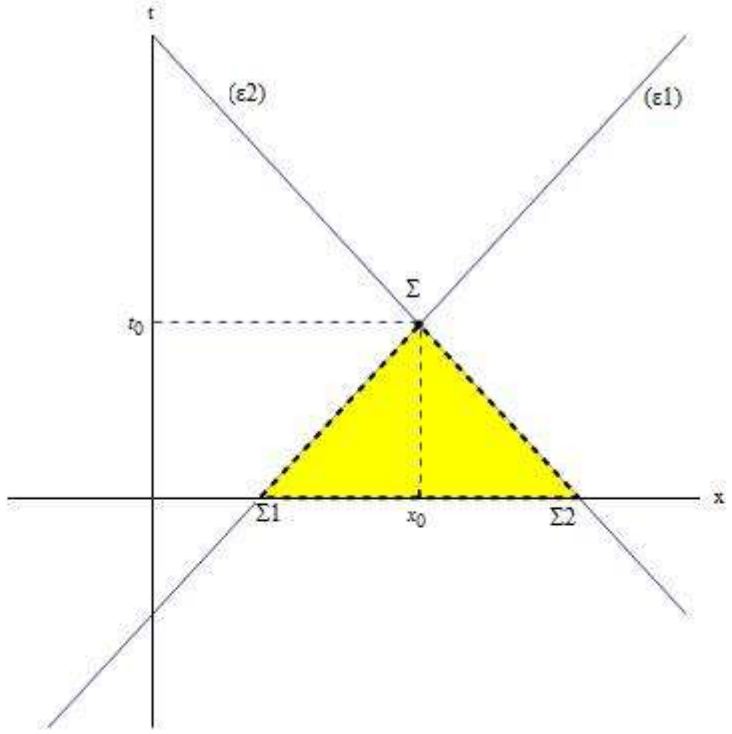
Πεδίο Εξάρτησης και Επιρροής

Θεωρούμε ένα σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$ με $t_0 > 0$ του επιπέδου (x, t) και σχεδιάζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ που διέρχονται από το σημείο Σ.

$(\varepsilon_1) \qquad x - c\,t = x_0 - c\,t_0 = k_1$

$(\varepsilon_2) \qquad x + c\,t = x_0 + c\,t_0 = k_2$

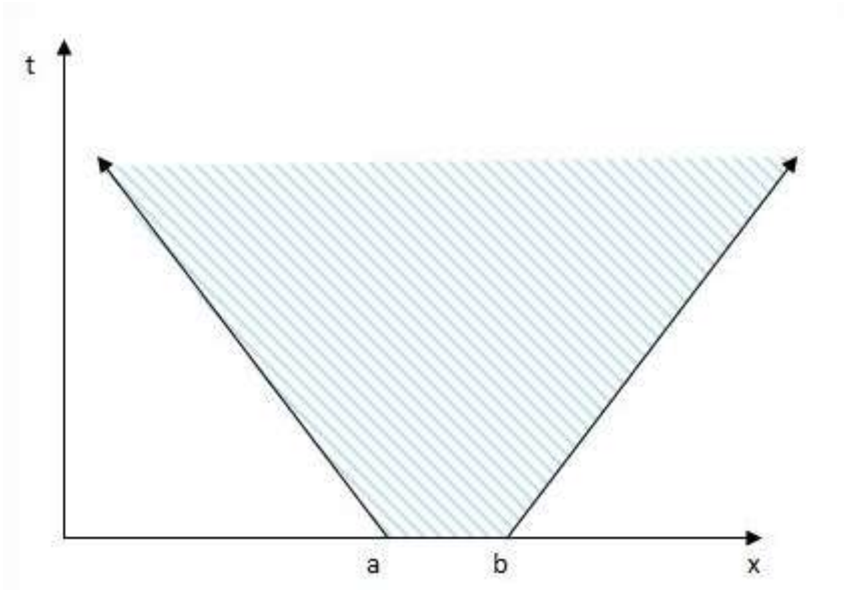
Ονομάζουμε $\Sigma_1(x_0 - c\,t_0, 0)$ και $\Sigma_2(x_0 + c\,t_0, 0)$ τα δύο σημεία τομής των $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ με τον άξονα x.



