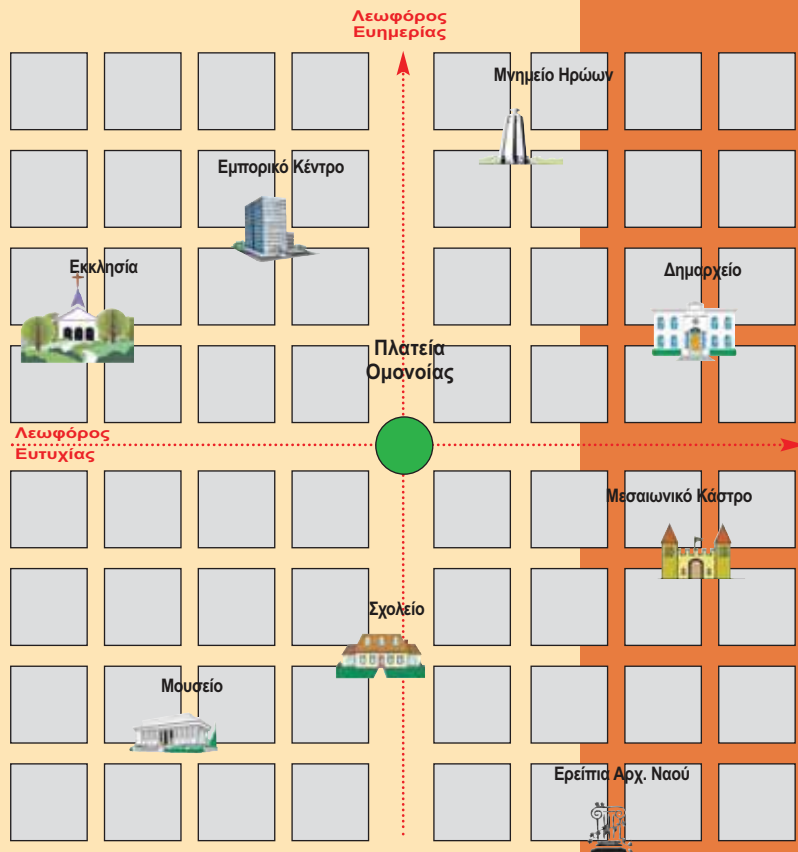


ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3ο

Συναρτήσεις



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

3.1 Η έννοια
της συνάρτησης

3.2 Καρτεσιανές
συντεταγμένες.
Γραφική παράσταση
συνάρτησης

3.3 Η συνάρτηση $y = ax$

3.4 Η συνάρτηση
 $y = ax + \beta$

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$.
Η υπερβολή

Η συνάρτηση αποτελεί
θεμελιώδη έννοια των

Μαθηματικών και

χρησιμοποιείται σε όλες τις

θετικές επιστήμες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα

προσπαθήσουμε να

κατανοήσουμε την έννοια της

συνάρτησης και

θα μελετήσουμε τη γραφική

παράσταση συναρτήσεων σε

καρτεσιανές συντεταγμένες.

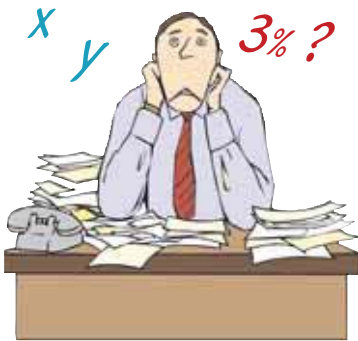
Θα εξετάσουμε έτσι τις

συναρτήσεις που αντιστοιχούν

στις γραφικές παραστάσεις της

ευθείας και της υπερβολής.

3.1. Η έννοια της συνάρτησης



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

- α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;
β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

$$\text{για τον πρώτο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ €},$$

$$\text{για τον δεύτερο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33 \text{ €}.$$

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0,03x$ δηλαδή $y = 0,03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0,03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x . Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0,03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0,03 \cdot 1500 = 45$ €.

Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής x (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x ». Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0,03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση $y = 0,03x$ έχουμε:

$$\text{Για } x = 700, \quad y = 0,03 \cdot 700 = 21.$$

$$\text{Για } x = 800, \quad y = 0,03 \cdot 800 = 24.$$

$$\text{Για } x = 900, \quad y = 0,03 \cdot 900 = 27.$$

$$\text{Για } x = 1000, \quad y = 0,03 \cdot 1000 = 30.$$

$$\text{Για } x = 1100, \quad y = 0,03 \cdot 1100 = 33.$$

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης $y = 0,03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x + 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

- Λύση:** Για $x = -2$: $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.
 Για $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$.
 Για $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
 Για $x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$.
 Για $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

- α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;
 β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.
 γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;



- Λύση:** α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει $0,2 \cdot 500 = 100$ κιλά λάδι.
 β) Από x κιλά ελιές θα πάρει $0,2x$ κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0,2x$.
 γ) Από τη συνάρτηση $y = 0,2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0,2x$
 ή $x = \frac{250}{0,2} = 1250$. Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

- Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:

α) $y = 20x$ β) $y = x + 20$ γ) $y = \frac{x}{20}$ δ) $y = 0,2x$
- Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:

α) $y = x + \frac{15}{100}$ β) $y = x + 15$ γ) $y = 1,15x$ δ) $y = 0,15x$
- Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2 . Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x , είναι:

α) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$ γ) $y = \frac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

4. Δίνεται τετράγωνο πλευράς x . Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν E του τετραγώνου ως συνάρτηση του x είναι:
- α) $E = 2x$ β) $E = x^2$ γ) $E = \sqrt{2x^2}$ δ) $E = 4x$

5. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του διπλανού πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β.

(Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισσεύει.)

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β						
(α) $y = 2x + 1$		i)	x	-3	-1	0	1	2
			y	10	2	1	2	5
(β) $y = x^2 + 1$		ii)	x	-3	-1	0	1	2
			y	-5	-1	1	3	5
(γ) $y = 1 - x$		iii)	x	-3	-1	0	1	2
			y	4	2	1	0	-1
		iv)	x	-3	-1	0	1	2
			y	4	2	1	0	2



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 2$

x	-3	-2	-1	0	2
y					

β) $y = \frac{x-1}{2}$

x	-1	0	2	4	5
y					

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^2 + 1$

x	-3	-1	0	2	5
y					

β) $y = x^2 + 3x - 2$

x	-3	-2	0	1	3
y					

3. Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

4. Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € το μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y , που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

5. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).

- α) Αν η περίμετρος του ορθογώνιου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .

- β) Αν το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι 100 cm², να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .

6. Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν E και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	2,5	5	0,3
E					
\Pi					

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 3x - 5$:

x	2		-3	
y		7		-2

8. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα.

- α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέρες;

- β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

3.2.

Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα χάρτη μιας πόλης στον οποίο φαίνονται οι δύο κεντρικές οδικές αρτηρίες της πόλης και μερικά οικοδομικά τετράγωνα.

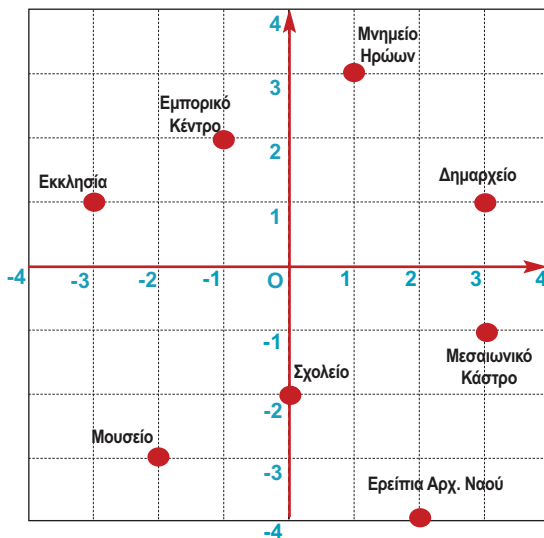
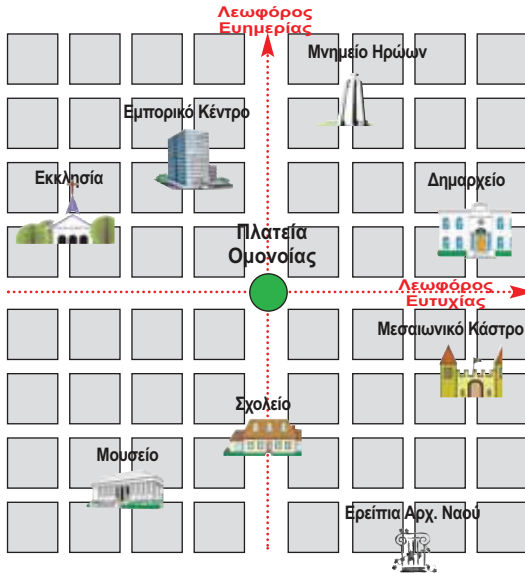
Έχουν, επίσης, σημειωθεί μερικά βασικά σημεία της πόλης, όπως η Ομόνοια (κεντρική πλατεία και σημείο διασταύρωσης των δύο βασικών λεωφόρων), το Δημαρχείο, το Εμπορικό Κέντρο, κ.τ.λ.

