	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{AB}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$	
Για να γίνει αυτό, σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$ ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta})$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ $= \overrightarrow{AE}$	

Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα με κοινή αρχή,	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{OA}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή το $\overrightarrow{BO}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι διαδοχικά.	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} =$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{OB}$ από το $\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$ $= \overrightarrow{BA}$	

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διαφορά $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή Ο, είναι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, με αρχή το πέρας του δευτέρου και πέρας το πέρας του πρώτου.

Επομένως για τις διαγωνίους $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{BA}$ του διπλανού παραλληλογράμμου ισχύει: $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



Το μηδενικό διάνυσμα

Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το διάνυσμα αυτό λέγεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Επομένως, το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα σημείο, οπότε δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε φορά. Το μέτρο του είναι ίσο με 0. Δηλαδή: $|\vec{0}| = 0$.

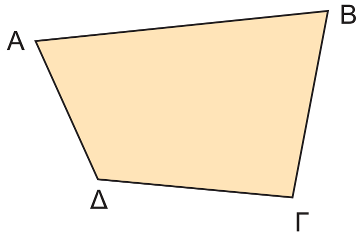
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Λύση: Έχουμε: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης: $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

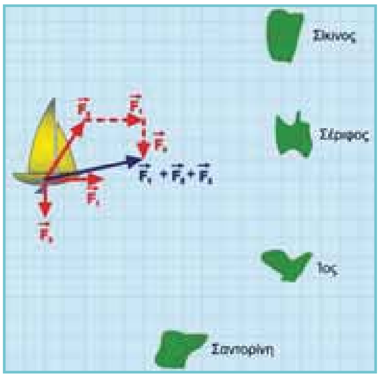
Επομένως: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Τρεις δυνάμεις ασκούνται στο ιστοπλοϊκό του παρακάτω σχήματος: η $\vec{F_1}$ από τη μηχανή του, η $\vec{F_2}$ από τα πανιά του (αέρας) και το ρεύμα της θάλασσας $\vec{F_3}$.
Σε ποιο νησί κατευθύνεται το ιστιοπλοϊκό;

Λύση: Το ιστιοπλοϊκό κινείται κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης των τριών αυτών δυνάμεων, δηλαδή του αθροίσματος $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.
Αν σχηματίσουμε το άθροισμα αυτών των δυνάμεων, η συνισταμένη τους δείχνει ότι το ιστιοπλοϊκό κατευθύνεται προς τη Σέριφο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει:
$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΜ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{0}$.

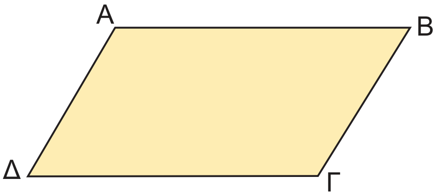
Λύση: Έχουμε:

$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΜ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΜ} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΜ} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{ΑΜ} = \vec{0}$



Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΜ}$ ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε η αρχή και το πέρας ταυτίζονται. Επομένως, το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΑΓ}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Α είναι το μέσο του ΒΓ.	Το Β ταυτίζεται με το Γ.
β)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΒΓ}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Β είναι το μέσο του ΑΓ.	Το Α ταυτίζεται με το Γ.
γ)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΓΔ}$, τότε:	Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.	ΑΔ = ΒΓ	Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
δ)	$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} =$	$\overrightarrow{ΑΔ}$	$\overrightarrow{ΑΒ}$	$\overrightarrow{ΑΓ}$
ε)	$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΔ} =$	$\overrightarrow{ΓΔ}$	$\overrightarrow{ΑΔ}$	$\vec{0}$

2. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{Β...} = \overrightarrow{ΑΔ}$

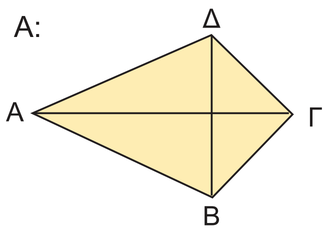
β) $\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{Β...} + \overrightarrow{Δ...}$