Όπως φαίνεται από τον τύπο του d' Alembert, η λύση $u(x, t)$ στο σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$ δεν εξαρτάται από όλες τις αρχικές τιμές $u(x, 0)$ και $u_t(x, 0)$, αλλά μόνο από τις τιμές στο διάστημα ανάμεσα στα σημεία $\Sigma_1(x_0 - c\,t_0, 0)$ και $\Sigma_2(x_0 + c\,t_0, 0)$. Το διάστημα αυτό ονομάζεται το **Πεδίο Εξάρτησης** της λύσης στο σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$.

Αν αρχικά το εσωτερικό του διαστήματος $[x_0 - c\,t_0, x_0 + c\,t_0]$ δεν είναι διαταραγμένο, τότε για χρονικό διάστημα $[0, t_0]$ το σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$ θα διατηρείται σε κατάσταση ηρεμίας. **Η διαταραχή δεν μπορεί να διαδοθεί πιο γρήγορα από τη φασική ταχύτητα c.**

Αντίστροφα, μια διαταραχή που συμβαίνει στο διάστημα $[a, b]$ τη στιγμή $t = 0$ επηρεάζει τη λύση μόνο στην περιοχή μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών ευθειών $a - ct \leq x \leq b + ct$.



Η περιοχή αυτή ονομάζεται **Πεδίο Επιρροής** του διαστήματος $[a, b]$.

Παρατηρήσαμε ότι η λύση $u(x, t)$ του Προβλήματος Αρχικών Τιμών εξαρτάται αποκλειστικά από τα αρχικά δεδομένα f, g. Αν αλλάζουν οι συναρτήσεις f, g αλλάζει αυτόματα και η λύση, αλλά ισχύει και το αντίστροφο: διαφορετικές λύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικά αρχικά δεδομένα. Ισχύει δηλαδή η «**αρχή της αιτιότητας**» με βάση την οποία μπορεί να αποδειχθεί ότι το μη φραγμένο ΠΑΤ έχει **μοναδική λύση**.

Η πεπερασμένη ταχύτητα της διάδοσης.

Ας κοιτάξουμε ένα ΠΑΤ με Αρχικές Συνθήκες που είναι μηδενικές έξω από κάποια πεπερασμένη περιοχή: π.χ. την κίνηση ενός κύματος με αρχική μορφή τετραγωνική και μηδενική αρχική ταχύτητα

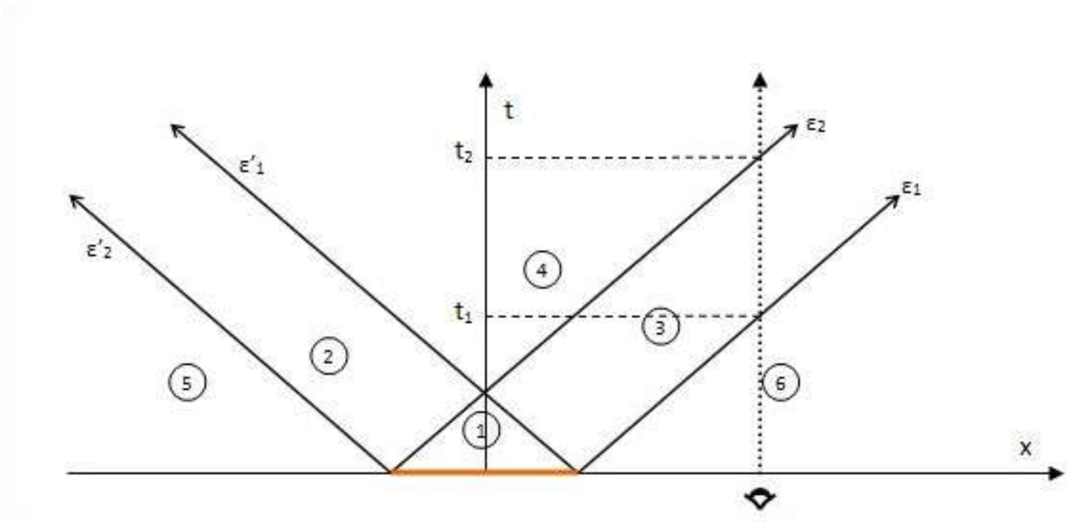
(Ε) $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$