Για να επισκεφθούμε κάποιο από αυτά τα σημεία (π.χ. το Δημαρχείο), ξεκινώντας από την Ομόνοια πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα δεξιά πάνω στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Ευημερίας.

Δηλαδή, η θέση του Δημαρχείου προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος των αριθμών (3, 1).

Ομοίως, η θέση της Εκκλησίας προσδιορίζεται από το ζεύγος των αριθμών (-3, 1). Δηλαδή για να πάμε στην εκκλησία ξεκινώντας από την Ομόνοια, πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα αριστερά στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω, παράλληλα προς την Λεωφόρο Ευημερίας.

Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό διάγραμμα (που είναι ένας πιο απλός χάρτης της ίδιας πόλης), για να προσδιορίσετε τη θέση και των άλλων βασικών σημείων της πόλης που φαίνονται στο χάρτη.



Λύση

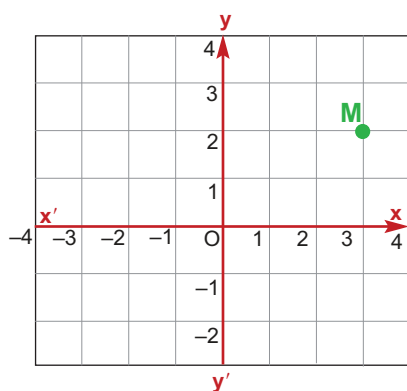
Ξεκινώντας από την Ομόνοια (Ο) έχουμε:

- ❖ Μνημείο Ηρώων: 1 τετράγωνο δεξιά και 3 πάνω, άρα (1, 3).
- ❖ Εμπορικό Κέντρο: 1 τετράγωνο αριστερά και 2 πάνω, άρα (-1, 2).
- ❖ Μουσείο: 2 τετράγωνα αριστερά και 3 κάτω, άρα (-2, -3).
- ❖ Σχολείο: 0 τετράγωνα αριστερά (ή δεξιά) και 2 κάτω, άρα (0, -2).
- ❖ Ερείπια Αρχ. Ναού: 2 τετράγωνα δεξιά και 4 κάτω, άρα (2, -4).
- ❖ Μεσαιωνικό Κάστρο: 3 τετράγωνα δεξιά και 1 κάτω, άρα (3, -1).

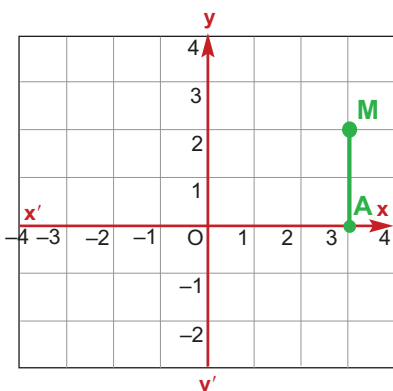
Σύστημα συντεταγμένων

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου της πόλης χρησιμοποιώντας δύο βασικούς οδικούς άξονες: τις Λεωφόρους Ευτυχίας και Ευημερίας.

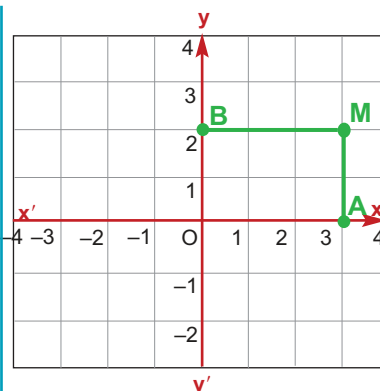
Την ιδέα αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, ως εξής:



1. Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x' και y' , με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο M .



2. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Για το σχήμα μας το A αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα $x'x$.

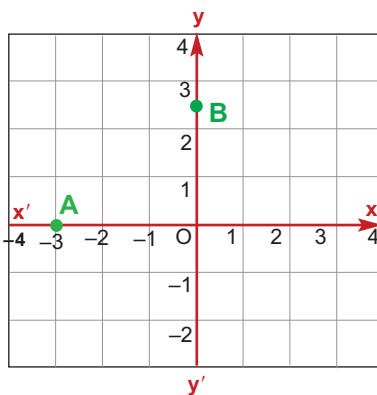


3. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B . Για το σχήμα μας το B αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα $y'y$.

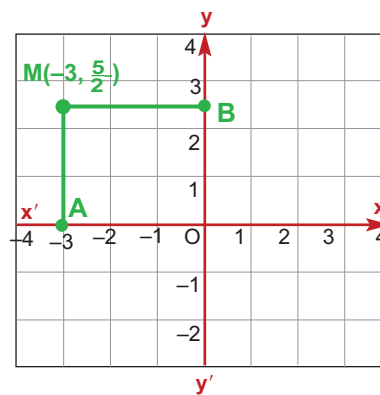
Δηλαδή, το σημείο M αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών $(3, 2)$ και συμβολίζεται $M(3, 2)$. Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου M και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M .

Η τετμημένη και η τεταγμένη του M λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου M .

Αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και ένα ζεύγος αριθμών π.χ. το $(-3, \frac{5}{2})$, μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο M του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό ως εξής:



1. Σημειώνουμε με A το σημείο του άξονα $x'x$ που αντιστοιχεί στον αριθμό -3 και με B το σημείο του άξονα $y'y$ που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{5}{2}$.



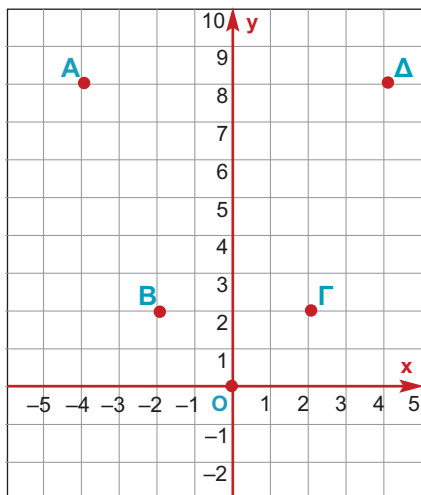
2. Από τα σημεία A και B φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο M , που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες $M(-3, \frac{5}{2})$.

Άρα: 

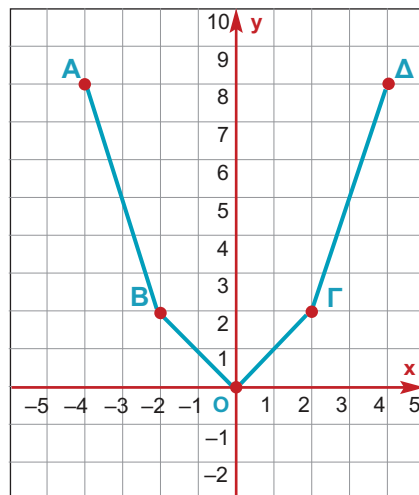
Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες $x'x$ και $y'y$ αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων**.

- β) Τα ζεύγη (x, y) που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα είναι: $(-4, 8)$, $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 2)$ και $(4, 8)$ που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος.



