

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2ο

Πραγματικοί αριθμοί



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

2.1 Τετραγωνική ρίζα
θετικού αριθμού

2.2 Άρρητοι αριθμοί.
Πραγματικοί αριθμοί

2.3 Προβλήματα

Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει φυσικούς, ακέραιους και ρητούς αριθμούς.

Στους τελευταίους είχαμε εξετάσει τη δεκαδική τους παράσταση, η οποία ήταν γνωστή σε απλή ή περιοδική μορφή.

Υπάρχει όμως και ένα άλλο σύνολο αριθμών, οι άρρητοι, τους οποίους εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό.

Οι άρρητοι μαζί με τους ρητούς σχηματίζουν τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίοι τοποθετούνται με πλήρη τρόπο πάνω σε μια ευθεία που την ονομάζουμε ευθεία των πραγματικών αριθμών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την εφαρμογή προσεγγίσεων των άρρητων στην επίλυση προβλημάτων.

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού



ριζικό ή σύμβολο ρίζας



υπόριζη ποσότητα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η Πηνελόπη έγινε αρχιτέκτων! Πήρε επιτέλους το δίπλωμά της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά! Πρέπει να χτίσει ένα σπίτι με τετραγωνική βάση σε ένα γωνιακό οικόπεδο. Αφού ρώτησε την Πολεοδομία, πληροφορήθηκε ότι στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί κανείς να χτίσει σπίτι εμβαδού 289 m^2 . Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς της τετραγωνικής βάσης του σπιτιού;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $E = x^2$. Άρα πρέπει $x^2 = 289$. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x , του οποίου το τετράγωνο να είναι 289.

- ❖ Μήπως είναι $x = 10$;
Τότε όμως $x^2 = 10^2 = 100$ (θέλει πιο πολύ).
- ❖ Μήπως είναι $x = 20$;
Τότε όμως $x^2 = 20^2 = 400$ (θέλει πιο λίγο).
- ❖ Μήπως είναι $x = 15$;
Τότε όμως $x^2 = 15^2 = 225$ (θέλει λίγο πιο πολύ).
- ❖ Μήπως είναι $x = 17$;
Τότε $x^2 = 17^2 = 289$ (αυτό είναι!).

Το σπίτι θα έχει τετραγωνική βάση, πλευράς 17 (m).

Ο θετικός αριθμός 17, του οποίου το τετράγωνο ισούται με 289, ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα του 289** και συμβολίζεται με $\sqrt{289}$. Δηλαδή $\sqrt{289} = 17$.

Γενικά:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό a . Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με \sqrt{a} .

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Για παράδειγμα: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ γιατί $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
 $\sqrt{0,64} = 0,8$ γιατί $0,8^2 = 0,64$
 $\sqrt{17,64} = 4,2$ γιατί $4,2^2 = 17,64$

Σχόλια:

- Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η $\sqrt{-25}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -25 .

► Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, προκύπτει ότι:

- Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$.
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

► Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- α) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, παρόλο που $(-5)^2 = 25$, καθώς $-5 < 0$.
 β) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς $-5 < 0$. Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τους αριθμούς: $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{121}$.

Λύση: Αν $x = \sqrt{25}$ τότε $x^2 = 25$. Άρα πρέπει να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25. Με δοκιμές βρίσκουμε εύκολα ότι $5^2 = 25$, δηλαδή $x = 5$.
 Άρα $\sqrt{25} = 5$.

Ομοίως, βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{49} = 7 \text{ γιατί } 7^2 = 49, \quad \sqrt{64} = 8 \text{ γιατί } 8^2 = 64, \quad \sqrt{121} = 11 \text{ γιατί } 11^2 = 121.$$

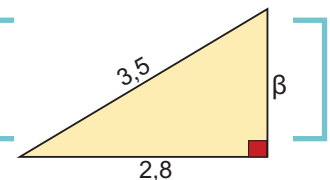
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες: α) $\sqrt{16}$, β) $\sqrt{0,16}$, γ) $\sqrt{0,0016}$.