(ΑΣ) $\quad u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

$\quad u_t(x, 0) = g(x) = 0$

Η λύση d' Alembert δίνει:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + \mathrm{f}(x + ct)]$$



$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + \mathrm{f}(x+ct)] =$

$= \frac{1}{2}[1+1] = 1$ για (x,t) στην περιοχή 1

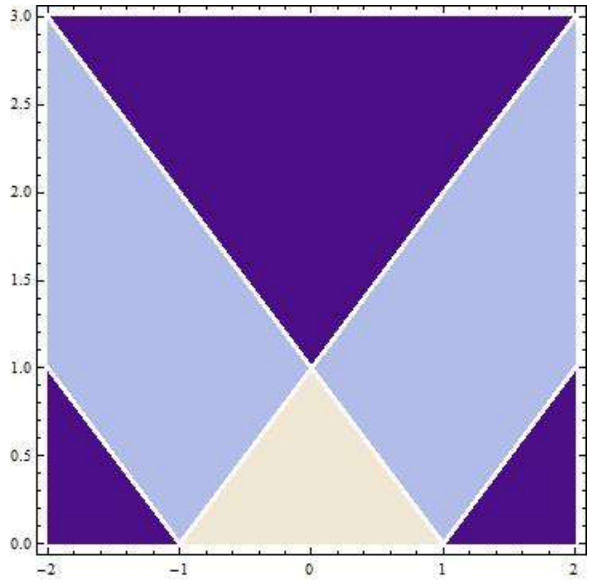
$= \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$ για (x,t) στην περιοχή 2

$= \frac{1}{2}[1+0] = \frac{1}{2}$ για (x,t) στην περιοχή 3

$= \frac{1}{2}[0+0] = 0$ για (x,t) στην περιοχή 4

$= \frac{1}{2}[0+0] = 0$ για (x,t) στις περιοχές 5, 6

Η αρχική συνθήκη είναι ένας ορθογώνιος παλμός με βάση 2 και ύψος 1. Το ορθογώνιο χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη με βάση 2, αλλά ύψος $\frac{1}{2}$. Η μία μορφή ταξιδεύει προς τα αριστερά, η άλλη προς τα δεξιά. Αυτό συνεπάγεται ότι η λύση είναι μηδενική παντού, εκτός μεταξύ των χαρακτηριστικών ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$. Αν τοποθετήσουμε έναν παρατηρητή στο σημείο $\Pi(a,0)$ με $a > 1$ στον θετικό άξονα x, τότε αυτός αρχικά δεν βλέπει κύμα. Μετά παρατηρεί ένα αιχμηρό μέτωπο κύματος και στη συνέχεια ένα κύμα με ύψος $\frac{1}{2}$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}$. Τότε το κύμα εξαφανίζεται απότομα. Αυτή είναι μια συμπεριφορά τυπική των λύσεων Υπερβολικών ΜΔΕ σε **περιττές** χωρικές διαστάσεις. Διαφωτιστικό μπορεί να είναι το διάγραμμα ισοϋψών που ακολουθεί.



Τα αρχικά δεδομένα δεν γίνονται πιο λεία. Το κύμα έχει ένα αυστηρά ορισμένο χρόνο άφιξης και σε περιττές χωρικές διαστάσεις επίσης ένα αυστηρά ορισμένο χρόνο απομάκρυνσης.

Η λύση ενός ΠΑΤ με Αρχικές Συνθήκες που μηδενίζονται έξω από μια πεπερασμένη περιοχή, στο παράδειγμά μας έξω από το διάστημα $[-1,1]$, θα είναι και αυτή μηδέν έξω από μια πεπερασμένη περιοχή που επεκτείνεται όμως με το χρόνο. Ο ρυθμός με τον οποίο αυτή η περιοχή αυξάνεται μπορεί να ερμηνευθεί ως την **πεπερασμένη ταχύτητα της διάδοσης** του φαινομένου που μοντελοποιείται από την εξίσωση κύματος.