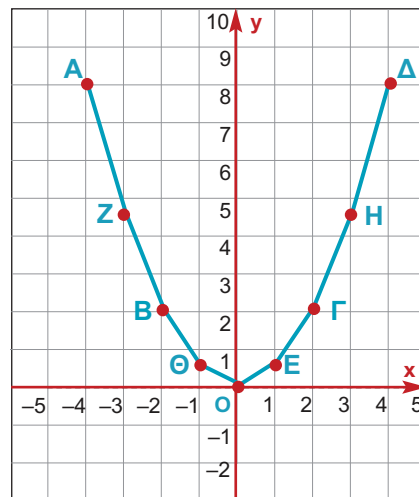
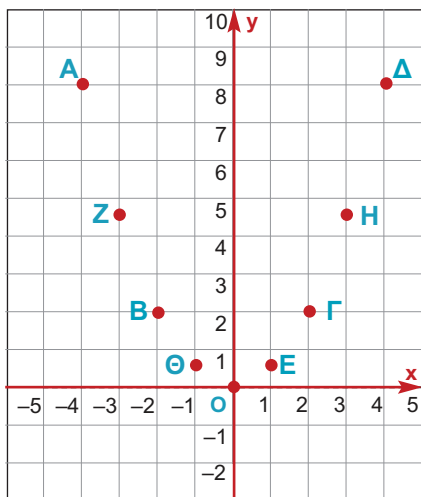
- γ) Ενώνοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή.



- δ) Ομοίως έχουμε:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

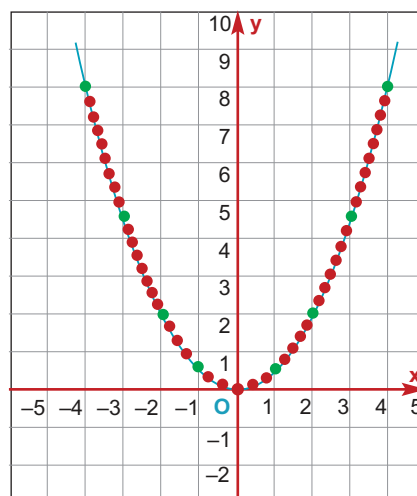
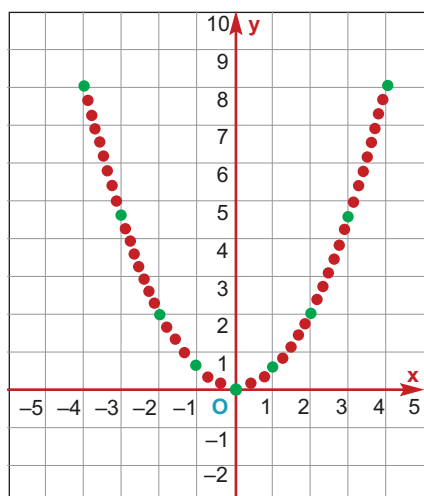
Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.



- ε) Ας χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη. Για παράδειγμα:

x	-4	-3,9	-3,8	-3,7	-3,6	...	0	...	3,6	3,7	3,8	3,9	4
y	8	7,605	7,22	6,845	6,48				6,48	6,845	7,22	7,605	8

Όπως παρατηρούμε στα παρακάτω σχήματα, η γραμμή που θα σχηματιστεί θα είναι καμπύλη.



Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x . Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B , Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

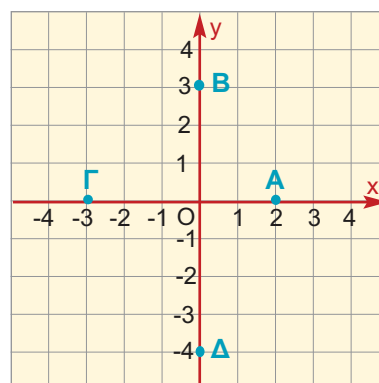
Λύση: Παρατηρούμε ότι από τα σημεία A και Γ οι κάθετες προς τον άξονα $y'y$ αντιστοιχούν στο σημείο O , οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0 .

Άρα είναι $A(2, 0)$, $\Gamma(-3, 0)$.

Ομοίως, από τα σημεία B και Δ οι κάθετες προς τον άξονα $x'x$ αντιστοιχούν στο σημείο O , οπότε τα σημεία αυτά έχουν τεταγμένη 0 . Άρα είναι $B(0, 3)$ και $\Delta(0, -4)$.

Δηλαδή:

Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τεταγμένη 0 .



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται το σημείο $A(3, 2)$. Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς:

α) τον άξονα $x'x$ β) τον άξονα $y'y$ γ) την αρχή O των αξόνων.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Λύση: Από το Α φέρνουμε κάθετες ΑΜ και ΑΠ στους άξονες $x'x$ και $y'y$.

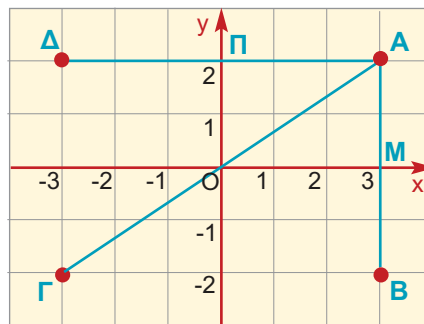
α) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα $MB = MA$.

Το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα $x'x$ και έχει συντεταγμένες $(3, -2)$.

β) Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα $ΠΔ = ΠΑ$.

Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα $y'y$ και έχει συντεταγμένες $(-3, 2)$.

γ) Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΟΓ = ΟΑ$. Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο και έχει συντεταγμένες $(-3, -2)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(10, 9)$. Να υπολογίσετε την απόστασή τους AB . Τι συμπεραίνετε;

Λύση: Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ του διπλανού σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(10, 3)$, οπότε $ΑΓ = 10 - 2 = 8$ και $ΒΓ = 9 - 3 = 6$.

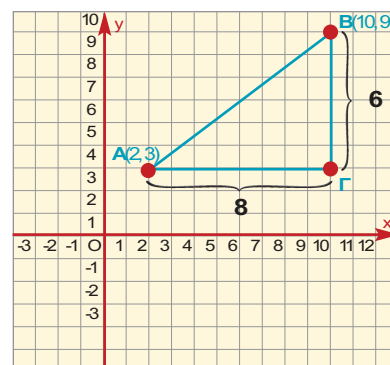
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$$AB^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 8^2 + 6^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 100 \quad \text{ή}$$

$$AB = 10$$



Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

x	0	50	100	200	400
T	28	20	17	12	9

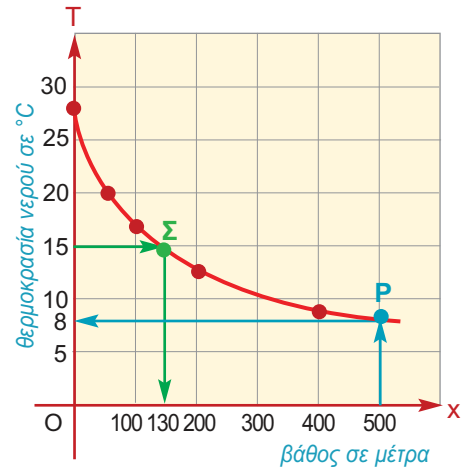
όπου T είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.

γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15°C ;

Λύση: α) Σ' ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 28)$, $(50, 20)$, $(100, 17)$, $(200, 12)$ και $(400, 9)$. Χρησιμοποιούμε ένα μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον άξονα $x'x$ η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε 100 μέτρα, ενώ στον άξονα $y'y$ η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 5°C . Στη συνέχεια, ενώνουμε με μία καμπύλη τα σημεία αυτά.