- Λύση:** α) Γνωρίζουμε ότι $4^2 = 16$. Άρα $\sqrt{16} = 4$.
 β) Γνωρίζουμε ότι $(0,4)^2 = 0,16$. Άρα $\sqrt{0,16} = 0,4$.
 γ) Γνωρίζουμε ότι $(0,04)^2 = 0,0016$. Άρα $\sqrt{0,0016} = 0,04$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

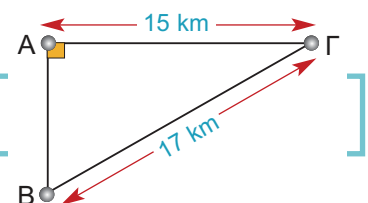
Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.



- Λύση:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
 $\beta^2 + 2,8^2 = 3,5^2$ ή $\beta^2 + 7,84 = 12,25$ ή
 $\beta^2 = 12,25 - 7,84$ ή $\beta^2 = 4,41$
 Επομένως: $\beta = \sqrt{4,41} = 2,1$ γιατί $2,1^2 = 4,41$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;



- Λύση:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
 $AB^2 + AG^2 = BG^2$ ή $AB^2 + 15^2 = 17^2$ ή
 $AB^2 + 225 = 289$ ή $AB^2 = 289 - 225$ ή
 $AB^2 = 64$ οπότε $AB = \sqrt{64}$ ή $AB = 8$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Για τους x, y ισχύει: $y = \sqrt{x}$. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		A	B	Γ
α)	Ο x είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο y είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

2. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις:
 Α: μόνο το 4 Β: μόνο το -4 Γ: το 4 και το -4.

3. Στον διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
25	18
	6
36	4

4. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| α) $\sqrt{16} = 8$ | β) $\sqrt{4} = 16$ |
| γ) $\sqrt{9} = 3$ | δ) $\sqrt{0,4} = 0,2$ |
| ε) $\sqrt{-9} = -3$ | στ) η $\sqrt{0}$ δεν υπάρχει |
| ζ) $\sqrt{4} = -2$ | η) $\sqrt{16+9} = 5$ |
| θ) $\sqrt{25-9} = 5-3 = 2$ | ι) $\sqrt{100} = 50$ |

5. Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	A	B	Γ	Δ	Ε
1. Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2. Αν $\sqrt{x} = 9$, τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3. Αν $\sqrt{x} = -16$, τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4. Αν $\sqrt{100} = x$	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

- α) $\sqrt{81}$, $\sqrt{0,81}$, $\sqrt{8100}$.
 β) $\sqrt{4}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40000}$
 γ) $\sqrt{121}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{12100}$, $\sqrt{0,0121}$
 δ) $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{\frac{144}{25}}$, $\sqrt{\frac{400}{49}}$, $\sqrt{\frac{36}{121}}$.

2. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

- α) $\sqrt{36} =$ β) $\sqrt{18+18} =$
 γ) $\sqrt{18 \cdot 18} =$ δ) $(\sqrt{18})^2 =$

3. Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα.

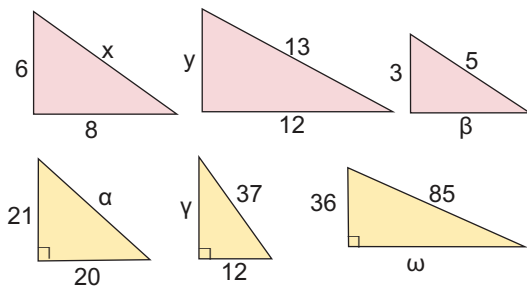
α) $\sqrt{\frac{4}{\square}} = \frac{2}{3}$ β) $(\sqrt{\square})^2 = 5$
 γ) $\sqrt{\square + 3} = 6$ δ) $\sqrt{\square} + 2 = 11$
 ε) $2 - \sqrt{\square} = 0$ στ) $(\sqrt{\square})^2 + \sqrt{\square} = 6$

4 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$ β) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2$

γ) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$

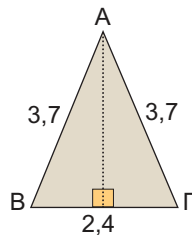
5 Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογώνιων τριγώνων.