γ) $\overrightarrow{Γ...} - \overrightarrow{Γ...} = \overrightarrow{ΑΒ}$

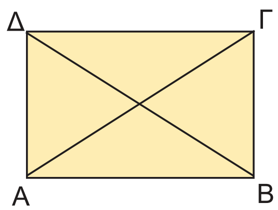
δ) $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{Α...} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{.....}$

3. Η ισότητα $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ}$ είναι σωστή σ' ένα μόνο από τα παρακάτω σχήματα. Μπορείτε να βρείτε σε ποιο;

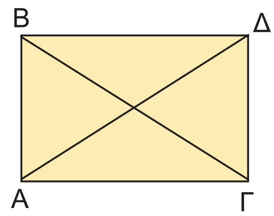
Α:



Β:

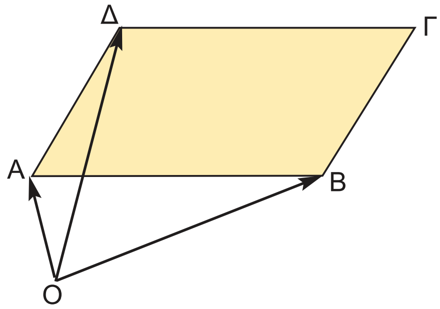


Γ:



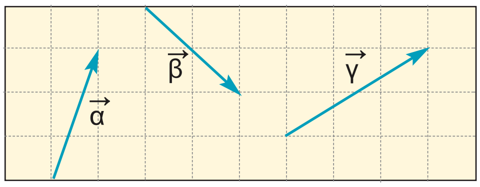
4. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις.

		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=$	$\overrightarrow{B\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$	$\overrightarrow{\Delta B}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$
β)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{B\Gamma}=$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{OB}$
γ)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$
δ)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{A\Delta}=$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{B\Delta}$

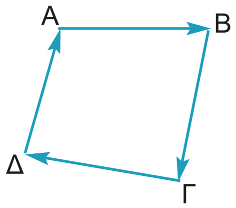


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο παρακάτω σχήμα να σχεδιάσετε τα αθροίσματα:
α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ β) $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ γ) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

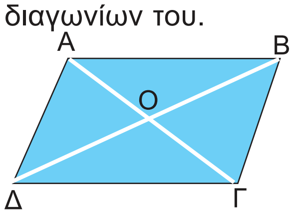


2 Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.
Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$
γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{A\Delta}$

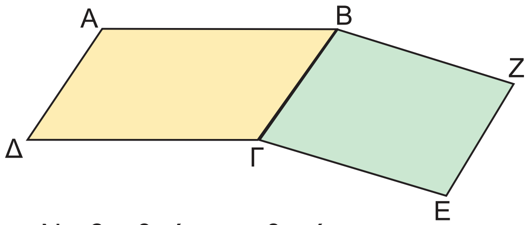


3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ σημείο της ΒΓ. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{AM}$
β) $\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$
γ) $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta M}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}$

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του.
Να συγκρίνετε τις διαφορές:
α) $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}$
β) $\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BO}$
γ) $\overrightarrow{\Delta O}-\overrightarrow{\Delta A}$
δ) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{\Delta O}$

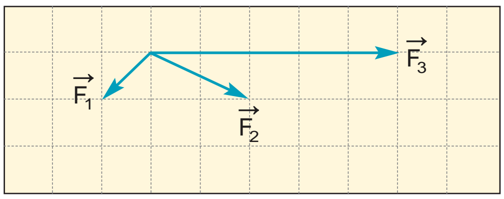


5 Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμα.

