Το Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Η μέθοδος d’ Alembert

Θεωρούμε το Μη Φραγμένο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

(Ε) $u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$

(ΑΣ) $\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}$

Αφού η κυματική εξίσωση είναι β’ τάξης στο χρόνο χρειάζονται **δύο Αρχικές Συνθήκες**. Αν η ΜΔΕ περιγράφει τις ταλαντώσεις μιας χορδής, τότε τόσο η αρχική θέση όσο και η αρχική ταχύτητα της χορδής πρέπει να δοθούν σε κάθε σημείο της. Θα βρούμε τη λύση του ΠΑΤ αντικαθιστώντας τις Αρχικές Συνθήκες στη γενική λύση d’ Alembert.

Αντικατάσταση στη γενική λύση

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

των δύο Αρχικών Συνθηκών δίνει:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad (1)$$

και

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\,\varphi'(x-ct) + c\,\psi'(x+ct) \Rightarrow$$

$$u_t(x,0) = -c\,\varphi'(x) + c\,\psi'(x) = g(x) \qquad (2)$$

Με ολοκλήρωση της (2) βρίσκουμε:

$$\int_0^x g(s)ds = -c\,[\varphi(x) - \varphi(0)] + c\,[\psi(x) - \psi(0)] \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + K \ \text{ με } K = \varphi(0) - \psi(0) = σταθερά \qquad (3)$$

Με προσθαφαίρεση των σχέσεων (1) και (3) προκύπτουν:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\,c}\int_0^x g(s)ds + \frac{K}{2} \qquad (4)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\,c}\int_0^x g(s)ds - \frac{K}{2} \qquad (5)$$

Εφαρμόζουμε στην (4) μια αλλαγή του συμβόλου της μεταβλητής από $x \to x - ct$

$$\varphi(x-ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2\,c}\int_0^{x-ct} g(s)ds + \frac{K}{2} \qquad (6)$$

Εφαρμόζουμε αντίστοιχα στην (5) μια αλλαγή του συμβόλου της μεταβλητής από $x \to x + ct$

$$\psi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2\,c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \frac{K}{2} \qquad (7)$$

Τελικά έχουμε τη **λύση d’ Alembert**:

$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct) \Rightarrow$

$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2\,c}\int_0^{x-ct} g(s)ds + \frac{K}{2} + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2\,c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \frac{K}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds}}$$

Ερμηνεία της λύσης

Η λύση d' Alembert στο σημείο $\Sigma(x,t)$ είναι ο μέσος όρος των αρχικών απομακρύνσεων $f(x)$ στα σημεία $\Sigma_1(x - c\,t, 0)$ και $\Sigma_2(x + c\,t, 0)$ αντίστοιχα, τα οποία βρίσκουμε «ταξιδεύοντας» προς τα πίσω στο χρόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών, συν το ολοκλήρωμα της αρχικής ταχύτητας μεταξύ των σημείων αυτών πάνω στην γραμμή της αρχής $t = 0$.

Παρατηρήσεις:

- Η ιδιότητα ότι τα αρχικά δεδομένα μεταφέρονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών διακρίνει τις Υπερβολικές ΜΔΕ από τις Παραβολικές και Ελλειπτικές ΜΔΕ.
- Αν η $f \in C^2(\mathbb{R})$ και η $g \in C^1(\mathbb{R})$ τότε η λύση που βρήκαμε είναι μια **κλασσική** λύση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών.
- Η λύση του ΠΑΤ δεν μπορεί να είναι πιο λεία από την αρχική συνάρτηση f : αν η f έχει σε κάποιο σημείο μια **ασυνέχεια** τύπου άλματος, τότε η ίδια η λύση u έχει προφανώς ένα αντίστοιχο σημείο ασυνέχειας. Η ιδιαίτερη μορφή της λύσης καταδεικνύει ότι τέτοιες αρχικές ασυνέχειες στα δεδομένα επιμένουν στο χρόνο και **μεταφέρονται** από την πηγή τους στην αρχή του χρόνου $t = 0$ **κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών** $x - ct = k_1$ και $x + ct = k_2$.
- Η λύση στο (x,t) εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα στο διάστημα $[x - ct, x + ct]$.
- Η στρατηγική της αντικατάστασης της Γενικής Λύσης στις Αρχικές Συνθήκες **δεν** είναι μια κοινή τεχνική στην επίλυση ενός ΠΑΤ. Κανονικά δεν μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση μιας ΜΔΕ, και αν ακόμα τη βρίσκαμε, θα είναι υπερβολικά πολύπλοκη για να την αντικαταστήσουμε στις Αρχικές Συνθήκες.

Παράδειγμα της Λύσης d' Alembert

<u>Η κίνηση ενός αρχικού ημιτονικού κύματος.</u>

Θεωρούμε τις Αρχικές Συνθήκες

$$u(x,0) = \sin x$$
$$u_t(x,0) = 0$$

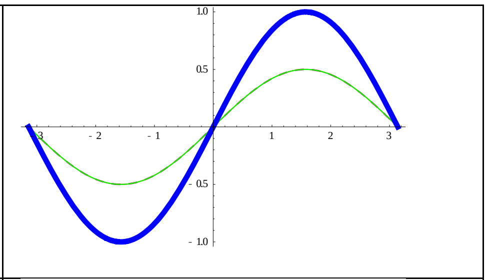
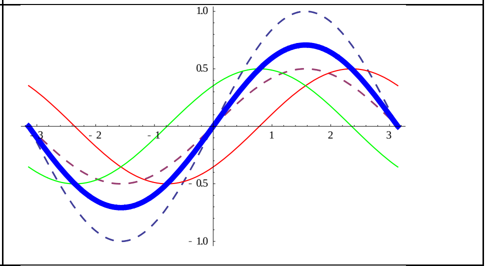
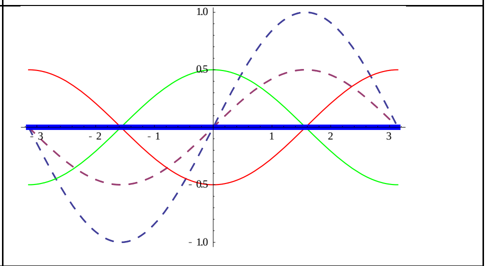
Η λύση d' Alembert είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\sin(x - ct) + \sin(x + ct)]$$

Αυτή μπορεί να ερμηνευθεί διαιρώντας την αρχική μορφή $u(x,0) = \sin x$ σε δύο ίσα μέρη $\frac{\sin x}{2}$ και $\frac{\sin x}{2}$

Η μία μορφή (κόκκινη) θα κινείται με ταχύτητα c προς τα δεξιά ενώ η δεύτερη μορφή (πράσινη) θα κινείται με ταχύτητα c προς τα αριστερά.

Το κύμα της λύσης βρίσκεται προσθέτοντας τα δύο επιμέρους κύματα και είναι σε παχύ μπλε χρώμα στην εικόνα.

$t = 0$	
$t = \frac{\pi}{4}$	
$t = \frac{\pi}{2}$	
$t = \frac{3\pi}{4}$