6 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = 25$
 γ) $x^2 = 64$ δ) $x^2 = \frac{100}{81}$

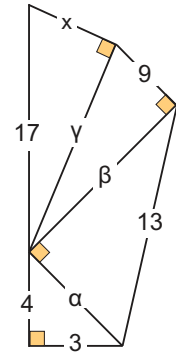
7 Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



8 Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογώνιου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65 m και 72 m.

9 Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

10 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος x.



11 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, α , α^2 , στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\alpha > 1$ π.χ. $\alpha = 4$, $\alpha = 9$, $\alpha = 16$...

β) Αν $0 < \alpha < 1$ π.χ. $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{9}$, $\alpha = \frac{1}{16}$, ...
 Τι παρατηρείτε;

12 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε;

13 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

Τι συμπεραίνετε;

14 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$
9	16				
64	36				

Τι συμπεραίνετε;

1

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

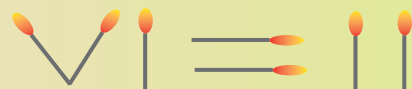
Ρώτησαν ένα μαθηματικό του 20ου αιώνα πόσων ετών είναι. Αυτός απάντησε ως εξής:

«Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι ακριβώς ίση με τη σημερινή μου ηλικία».

Πόσων ετών ήταν, τότε γεννήθηκε και ποια χρονολογία έγινε η ερώτηση;

2

Μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός μόνο σπρίτου, ώστε να προκύψει μια πλήρης ισότητα;



2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.

Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$.

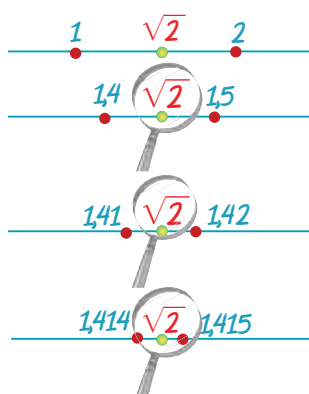
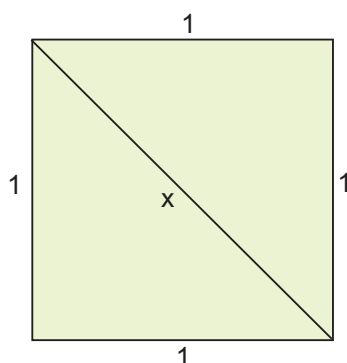
Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.

Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Στη συνέχεια, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός $\frac{\mu}{\nu}$, τέτοιος ώστε, $x = \frac{\mu}{\nu}$. Αυτό σημαίνει ότι ο x δε μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός.

Γενικά:

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.



Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό x , παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 < 2 < 2^2 = 4 \\ 1,96 &= 1,4^2 < 2 < 1,5^2 = 2,25 \\ 1,9881 &= (1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164 \\ 1,9994 &= (1,414)^2 < 2 < (1,415)^2 = 2,0022 \\ 1,99996 &= (1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024 \\ 1,9999899 &= (1,41421)^2 < 2 < (1,41422)^2 = 2,000018 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41 &< \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414 &< \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142 &< \sqrt{2} < 1,4143 \\ 1,41421 &< \sqrt{2} < 1,41422 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη παράγραφο συμβολίζαμε με \sqrt{a} τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό a .