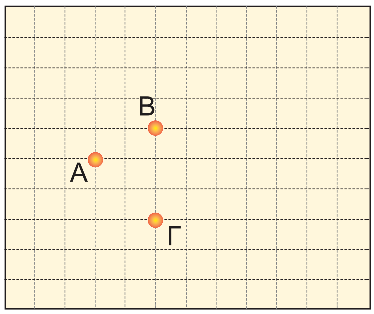


Να βρεθούν τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$ β) $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}$
γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$ δ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ZE}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

6 Σε ένα σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$, όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη τους.

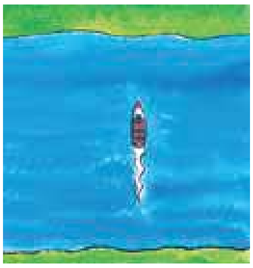


7 Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{A\Theta}$, έτσι ώστε να ισχύει:
$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$,
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}$,
$\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$ και
$\overrightarrow{A\Theta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}$.



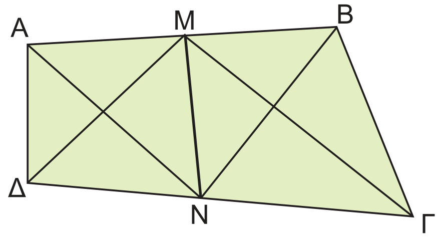
8 Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$), να αποδείξετε ότι: $\vec{ΓΒ} - \vec{ΓΑ} = \vec{ΑΜ} - \vec{ΜΓ}$.

9 Μία βάρκα διασχίζει κάθετα ένα ποτάμι. Αν η βάρκα κινείται μόνο από τη μηχανή της, θα έχει ταχύτητα με μέτρο 2 m/s. Η βάρκα παρασύρεται, όμως, από το ρεύμα του ποταμού που έχει ταχύτητα 0,6 m/s.



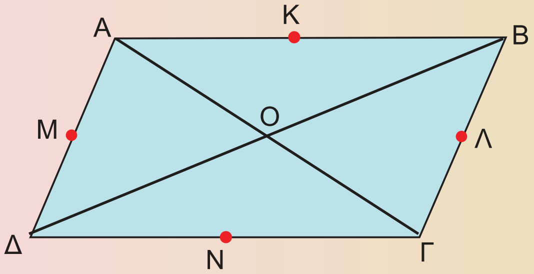
α) Να σχεδιάσετε τις δύο ταχύτητες.
β) Να σχεδιάσετε την διεύθυνση που θα πάρει τελικά η βάρκα.

10 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι: $\vec{ΜΓ} + \vec{ΜΔ} = \vec{ΑΝ} + \vec{ΒΝ}$.



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

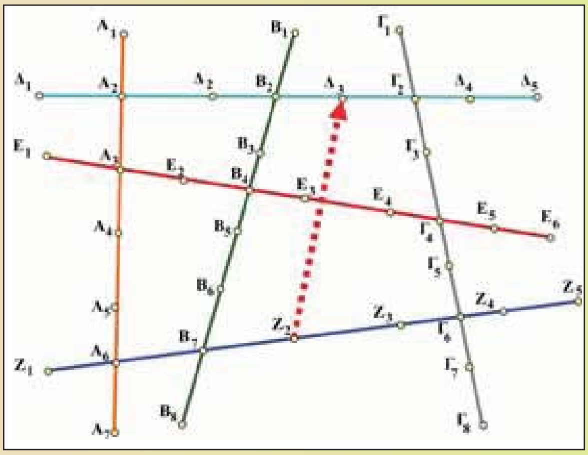
Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, είναι τα μέσα των πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Μπορείτε να συμπληρώσετε το παρακάτω διανυσματοσταυρόλεξο;



$\vec{ΑΟ}$	+		=	$\vec{ΑΒ}$
+		+		+
$\vec{ΟΝ}$	+		=	
=		=		=
	+	$\vec{ΟΛ}$	=	

Τα διανύσματα στο χάος της κυκλοφορίας

Σε μια πόλη υπάρχουν έξι γραμμές μετρό. Ο χάρτης των στάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για να μεταβούμε από ένα σημείο της πόλης σε ένα άλλο, για παράδειγμα από το σημείο $Ζ_2$ στο σημείο $Δ_3$, μπορούμε να κινηθούμε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν με διανύσματα:



$\vec{Ζ_2Δ_3} = \vec{Ζ_2Γ_6} + \vec{Γ_6Γ_2} + \vec{Γ_2Δ_3}$ ή

$\vec{Ζ_2Δ_3} = \vec{Ζ_2Β_7} + \vec{Β_7Β_2} + \vec{Β_2Δ_3}$ ή $\vec{Ζ_2Δ_3} = \vec{Ζ_2Α_6} + \vec{Α_6Α_3} + \vec{Α_3Β_4} + \vec{Β_4Β_2} + \vec{Β_2Δ_3}$

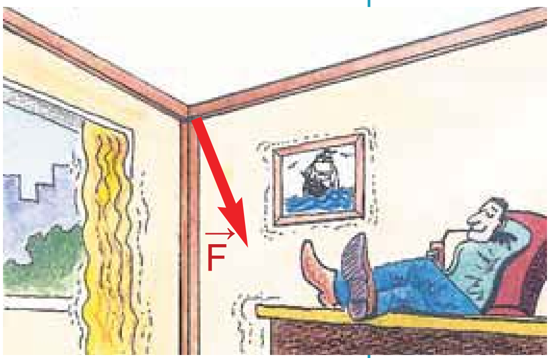
α) Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους (έστω και πιο μακρινούς) για να κάνουμε τη διαδρομή $\vec{Ζ_2Δ_3}$ και να τους γράψετε σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων;

β) Με ποιους τρόπους μπορεί κανείς να μεταβεί από το σημείο $Α_4$ στο σημείο $Γ_3$; Να γράψετε τις διαδρομές αυτές σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων.

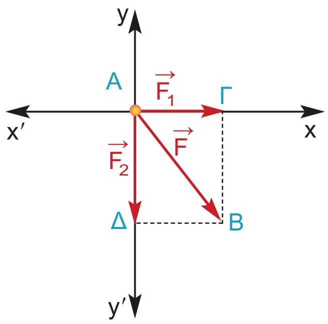
γ) Να κάνετε τις διαδρομές: $\vec{Ε_3Α_7}$, $\vec{Δ_4Ζ_1}$ και $\vec{Γ_8Α_1}$ με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους!

2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες



Όταν γίνεται σεισμός, ασκούνται δυνάμεις στα διάφορα μέρη των κτιρίων. Ο μηχανικός που κατασκευάζει τα κτίρια, για να εξασφαλίσει την αντοχή τους χρησιμοποιεί τις γνώσεις των επιστημών της «Στατικής» και της «Αντοχής Υλικών». Υπολογίζει, λοιπόν, τις δυνάμεις που ασκούνται στα κάθετα και οριζόντια μέρη των κτιρίων (κολόνες και δοκάρια), για να μην πέσουν τα κτίρια. Κατά τη διάρκεια του σεισμού εφαρμόζεται μια πλάγια δύναμη στις κολόνες και τα δοκάρια του κτιρίου, όπως φαίνεται στο σκίτσο.

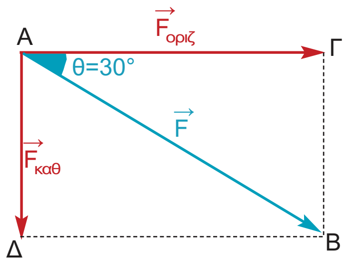


Ο μηχανικός ενδιαφέρεται να γνωρίζει χωριστά τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, που ασκούνται αντίστοιχα στο δοκάρι και την κολόνα. Είναι αναγκαία, λοιπόν, η ανάλυση ενός διανύσματος $\vec{F}$ σε δύο κάθετα διανύσματα.

