Παραδείγματα ΠΑΤ με τη μέθοδο d' Alembert

Κίνηση ενός κύματος με αρχική μορφή ημιτόνου και μηδενική αρχική ταχύτητα

(E) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $\quad -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty$

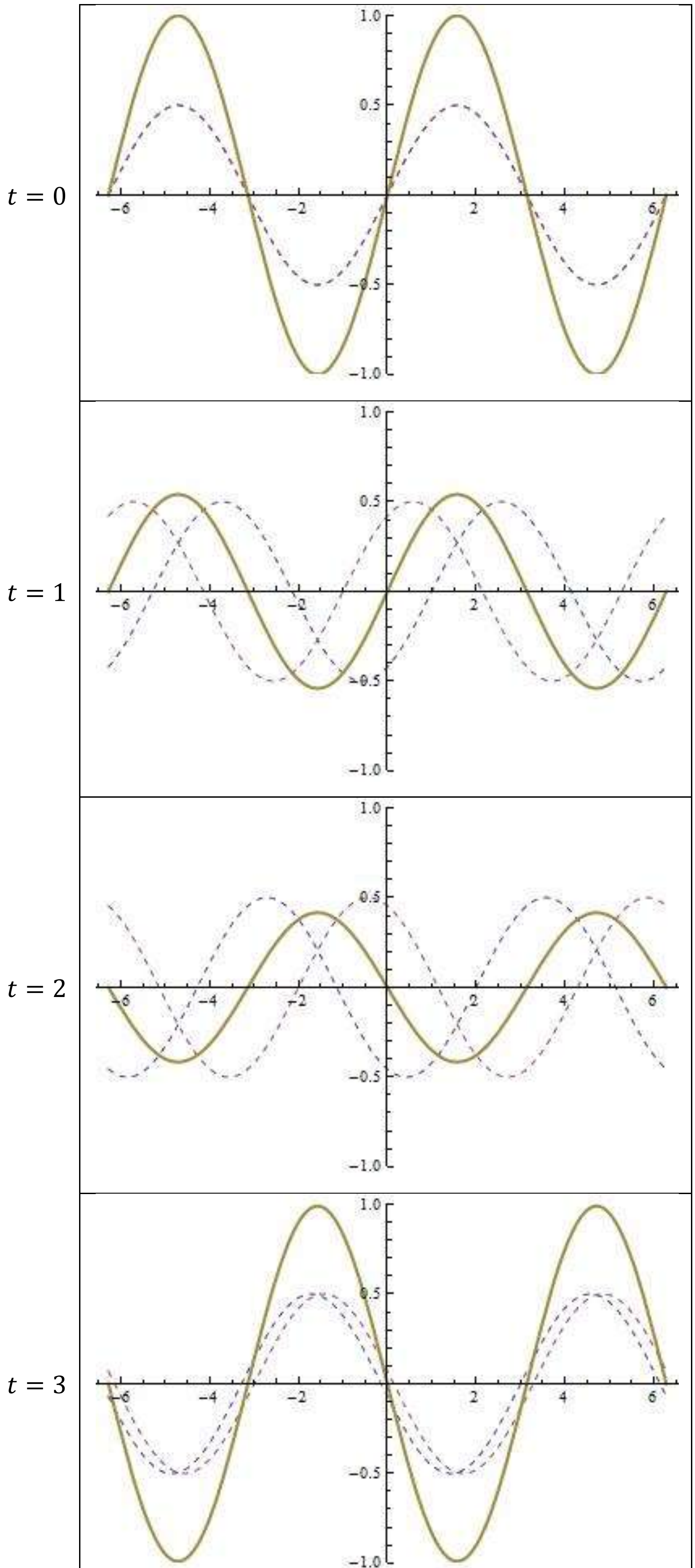
(ΑΣ) $u(x,0) = \mathrm{f(x)} = \sin x$
$u_t(x,0) = g(x) = 0$

Η λύση d' Alembert δίνει:

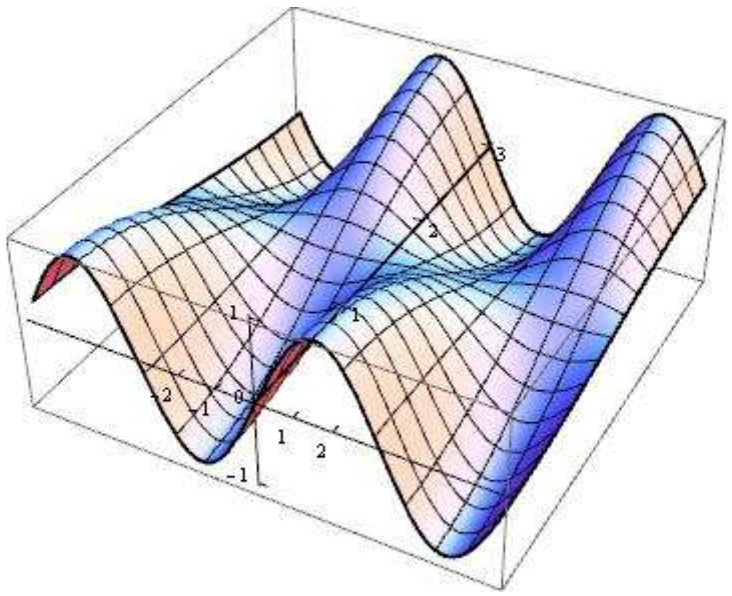
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\sin(x - ct) + \sin(x + ct)]$$