Επομένως, τον αριθμό x που προσπαθούμε να βρούμε έτσι ώστε $x^2 = 2$, μπορούμε να τον συμβολίζουμε με $\sqrt{2}$, αλλά δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Αφού είναι άρρητος, δε μπορεί να γραφεί ως ρητός ή δεκαδικός με γνωστά ψηφία. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ ως εξής:

Άρα: 

Έχουμε:

με προσέγγιση χιλιοστού: $\sqrt{2} = 1,414$
 με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού: $\sqrt{2} = 1,4142$
 με προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού: $\sqrt{2} = 1,41421$ κ.ο.κ.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$** .

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π .

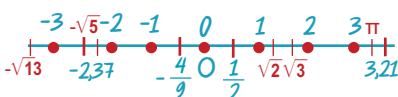
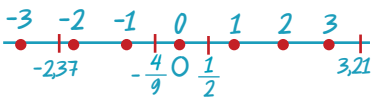
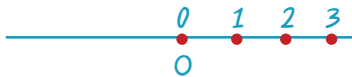
Σχόλιο:

Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ και $\boxed{\sqrt{\quad}}$, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

Πραγματικοί αριθμοί

Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- ▶ Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
Στην αρχή 0 έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).
- ▶ Οι ακέραιοι αριθμοί: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής 0 τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.
- ▶ Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.
- ▶ Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών**.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση: Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή $3^2 = 9$ και $4^2 = 16$ είναι $3 < \sqrt{13} < 4$.
 Επειδή $(3,6)^2 = 12,96$ και $(3,7)^2 = 13,69$ είναι $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$.
 Επειδή $(3,60)^2 = 12,960$ και $(3,61)^2 = 13,032$ είναι $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$.
 Επειδή $(3,605)^2 = 12,996$ και $(3,606)^2 = 13,003$ είναι $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$.
 Άρα η ρητή προσέγγιση του $\sqrt{13}$ είναι 3,605.

Σχόλιο: Για την ακρίβεια λέμε ότι $\sqrt{13} = 3,605$ με έλλειψη και $\sqrt{13} = 3,606$ με υπερβολή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Χρησιμοποιήστε ένα μικροϋπολογιστή τσέπης για να βρείτε με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων τις τετραγωνικές ρίζες: α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{50}$, γ) $\sqrt{72}$, δ) $\sqrt{1764}$, ε) $\sqrt{427}$.

Λύση: Έχουμε ότι:

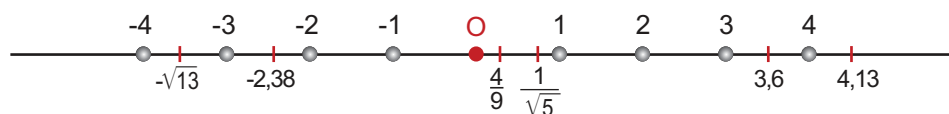
- α) Πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα και $\boxed{3} \boxed{\sqrt{\quad}}$ στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 1,7320508. Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων ισχύει ότι:
 $\sqrt{3} = 1,732$.
- β) Ομοίως $\sqrt{50} = 7,071$ γ) Ομοίως $\sqrt{72} = 8,485$
 δ) Ομοίως $\sqrt{1764} = 42$ ε) Ομοίως $\sqrt{427} = 20,664$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$-4, -2,38, \frac{4}{9}, -\sqrt{13}, 4,13, 3,6, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1, 2$.

Λύση: Μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους, οπότε έχουμε:



$-4 < -\sqrt{13} = -3,61 < -3 < -2,38 < -2 < 0 < \frac{4}{9} = 0,4 < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45 < 1 < 2 < 3,6 < 4 < 4,13$

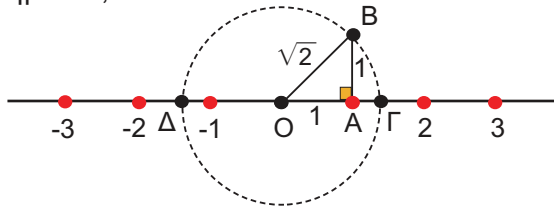
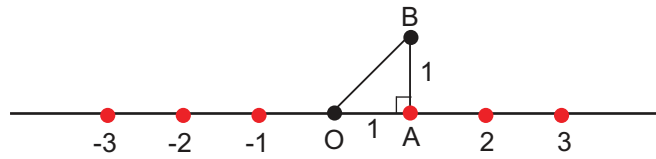
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση: Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα AB στον άξονα μήκους 1.