Η ανάλυση του διανύσματος $\vec{F}$ στις δύο κάθετες **συνιστώσες** του $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, γίνεται ως εξής:
Στην αρχή Α του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = \vec{F}$, σχηματίζουμε δύο κάθετες ευθείες x′x και y′y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το πέρας Β φέρνουμε δύο κάθετες: τη ΒΓ στην x′x και τη ΒΔ στην y′y. Τότε το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο, επομένως:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ και επιπλέον $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_2$.

Μέτρα Συνιστωσών

Αν γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης που προέρχεται από το σεισμό είναι $|\vec{F}| = 6000$ N και σχηματίζει με το οριζόντιο δοκάρι γωνία $\theta = 30°$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των κάθετων συνιστωσών της $\vec{F}$.



Αναλύουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:
$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_{οριζ}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_{καθ}$.

Γνωρίζουμε ότι: $|\overrightarrow{AB}| = 6000$ N και $\theta = 30°$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{|\overrightarrow{A\Gamma}|}{|\overrightarrow{AB}|} \quad \text{και} \quad \text{ημ}\theta = \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{|\overrightarrow{\Gamma B}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Όμως $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, οπότε $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$. Επομένως:

$|\vec{F}_{οριζ}| = |\vec{ΑΓ}| = |\vec{ΑΒ}| \cdot συνθ = 6000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3}$ (N).

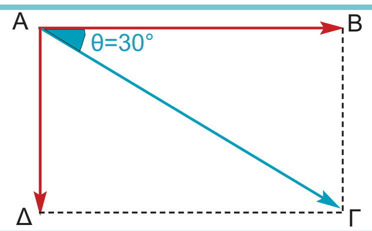
$|\vec{F}_{καθ}| = |\vec{ΑΔ}| = |\vec{ΑΒ}| \cdot ημθ = 6000 \cdot \frac{1}{2} = 3000$ (N).

Γενικότερα, για τα μέτρα των δύο κάθετων συνιστωσών $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ μιας δύναμης $\vec{F}$ ισχύει ότι:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\,συνθ \quad \text{και} \quad |\vec{F}_2| = |\vec{F}|\,ημθ$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Αν $|\vec{ΑΓ}| = 6$, να υπολογίσετε τα μέτρα $|\vec{ΑΒ}|$ και $|\vec{ΑΔ}|$.

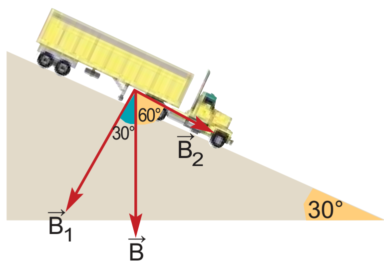


Λύση: Έχουμε: $συν30° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{|\vec{ΑΒ}|}{|\vec{ΑΓ}|}$ και $ημ30° = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{|\vec{ΑΔ}|}{|\vec{ΑΓ}|}$, άρα

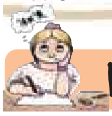
$|\vec{ΑΒ}| = |\vec{ΑΓ}| \cdot συν30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ και $|\vec{ΑΔ}| = |\vec{ΑΓ}| \cdot ημ30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα φορτηγό βάρους 40000 N, είναι σταθμευμένο σε μία κατηφόρα με γωνία κλίσης 30°, όταν ξαφνικά λύνεται το χειρόφρενο! Το διάνυσμα $\vec{B}$ του βάρους του αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η $\vec{B}_1$ εξουδετερώνεται από το έδαφος, ενώ η $\vec{B}_2$ κινεί το φορτηγό στην κατηφόρα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$.