- β) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων, από το σημείο με τετμημένη 500 του άξονα $x'x$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, που τέμνει την γραφική παράσταση στο σημείο P. Στη συνέχεια, από το P φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη (περίπου) 8. Άρα, η θερμοκρασία σε βάθος $x = 500$ m είναι (περίπου) $T = 8^\circ\text{C}$.
- γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι 15°C , φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 15 του άξονα $y'y$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Σ. Στη συνέχεια, από το Σ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη (περίπου) 130 m. Άρα, η θερμοκρασία είναι 15°C σε βάθος (περίπου) $x = 130$ m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

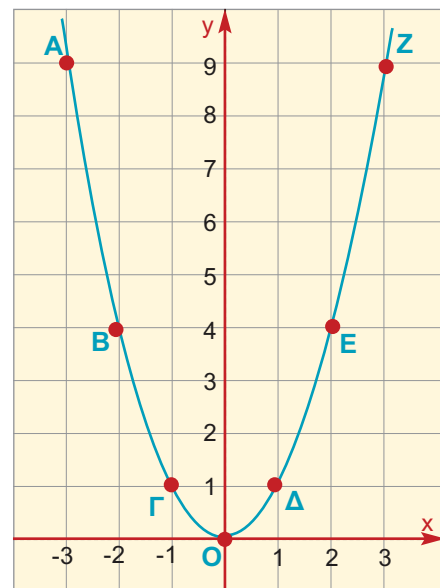
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Λύση: Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία $A(-3, 9)$, $B(-2, 4)$, $\Gamma(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $\Delta(1, 1)$, $E(2, 4)$ και $Z(3, 9)$.

Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

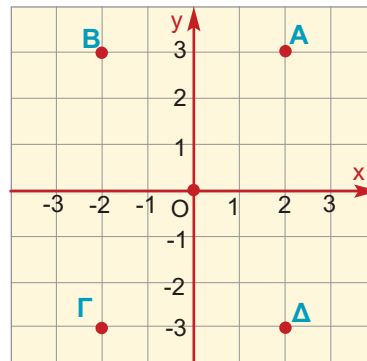




ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:

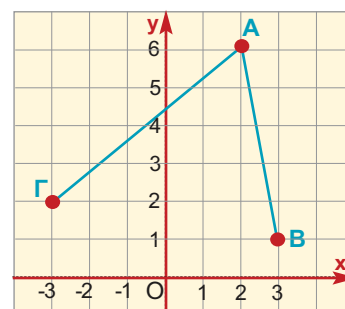
Σημείο	Συντεταγμένες
A	(2, 3) (3, 2)
B	(-2, 3) (-3, 2)
Γ	(-2, -3) (-3, -2)
Δ	(2, -3) (3, -2)



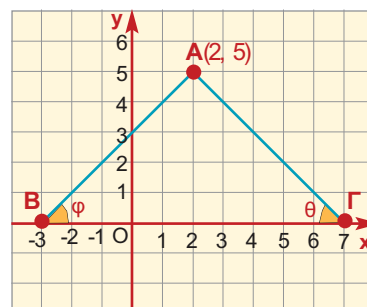
2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.

Σημείο A	Συμμετρικό του A ως προς τον x'x	Συμμετρικό του A ως προς τον y'y	Συμμετρικό του A ως προς το O
(-2, 3)	(-2, -3)	(2, 3)	(2, -3)
(3, 5)			
(-3, 5)			
(-3, -5)			
(3, -5)			

3. Στο διπλανό σχήμα είναι:
α) $AB < AΓ$, β) $AB > AΓ$, γ) $AB = AΓ$
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

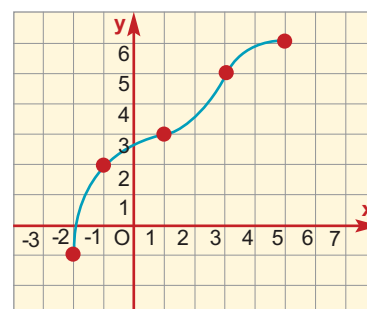


4. Στο διπλανό σχήμα:
α) A: $\hat{A} < 90^\circ$ B: $\hat{A} = 90^\circ$ Γ: $\hat{A} > 90^\circ$
β) A: $\epsilon\phi\theta=5$ B: $\epsilon\phi\theta=\frac{7}{5}$ Γ: $\epsilon\phi\theta=\frac{5}{7}$ Δ: $\epsilon\phi\theta=1$
γ) A: $AB < AΓ$ B: $AB = AΓ$ Γ: $AB > AΓ$
δ) A: $\epsilon\phi\phi=3$ B: $\epsilon\phi\phi = 5$ Γ: $\epsilon\phi\phi=1$ Δ: $\epsilon\phi\phi=2$
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

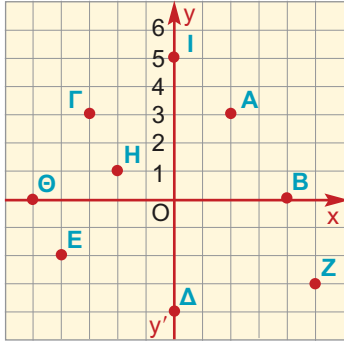
α) για $x=1$, είναι $y = \dots\dots$ A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5
β) για $x=3$, είναι $y = \dots\dots$ A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5
γ) για $y=6$, είναι $x = \dots\dots$ A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5
δ) για $y=2$, είναι $x = \dots\dots$ A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι.



- 2 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να σημειώσετε τα σημεία: $A(-3, 2)$, $B(-0,25, 1)$, $\Gamma(0, -\frac{5}{2})$,

$$\Delta(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}), E(-\sqrt{2}, 0), Z(2,4, -3,2).$$

- 3 Δίνονται τα σημεία $A(-3, 4)$ και $B(2, -\frac{7}{2})$. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την αρχή O των αξόνων.

- 4 α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το μήκος ΒΓ ισούται με:

$$A: 1 + 3 = 4 \quad B: 2 - 2 = 0$$

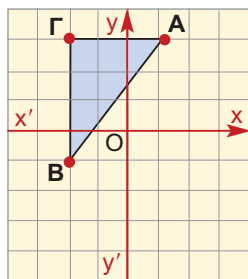
$$\Gamma: 3 - 1 = 2 \quad \Delta: -1 - 3 = -4$$

ii) Το μήκος ΑΓ ισούται με:

$$A: 3 - 3 = 0 \quad B: 1 + 2 = 3$$

$$\Gamma: 1 - 2 = -1 \quad \Delta: 2 - 1 = 1$$

- γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με 5.



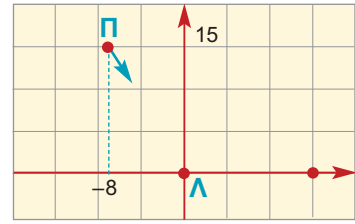
- 5 Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

α) $A(3, 5)$ β) $B(-3, 2)$ γ) $\Gamma(0, -4)$

- 6 Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

α) $A(3, 5)$ και $B(5, 1)$ β) $A(-2, 1)$ και $B(2, -3)$
 γ) $A(3, -5)$ και $B(-2, -5)$ δ) $A(-5, -7)$ και $B(-5, 2)$

- 7 Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ. Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι $(-8, 15)$. Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;



- 8 Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Πίεση P σε cm Hg	76	68	60	52

- α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
 β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος;
 γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg;

- 9 Η θερμοκρασία T του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Θερμοκρασία T σε °C	22	16	10	4

- α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
 β) Πόση περίπου είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 μέτρων;
 γ) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου 12°C;

- 10 Όταν ένα σώμα (π.χ. μια μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (π.χ. από τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου t.

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	5	20	45	80

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

3.3. Η συνάρτηση $y = ax$



Ποσά ανάλογα - Η συνάρτηση $y = ax$

Στην εφημερίδα διαβάζουμε διάφορες φράσεις, όπως: «... η τιμή της βενζίνης μειώθηκε ανάλογα με τη μείωση του πετρελαίου...». Οι φράσεις αυτές παρουσιάζουν ένα ποσό να μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο.

Όπως γνωρίζουμε, δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται τέσσερα τετράγωνα με πλευρές (σε cm) 0,5, 1, 1,5 και 2.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y				
λόγος $\frac{y}{x}$				

β) Να εκφράσετε την περίμετρο y ενός τετραγώνου ως συνάρτηση του μήκους x της πλευράς του.

Λύση

α) Για $x = 0,5$ η περίμετρος είναι $y = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2$. Ομοίως, βρίσκουμε την περίμετρο και στις άλλες περιπτώσεις, που είναι αντίστοιχα: 4, 6 και 8.