Το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
 $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ή
 $OB = \sqrt{2}$. Με κέντρο το O και
 ακτίνα OB κατασκευάζουμε κύκλο
 ο οποίος τέμνει τον άξονα στα
 σημεία Γ, Δ .



Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$,
 ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

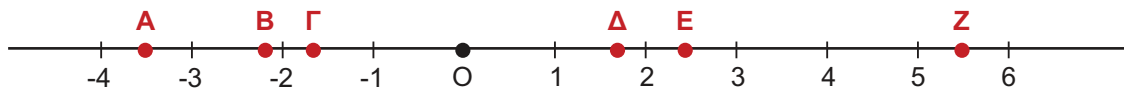


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) $4 < \sqrt{4,5} < 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	δ) $10 < \sqrt{21} < 11$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
β) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ε) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
γ) $7 < \sqrt{15} < 8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	στ) $2 < \sqrt{7} < 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z . Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	A	E	Γ	Δ
β) Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	E	Z
γ) Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	B	Δ	A
δ) Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	B	A



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2$ β) $-\sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$

γ) $\sqrt{18}, \sqrt{\frac{18}{2}}, \sqrt{18^2}$

- 2 Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

α) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, 2, \sqrt{2}$
 γ) $1+\sqrt{3}, \sqrt{3}$ δ) $\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}$

- 3 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως

και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{5}$, γ) $\sqrt{7}$, δ) $\sqrt{8}$.

- 4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

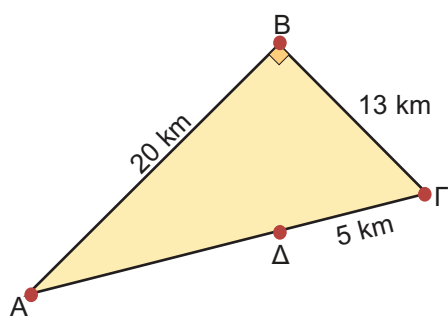
α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$, γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

- 5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 12 cm^2 . Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.

- 6 Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 12 cm . Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς του με προσέγγιση δύο δεκαδικών, β) την ακριβή τιμή του εμβαδού του.

2.3. Προβλήματα

Όπως γνωρίζουμε, δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή ενός άρρητου αριθμού. Σε διάφορα όμως προβλήματα της πραγματικής ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.



Πρόβλημα 1

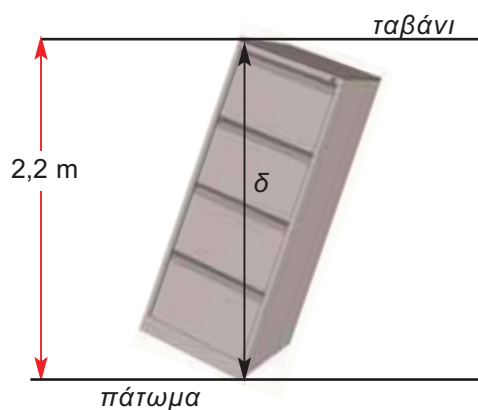
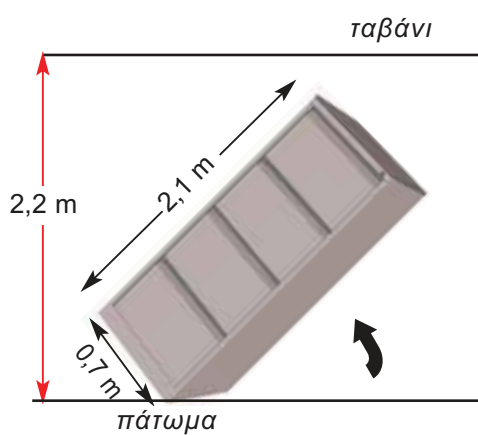
Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις $AB = 20 \text{ km}$, $B\Gamma = 13 \text{ km}$ και $\Gamma\Delta = 5 \text{ km}$. Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} A\Gamma^2 &= AB^2 + B\Gamma^2 & \text{ή} & & A\Gamma^2 &= 20^2 + 13^2 & \text{ή} \\ A\Gamma^2 &= 569 & \text{ή} & & A\Gamma &= \sqrt{569} & \text{ή} \\ A\Gamma &= 23,85 \text{ (km)} & \text{με προσέγγιση εκατοστού.} & & & & \end{aligned}$$