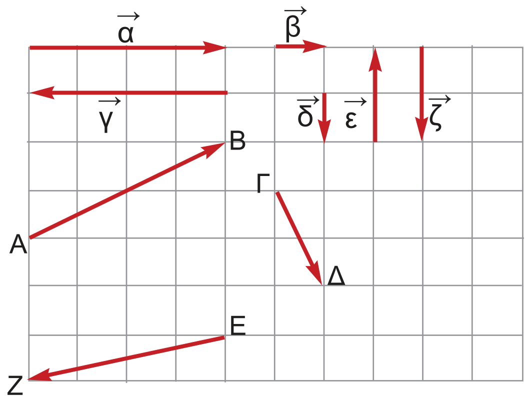


Λύση: Έχουμε: $συν60° = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|}$, οπότε: $|\vec{B}_2| = |\vec{B}| \cdot συν60° = 40000 \cdot \frac{1}{2} = 20000$ N.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα αναλύσαμε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{ΓΔ}$ και $\vec{EZ}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες αλλά τα διανύσματα μπερδεύτηκαν! Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι οι σωστές από τις παρακάτω σχέσεις;



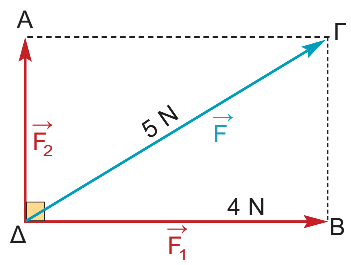
		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\vec{AB}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\gamma}$
β)	$\vec{ΓΔ}$ =	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\beta}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\delta}$
γ)	$\vec{EZ}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\delta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\delta}$	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$

2. Μια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $|\vec{F}| = 5$ N αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Αν $|\vec{F}_1| = 4$ N τότε $|\vec{F}_2| =$ ......

Α: 1 N Β: 2 N Γ: 3 N Δ: 4 N

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

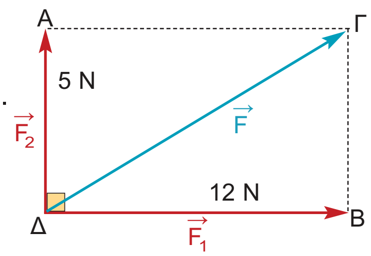


3. Μια δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 5 N και 12 N αντίστοιχα.

Τότε $|\vec{F}| =$......

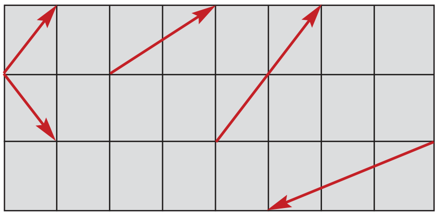
Α: 15 Β: 13 Γ: 17 Δ: 18

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

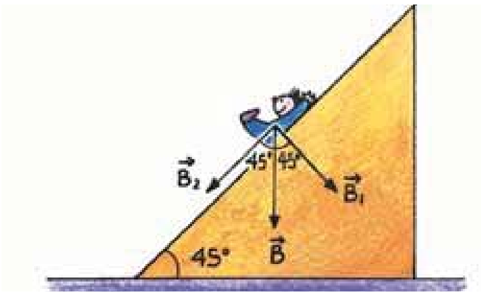


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

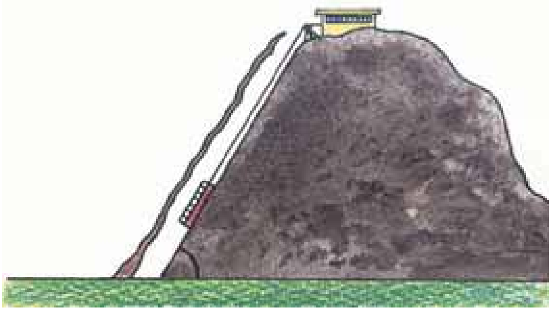
1 Να αναλύσετε τα παρακάτω διανύσματα σε άθροισμα δύο κάθετων συνιστωσών.



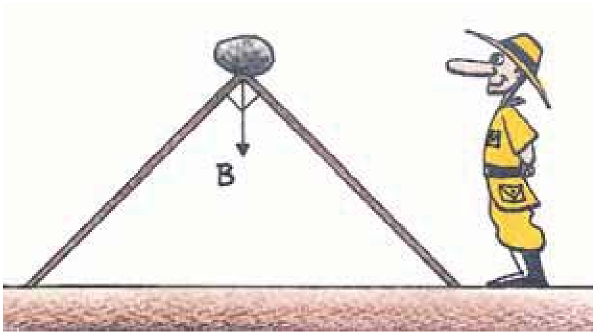
2 Ο Κωστάκης κάνει τσουλήθρα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το βάρος του Κωστάκη είναι 270 N, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$ που τον κάνει να κινείται.



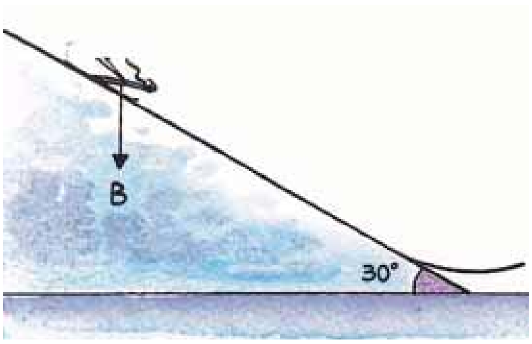
3 Σε υπόγειο τελεφερίκ οι ράγες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 60°. Το βάρος του βαγονιού των επιβατών (μαζί με τους επιβάτες) είναι 30000 N και σύρεται πάνω στις ράγες από την κορυφή με ένα συρματόσχοινο.
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από το συρματόσχοινο στο βαγόνι, ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω;



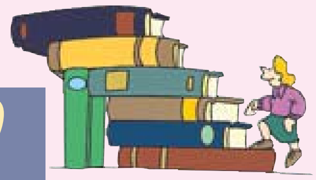
4 Ένας κυνηγός για να φτιάξει μια παγίδα, χρησιμοποιεί δύο σανίδες ίσου μήκους και τις τοποθετεί στο έδαφος, ώστε να σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
Στην κορυφή του τριγώνου τοποθετεί πέτρα βάρους 200 N.
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε σανίδα από το βάρος της πέτρας;



5 Ένας σκιέρ γιγαντιαίου άλματος κατεβαίνει την εξέδρα που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία 30°. Αν το βάρος του έχει μέτρο 800 N, ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που τον μετακινεί κατά μήκος της εξέδρας;



Επανάληψη Κεφαλαίου 2



Επανάληψη στην Τριγωνομετρία

- Αν ω είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

- Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν:
  - $0 < \text{ημω} < 1$
  - $0 < \text{συνω} < 1$
  - $\text{εφω} = \dfrac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$

- Όταν μια οξεία γωνία μεγαλώνει, τότε αυξάνεται το ημίτονό της και η εφαπτομένη της, αλλά ελαττώνεται το συνημίτονό της.

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30° - 45° - 60°

	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Επανάληψη στα Διανύσματα

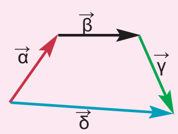
- Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη που έχουν μέτρο και κατεύθυνση.

- Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο.

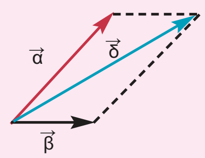
- Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα, ενώ δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

- Άθροισμα διανυσμάτων.

  Α. Η μέθοδος του πολυγώνου:
  Όταν τα διανύσματα γίνουν διαδοχικά.



  Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου:
  Όταν τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$, έχουν κοινή αρχή.



- Διαφορά διανυσμάτων.
  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{ΓΔ}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΔΓ}$

- Διαφορά διανυσμάτων με κοινή αρχή.
  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

- Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το μέτρο του είναι ίσο με 0.

- Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες με μέτρα:

$$|\vec{F_1}| = |\vec{F}|\ \text{συνθ}$$

$$|\vec{F_2}| = |\vec{F}|\ \text{ημθ}$$