Η λύση ερμηνεύεται ως εξής: διαιρούμε την αρχική μορφή $u(x,0) = \sin x$ σε δύο ίσα μέρη, $\frac{\sin x}{2}$ και ξανά $\frac{\sin x}{2}$. Μετά προσθέτουμε τα δύο κύματα που τρέχουν με ταχύτητα c προς τα αριστερά το ένα, προς τα δεξιά το άλλο.

Η λύση d' Alembert στο σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$ είναι ο μέσος όρος των αρχικών απομακρύνσεων $\sin x$ στα σημεία $\Sigma_1(x_0 - c\, t_0, 0)$ και $\Sigma_2(x_0 + c\, t_0, 0)$ αντίστοιχα, τα οποία βρίσκουμε «ταξιδεύοντας» προς τα πίσω στο χρόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.



Τρισδιάστατη αναπαράσταση:



Κίνηση ενός κύματος με μηδενική αρχική απομάκρυνση αλλά με αρχική ταχύτητα

(Ε) $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$

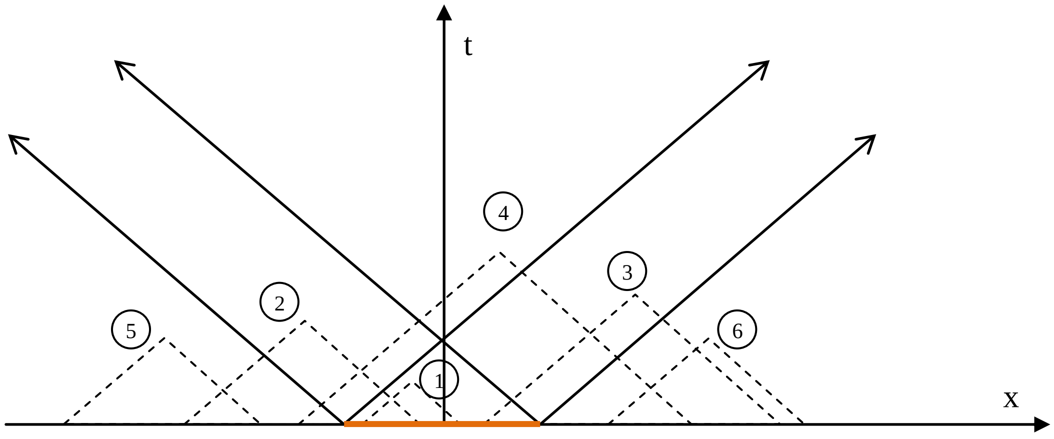
(ΑΣ) $\quad u(x,0) = f(x) = 0$

$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

Η λύση d' Alembert δίνει:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Η λύση u στο σημείο $\Sigma(x_0, t_0)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ολοκλήρωση της αρχικής ταχύτητας μεταξύ των σημείων $\Sigma_1(x_0 - c\,t_0, 0)$ και $\Sigma_2(x_0 + c\,t_0, 0)$ στον αρχικό άξονα $t = 0$. Θέλει προσοχή, γιατί η συνάρτηση g μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιο μέρος του διαστήματος ολοκλήρωσης. Ο καλύτερος τρόπος για να εντοπισθούν τα όρια ολοκλήρωσης είναι να σχεδιάσουμε το πεδίο εξάρτησης για σημεία στις έξι περιοχές ανάμεσα και γύρω από τις χαρακτηριστικές καμπύλες.



$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{\mathrm{x-ct}}^{\mathrm{x+ct}} \mathrm{g(s)ds} =$$

$= \frac{1}{2c}\int_{\mathrm{x-ct}}^{\mathrm{x+ct}} 1\ \mathrm{ds} = \mathrm{t}$ για (x,t) στην περιοχή 1

$= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{\mathrm{x+ct}} 1\ \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{1+x+ct}}{\mathrm{2c}}$ για (x,t) στην περιοχή 2

$= \frac{1}{2c}\int_{\mathrm{x-ct}}^{1} 1\ \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{1-x+ct}}{\mathrm{2c}}$ για (x,t) στην περιοχή 3

$= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{1} 1\ \mathrm{ds} = \frac{1}{\mathrm{c}}$ για (x,t) στην περιοχή 4

$= \frac{1}{2c}\int_{\mathrm{x-ct}}^{\mathrm{x+ct}} 0\ \mathrm{ds} = 0$ για (x,t) στις περιοχές 5, 6