Επομένως, $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma = 23,85 - 5 = 18,85 \text{ (km)}$.



Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του διπλανού σχήματος;

Λύση

Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

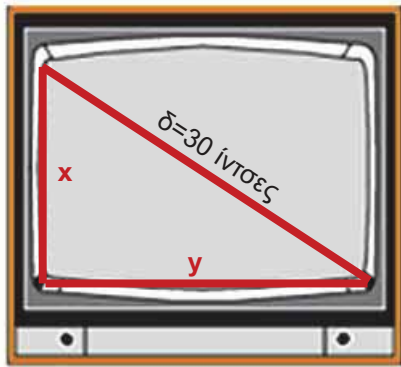
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\delta^2 = 2,1^2 + 0,7^2 = 4,41 + 0,49 = 4,90.$$

Άρα $\delta = \sqrt{4,90} = 2,21 \text{ (m)}$ με προσέγγιση εκατοστού. Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί $\delta > 2,2 \text{ (m)}$.

Πρόβλημα 3

Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x , y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.



Λύση

Αφού x , y είναι οι διαστάσεις της οθόνης και 30 ίντσες η διαγώνιος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι: $x^2 + y^2 = 30^2$.

Από τα δεδομένα έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, οπότε

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{7}{16} \quad \text{ή} \quad x^2 = \frac{7}{16}y^2$$

και αντικαθιστώντας στο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\frac{7}{16}y^2 + y^2 = 30^2 \quad \text{ή} \quad \frac{23}{16}y^2 = 30^2 \quad \text{ή}$$

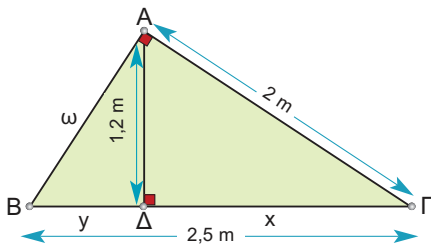
$$23y^2 = 14400 \quad \text{ή} \quad y^2 = \frac{14400}{23} \quad \text{ή}$$

$$y^2 = 626,08 \quad \text{ή} \quad y = 25,02 \text{ (ίντσες)}$$

$$\text{και } x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 25,02 = 16,55 \text{ (ίντσες)}.$$

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x , y και ω .



Λύση

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 \quad \text{ή}$$

$$2^2 = 1,2^2 + x^2 \quad \text{ή}$$

$$x^2 = 2^2 - 1,2^2 = 4 - 1,44 = 2,56.$$

$$\text{Άρα } x = \sqrt{2,56} = 1,6 \text{ (m)}.$$

$$\text{Επίσης } ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ \quad \text{ή}$$

$$2,5 = y + 1,6 \quad \text{ή}$$

$$y = 2,5 - 1,6 = 0,9 \text{ (m)}.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

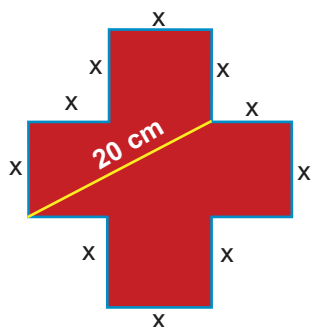
$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 \quad \text{ή}$$

$$\omega^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = 1,44 + 0,81 = 2,25.$$