Επίσης, για το λόγο $\frac{y}{x}$ έχουμε:

$$\frac{2}{0,5} = 4, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1,5} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{8}{2} = 4$$

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y	2	4	6	8
λόγος $\frac{y}{x}$	4	4	4	4

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός πάντοτε και ίσος με 4.

Άρα $\frac{y}{x} = 4$ ή $y = 4x$. Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x .

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές της μεταβλητής x στη συνάρτηση $y = ax$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Αφού συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ο οποίος περιλαμβάνει και αρνητικές τιμές του x , να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{2}x$. Τι παρατηρείτε;

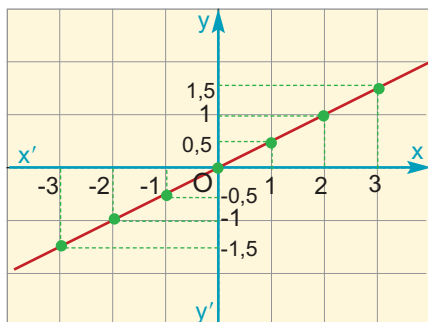
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Λύση

Για $x = -3$ είναι $y = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Ομοίως, βρίσκουμε τις υπόλοιπες τιμές και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5



Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των τιμών του πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση $y = ax$ ή απλώς η ευθεία $y = ax$. Ο άξονας $x'x$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 0x$, δηλαδή $y = 0$.

Η κλίση της ευθείας $y = ax$

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία $y = ax$ ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με a , δηλαδή:

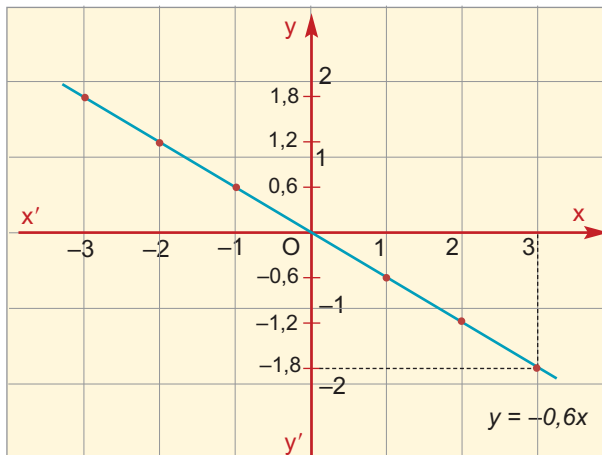
$\frac{y}{x} = a$, για $x \neq 0$. Ο λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας $y = ax$** .

Για παράδειγμα, η ευθεία $y = -2x$ έχει κλίση -2 .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση $y = -0,6x$.

Λύση: Η συνάρτηση $y = -0,6x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Επομένως, πρέπει να βρούμε ένα ακόμα σημείο της. Για $x = 3$ είναι $y = -0,6 \cdot 3 = -1,8$. Άρα, η ευθεία περνάει από το σημείο $A(3, -1,8)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

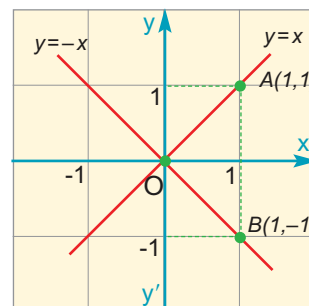


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $y = x$ και $y = -x$.

Λύση: Η συνάρτηση $y = x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O . Ένα δεύτερο σημείο της προσδιορίζεται δίνοντας μια τυχαία τιμή στο x εκτός της μηδενικής. Για $x = 1$ είναι $y = 1$, άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$. Η ζητούμενη ευθεία είναι η OA . Ομοίως, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της $y = -x$ είναι η OB .

Παρατήρηση: Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η $y = -x$ είναι διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(-2, 1)$.

Λύση: Το σημείο A έχει συντεταγμένες $x = -2, y = 1$, οπότε η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -\frac{1}{2}x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.

α) Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;

β) Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά x, y και τα ποσά x, ω .

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20				
Τελική τιμή ω	80				

γ) Να εκφράσετε τα ποσά y και ω ως συναρτήσεις του x .

Λύση: α) Η έκπτωση που αναλογεί είναι $100 \cdot \frac{20}{100} = 20$ €, οπότε θα το αγοράσουμε $100 - 20 = 80$ €.

β) Ομοίως, με το ερώτημα (α) συμπληρώ-
νουμε τον πίνακα:

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20	40	10	16	30
Τελική τιμή ω	80	160	40	64	120

γ) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί: $\frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = \frac{10}{50} = \frac{16}{80} = \frac{30}{150} = 0,2$.
Επομένως, $y = 0,2x$.

Τα ποσά x και ω είναι ανάλογα, γιατί: $\frac{\omega}{x} = \frac{80}{100} = \frac{160}{200} = \frac{40}{50} = \frac{64}{80} = \frac{120}{150} = 0,8$.
Επομένως, $\omega = 0,8x$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.

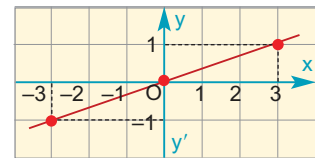
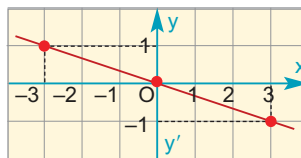
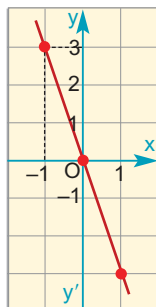
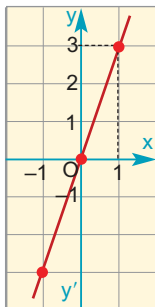
x	2	4	
y	5		15

β) Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του x ;

A: $y = 5x$, B: $y = \frac{2}{5}x$, Γ: $y = \frac{5}{2}x$. Δ: $y = 0,4x$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η $y = 3x$;



3. Ποια από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση $-\frac{1}{3}$;

α) $y = 3x$ β) $y = -3x$ γ) $y = \frac{1}{3}x$ δ) $y = -\frac{1}{3}x$ ε) $y = x - \frac{1}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Γνωρίζοντας ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα:
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:
- | | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|
| x | 1 | 2 | 5 | | |
| y | | 6 | | 21 | 30 |
- β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.
- 2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
 $y = 2x$, $y = 3x$ και $y = 5x$.
- 3 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
 $y = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{1}{2}x$.
- 4 Ένα κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 5 \text{ m/s}$. Να εκφράσετε το διάστημα S που διανύει ως συνάρτηση του χρόνου t . Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.
- 5 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2, 6)$.
- 6 Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων μια ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να έχει κλίση $\frac{3}{2}$.
- 7 Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και από το σημείο $A(-1, 3)$.
- 8 Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' ένα χρόνο.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών x .
β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.
γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:
i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €.
ii) Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.
- 9 Η ισοτιμία του Ευρώ έναντι του Δολλαρίου την 21/7/03 ήταν 112 \$ για 100 €.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την τιμή y σε δολάρια ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής x του προϊόντος αυτού σε Ευρώ.
β) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε δολάρια ενός αεροπορικού εισιτηρίου που κοστίζει 250 €.
γ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε Ευρώ ενός αεροπορικού εισιτηρίου κόστους 250 \$.



3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$

Στις προηγούμενες παραγράφους μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$. Ας δούμε ένα παράδειγμα:



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Το κινητό της Κατερίνας.

Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση $0,9 \text{ €}$ για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Αν ονομάσουμε x το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και y το ποσό πληρωμής (σε €) που αντιστοιχεί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9				

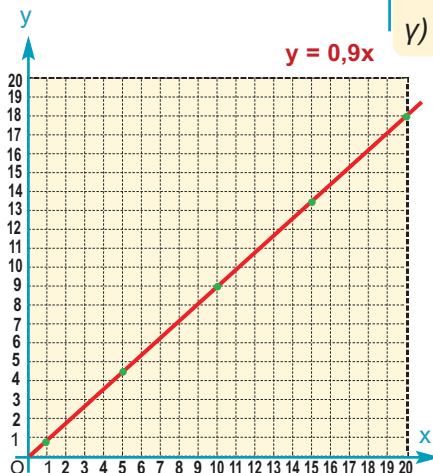
Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 € πάγιο το μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής y με την προσθήκη και των 10 € .

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας					
Πάγιο					
Συνολικό ποσό πληρωμής y					

Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής y ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας x και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;



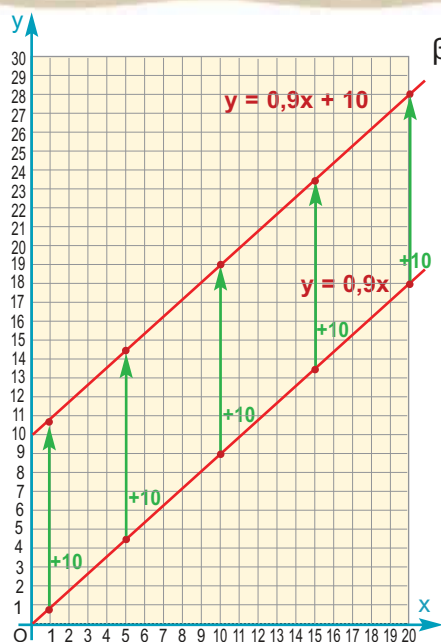
Λύση

α) Για $x = 5$ είναι $y = 0,9 \cdot 5 = 4,5 \text{ €}$.

Ομοίως, βρίσκουμε τα υπόλοιπα ζεύγη του πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9	4,5	9	13,5	18

Παρατηρούμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί $\frac{y}{x} = 0,9$ ή $y = 0,9x$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι μια ημιευθεία που αρχίζει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $0,9$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



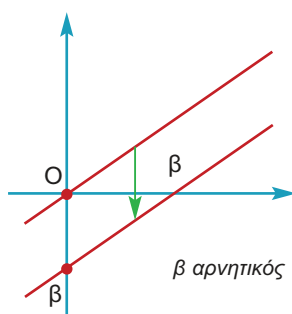
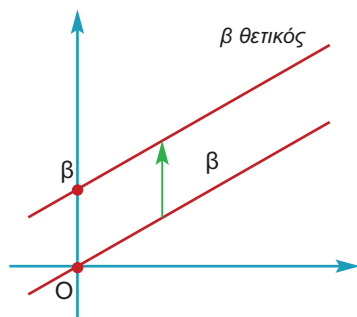
β) Εύκολα συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας στο ποσό πληρωμής και το πάγιο των 10 €.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας	0,9	4,5	9	13,5	18
Πάγιο	+10	+10	+10	+10	+10
Συνολικό ποσό πληρωμής y	10,9	14,5	19	23,5	28

Η νέα συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό ποσό πληρωμής είναι $y = 0,9x + 10$.

Τοποθετούμε στο σύστημα αξόνων τα νέα ζεύγη (x, y) του παραπάνω πίνακα των οποίων η τεταγμένη είναι αυξημένη κατά 10 μονάδες. Αν ενώσουμε τα νέα αυτά σημεία, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 0,9x + 10$ είναι ημιευθεία παράλληλη προς την ημιευθεία $y = 0,9x$, μετατοπισμένη κατά 10 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα y' .

Η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$, $\beta \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα y' .



Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$, θα λέμε: η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ ή απλώς η ευθεία $y = ax + \beta$.

Ο αριθμός a , που, όπως γνωρίζουμε, λέγεται κλίση της ευθείας $y = ax$, λέγεται και **κλίση της ευθείας $y = ax + \beta$** .

Η εξίσωση της μορφής $ax + \beta y = \gamma$

Παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις $y = ax$ και $y = ax + \beta$ παριστάνουν ευθείες. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες εξισώσεις που παριστάνουν ευθείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

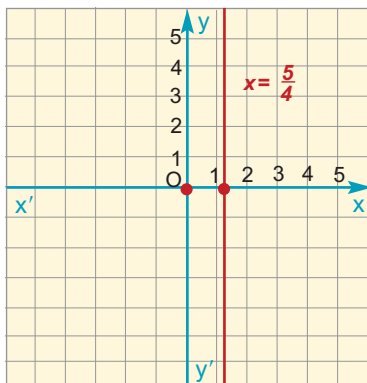
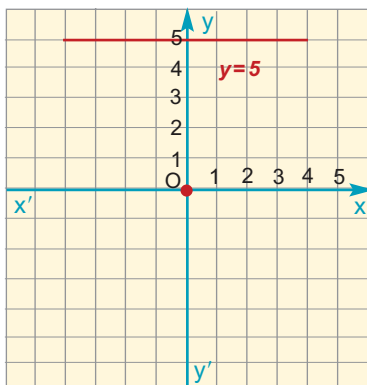
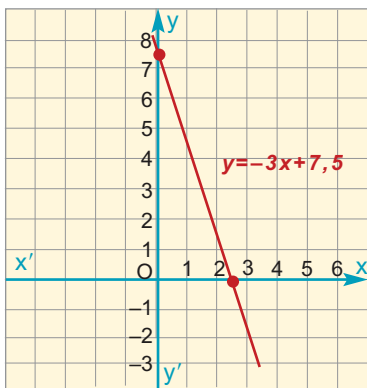


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Η κυρία Μαρίκα σκοπεύει να ξοδέψει 15 € για να αγοράσει κρέας που κοστίζει 6 € το κιλό και πατάτες, που κοστίζουν 2 € το κιλό. Ποια σχέση συνδέει τα κιλά κρέας και τα κιλά πατάτες που τελικά θα αγοράσει;

Λύση

Έστω ότι θα αγοράσει x κιλά κρέας και y κιλά πατάτες. Θα ξοδέψει λοιπόν $6x$ € για το κρέας και $2y$ € για πατάτες. Εφόσον διαθέτει μόνο 15 €, πρέπει $6x + 2y = 15$. Αν λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς y , έχουμε:



$$6x + 2y = 15 \quad \text{ή}$$

$$2y = -6x + 15 \quad \text{ή} \quad \leftarrow \text{Πήγαμε το } 6x \text{ στο άλλο μέλος}$$

$$y = -3x + \frac{15}{2} \quad \leftarrow \text{Διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με 2}$$

που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία.

Γενικά:

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

Για παράδειγμα:

● Η εξίσωση $12x + 3y = 15$ γράφεται $3y = -12x + 15$ ή $y = -4x + 5$ και παριστάνει ευθεία με κλίση $a = -4$.

● Η εξίσωση $0x + 3y = 15$ γράφεται $y = 5$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x' .
Γενικότερα, η εξίσωση $y = \kappa$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x' .
Η ευθεία $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x' .

● Η εξίσωση $12x + 0y = 15$ γράφεται $x = \frac{15}{12}$ ή $x = \frac{5}{4}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.
Γενικότερα, η εξίσωση $x = \kappa$, παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.
Η ευθεία $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

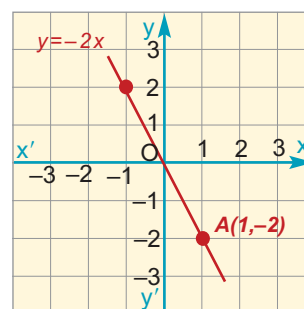
Σημεία τομής της ευθείας $ax + by = \gamma$ με τους άξονες

- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$.
Επομένως, για να βρούμε το σημείο A στο οποίο η ευθεία $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y = 0$ και υπολογίζουμε την τετμημένη του x .
- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$. Επομένως, για να βρούμε το σημείο B στο οποίο η ευθεία $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ τέμνει τον άξονα $y'y$, θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη του y .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

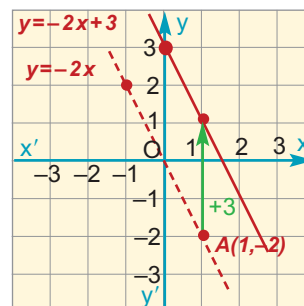
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x$, $y = -2x + 3$ και $y = -2x - 3$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.

Λύση: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της. Για $x = 1$ είναι $y = -2 \cdot 1 = -2$. Άρα, διέρχεται και από το σημείο A με συντεταγμένες $(1, -2)$. Ενώνουμε το O με το A και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της $y = -2x$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

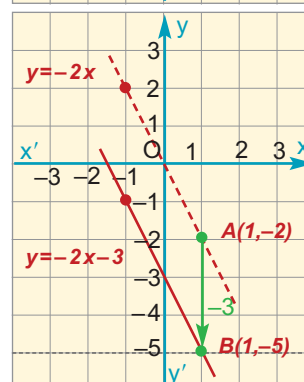


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 3$ είναι ευθεία παράλληλη με την $y = -2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$. Μεταφέρουμε το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο $(0, 3)$ και το σημείο $(1, -2)$ στο $(1, 1)$. Ενώνουμε τα νέα αυτά σημεία και προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 3$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x - 3$ είναι ευθεία παράλληλη με την $y = -2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -3)$. Μεταφέρουμε το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο $(0, -3)$ και το σημείο $(1, -2)$ στο $(1, -5)$. Ενώνουμε τα σημεία αυτά και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται η εξίσωση $3x - 4y = 12$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.

- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
- Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων.
- Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να βρείτε την κλίση της ευθείας.

Λύση: α) Για τον άξονα $y'y$:

θέτουμε $x = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot 0 - 4y = 12 \quad \text{ή} \quad -4y = 12 \quad \text{ή} \quad y = \frac{12}{-4} = -3.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με συντεταγμένες $(0, -3)$.

Για τον άξονα $x'x$:

θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 0 = 12 \quad \text{ή} \quad 3x = 12 \quad \text{ή} \quad x = \frac{12}{3} = 4.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B με συντεταγμένες $(4, 0)$.

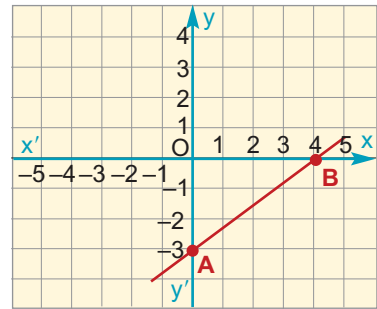
β) Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία Α και Β και προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της ευθείας $3x - 4y = 12$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x , λύνουμε ως προς y τη σχέση $3x - 4y = 12$, δηλαδή:

$$-4y = -3x + 12 \quad \text{ή} \quad y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4} \quad \text{ή}$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3. \quad \text{Η κλίση της ευθείας αυτής είναι } \frac{3}{4}.$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η προσγείωση ενός αεροπλάνου

Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση: $u = 45 - 1,5t$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.



α) Να βρείτε την ταχύτητά του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

β) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητά του u ως συνάρτηση του χρόνου t .

Λύση: α) Για $t = 0$ η ισότητα $u = 45 - 1,5t$ δίνει $u = 45$ m/s.

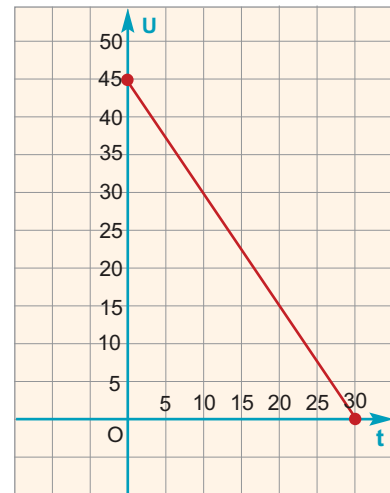
β) Τη στιγμή που σταματάει, το αεροπλάνο έχει ταχύτητα 0 m/s. Για την τιμή αυτή του u , η ισότητα $u = 45 - 1,5t$ γίνεται:

$$0 = 45 - 1,5t \quad \text{ή} \quad 1,5t = 45 \quad \text{ή} \quad t = \frac{45}{1,5} \quad \text{ή}$$

$$t = 30 \text{ (s)}.$$

Άρα, οι δυνατές τιμές του χρόνου t είναι $0 \leq t \leq 30$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $u = 45 - 1,5t$ είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 45) και (30, 0).



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Η ευθεία $y = 3x$ είναι παράλληλη προς την:

A: $y = x + 3$

B: $y = x - 3$

Γ: $y = 3x - 7$

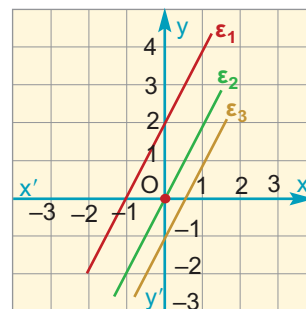
Δ: $y = -3x + 5$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις τρεις παράλληλες ευθείες της στήλης Β.

Να αντιστοιχίσετε καθεμιά με την εξίσωσή της.

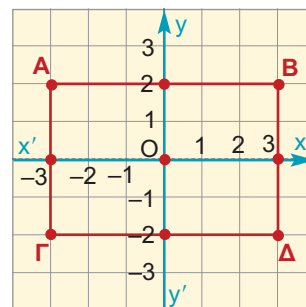
Στήλη Α	Στήλη Β
ϵ_1	$y = 2x$
ϵ_2	$y = 2x - 1$
ϵ_3	$y = 2x + 2$



3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει κέντρο το Ο και οι πλευρές του είναι παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε πλευρά με την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει.

Πλευρές	Ευθείες
ΑΒ	$y = 2$
ΑΓ	$x = 3$
ΓΔ	$y = -2$
ΒΔ	$x = -3$



4. Η ευθεία με εξίσωση $4x + y = 4$

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
α) έχει κλίση:	4	-4	1	-1	$\frac{1}{4}$
β) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο:	(4, 1)	(4, 0)	(-4, 0)	(1, 0)	(0, 4)
γ) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:	(0, 1)	(0, 4)	(4, 4)	(0, -4)	(0, -1)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5. Μια ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες στα σημεία (3, 0) και (0, 4). Η εξίσωσή της είναι:

Α:	$3x + 4y = 9$	Β:	$3x + 4y = 16$	Γ:	$4x + 3y = 12$
----	---------------	----	----------------	----	----------------

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2}x - 3.$$

- 2 Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y = -3x + 2$, όταν:

- ο x είναι πραγματικός αριθμός.
- $x \geq 0$.
- $-2 \leq x \leq 5$.

- 3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση 2 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3 .

- 4 Στο σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AB είναι ίση με $\sqrt{5}$.

- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$ διέρχεται από τα σημεία A και B .



5 Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 0,5 € για τη σημαία και 0,2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό y που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.

6 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $2x - 3y = 6$. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες.

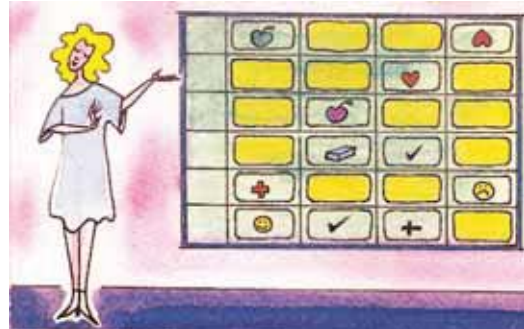
7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $x + y = 2$.

8 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = 2$, $y = 3$, $x = 1$ και $x = -2$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ; Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

9 Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος 200 € το τεμάχιο. Επίσης, πληρώνει 100 € την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

- Να εκφράσετε το συνολικό ημερήσιο κόστος y του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού x των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει ημερησίως.
- Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

10 Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι κάθε παίκτης ξεκινάει έχοντας ως δώρο από την εταιρεία παραγωγής 1000 €. Στη συνέχεια, πρέπει να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 100 €, ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 50 €. Συμβολίζουμε με x το πλήθος των σωστών απαντήσεων.



- Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το πλήθος w των λανθασμένων απαντήσεων.
- Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το συνολικό κέρδος y του παίκτη.
- Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση y .



3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα – Η υπερβολή

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, όταν ένα σώμα κινείται, η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση: Ταχύτητα = $\frac{\text{Διάστημα}}{\text{Χρόνος}}$ ή $u = \frac{s}{t}$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η απόσταση s δύο πόλεων είναι 60 χιλιόμετρα. Αν με t παραστήσουμε το χρόνο (σε ώρες) που χρειάζεται ο ποδηλάτης να διανύσει την απόσταση των δύο πόλεων:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος t	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα u							
Απόσταση s	60	60	60	60	60	60	60

Τι παριστάνει το γινόμενο $u \cdot t$;

β) Γιατί λέμε ότι η ταχύτητα u και ο χρόνος t είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα;

γ) Να εκφράσετε την ταχύτητα u ως συνάρτηση του χρόνου t . Χρησιμοποιήστε τις τιμές του πίνακα του ερωτήματος (α) για να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

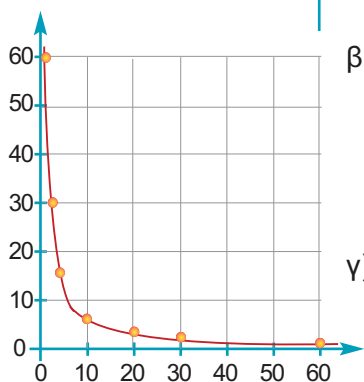
α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Χρόνος t	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα u	60	30	15	6	3	2	1
Απόσταση s	60	60	60	60	60	60	60

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $u \cdot t$ παριστάνει την απόσταση s και είναι πάντοτε 60, δηλαδή $u \cdot t = 60$.

β) Τα ποσά u και t , όπως είδαμε και σε προηγούμενες τάξεις, λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, γιατί όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό. Το γινόμενο $u \cdot t$ των ποσών u και t , αν είναι αντιστρόφως ανάλογα, είναι σταθερό.

γ) Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε όλα τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη (t, u) του παραπάνω πίνακα. Μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Όταν δύο ποσά x και y είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, τότε το **γινόμενο** των αντιστοίχων τιμών τους είναι **σταθερό**. Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y , τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$.

Σε δύο ανάλογα ποσά x και y , οι τιμές τους μπορεί να είναι και αρνητικοί αριθμοί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

α) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{3}{x}$, $x \neq 0$. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y						

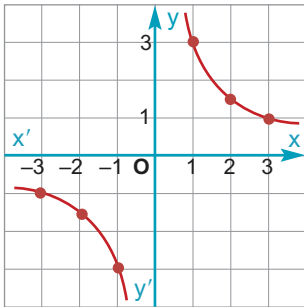
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{3}{x}$, $x \neq 0$.

Λύση

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	3	$\frac{3}{2}$	1

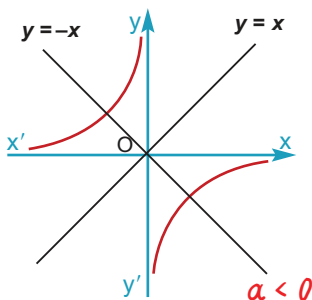
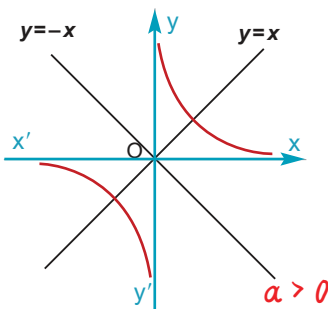
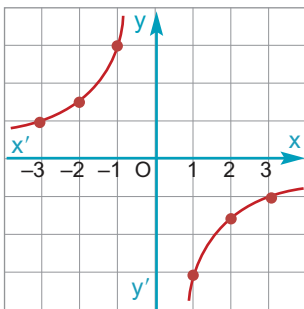
Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) του παραπάνω πίνακα. Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο πρώτο τεταρτημόριο και μία στο τρίτο, όπως στο διπλανό σχήμα.



β) Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο δεύτερο τεταρτημόριο και μία στο πρώτο τεταρτημόριο, όπως στο διπλανό σχήμα.



Οι γραφικές παραστάσεις που κάναμε λέγονται **υπερβολές** και οι δύο γραμμές που τις συνθέτουν λέγονται **κλάδοι** της υπερβολής.

Γενικά:

Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, όπου $a \neq 0$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους** που βρίσκονται:

- Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a > 0$.
- Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a < 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- **Κέντρο συμμετρίας** την αρχή **O** των αξόνων.
- **Άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

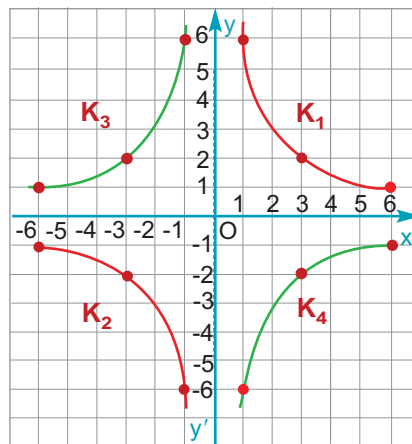
- α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές: $y = \frac{6}{x}, x \neq 0$ και $y = -\frac{6}{x}, x \neq 0$.
 β) Ποιες είναι οι συμμετρίες που ισχύουν μεταξύ των κλάδων των παραπάνω υπερβολών;

Λύση: α) Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	-1	-2	-6	6	2	1

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	1	2	6	-6	-2	-1

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.



- β) Αν ονομάσουμε τους τέσσερις κλάδους K_1, K_2, K_3, K_4 όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε έχουμε ότι:

- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_3 ως προς τον άξονα $y'y$.
 - Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_4 ως προς τον άξονα $x'x$.
 - Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_2 ως προς την αρχή των αξόνων.
- Παρόμοιες συμμετρίες ισχύουν και για τους άλλους κλάδους.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα;

α)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td></tr></table>	x	2	3	5	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	β)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,5</td></tr></table>	x	2	3	5	y	0,2	0,3	0,5	γ)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>4</td><td>2,4</td></tr></table>	x	2	3	5	y	6	4	2,4	δ)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-5</td></tr></table>	x	2	3	5	y	-2	-3	-5
x	2	3	5																																				
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$																																				
x	2	3	5																																				
y	0,2	0,3	0,5																																				
x	2	3	5																																				
y	6	4	2,4																																				
x	2	3	5																																				
y	-2	-3	-5																																				

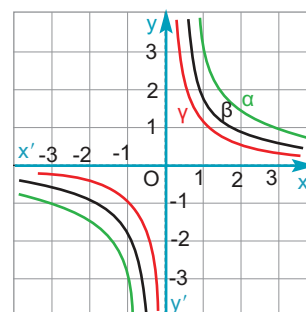
2. Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

- α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.
- β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{5}{x}$ διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.
- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{10}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων.
- δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{5}{x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις (α), (β) και (γ) τριών υπερβολών. Να αντιστοιχίσετε σε καθεμιά την εξίσωσή της.

- A. $y = \frac{1}{x}$
 B. $y = \frac{2}{x}$
 Γ. $y = \frac{3}{x}$





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	6	12
y			4			

- 2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{3}{x}$ β) $y = \frac{5}{x}$ γ) $y = \frac{20}{x}$.

- 3 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$y = \frac{12}{x}$ και $y = -\frac{12}{x}$.

- 4 Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι περίπου $\Gamma\Sigma = 380.000$ χιλιόμετρα.

α) Ποια είναι η ταχύτητα σε km/h ενός πυραύλου που διανύει την απόσταση $\Gamma\Sigma$ σε 3 ημέρες;

β) Να εκφράσετε την ταχύτητα u ενός πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου t που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση $\Gamma\Sigma$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

- 5 Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 36 cm^2 .

α) Ονομάζοντας x και y τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y								

Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη x και y ;








- β) Να εκφράσετε το πλάτος y ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους x .
 γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Επανάληψη Κεφαλαίου

3

Συναρτήσεις



-  Αν ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x}$ δύο ανάλογων ποσών x και y είναι ίσος με a , τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από την ισότητα $y = ax$.
-  Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και έχει κλίση a .
-  Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = ax + \beta$, $\beta \neq 0$ είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $y = ax$ και τέμνει τον αξόνα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη β .
-  Μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
-  Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν a είναι η τιμή του γινομένου $x \cdot y$, το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τη συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$.
-  Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, βρίσκεται:
 - στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a > 0$
 - στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a < 0$.
-  Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, έχει:
 - κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
 - άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.