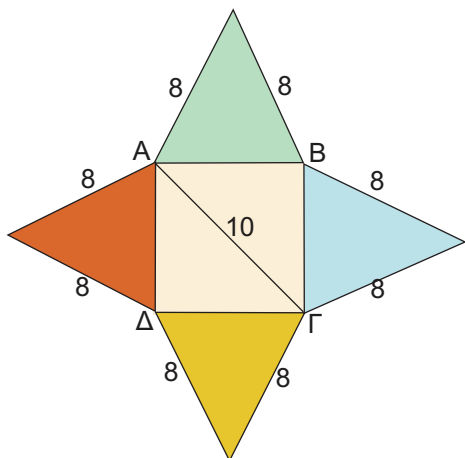
$$\text{Άρα } \omega = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ (m)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

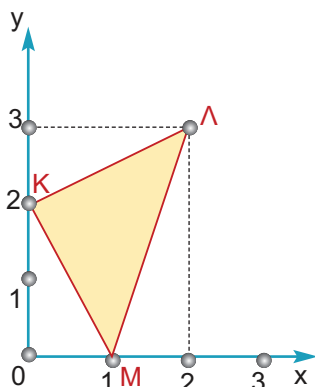
- 1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του σχήματος.



- 2 Το ανάπτυσμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιάς του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές τους είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



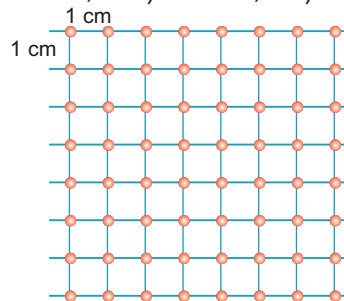
- 3 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0,2), Λ(2,3), Μ(1,0). Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



- 4 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

- 5 Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις).

- 6 Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1 cm οριζόντια και κατακόρυφα.
- α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες, ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι:
i) $\sqrt{2}$ cm, ii) $\sqrt{5}$ cm, iii) $\sqrt{13}$ cm.
- β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν:
i) 2 cm^2 , ii) 5 cm^2 , iii) 13 cm^2 .



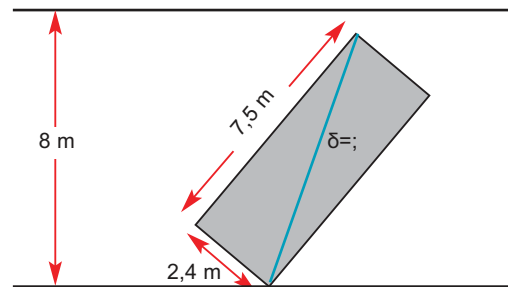
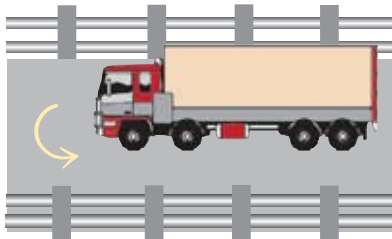
- 7 Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2 m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος.



- 8 Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20 cm και 2,3 m. Το τρίγωνο έχει βάση 60 cm και ίσες πλευρές 2,1 m. Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινου χρώματος το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm^2 ;



- 9 Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;



Επανάληψη Κεφαλαίου

2



Πραγματικοί αριθμοί

Τετραγωνική ρίζα

ενός θετικού αριθμού α , λέγεται ένας θετικός αριθμός x ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α . Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, τότε $x^2 = \alpha$, όπου οι αριθμοί α και x είναι θετικοί ή ίσοι με μηδέν.

Επομένως: $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

Άρρητοι αριθμοί

ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, με μ, ν ακέραιους και $\nu \neq 0$.

Πραγματικοί αριθμοί

ονομάζονται όλοι οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί.