Η Καλή Διατύπωση του ΠΑΤ

Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η λύση d' Alembert (Λ)

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

ικανοποιεί τόσο την κυματική εξίσωση (Ε)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , -\infty < x < \infty \, , 0 < t < \infty$$

όσο τις Αρχικές Συνθήκες (ΑΣ)

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

άρα εξασφαλίσαμε την **ύπαρξη** λύσης.

Θα αποδείξουμε τη **μοναδικότητα** της λύσης (Λ). Η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

και οι Αρχικές Συνθήκες προσδιορίζουν τις συναρτήσεις φ, ψ μοναδικά. Πράγματι, αν είχαμε δύο λύσεις του ΠΑΤ με ίδιες Αρχικές Συνθήκες, οι $u_1 = \varphi_1 + \psi_1$ και $u_2 = \varphi_2 + \psi_2$ αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση $v(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\psi_1 - \psi_2)$ ικανοποιεί το Πρόβλημα με ομογενείς Αρχικές Συνθήκες:

(Ε) $\quad v_{tt} = c^2 v_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$

(ΑΣ) $\quad v(x,0) = 0$, $\quad v_t(x,0) = 0$

Μια προφανής λύση είναι $v(x,t) = 0$ και επειδή οι συναρτήσεις φ, ψ ορίζονται μοναδικά από τις Αρχικές Συνθήκες πρέπει $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, $\psi_1 \equiv \psi_2$, άρα η λύση είναι μοναδική.

Για να αποδείξουμε την **ευστάθεια** της λύσης θεωρούμε δύο λύσεις $u_1(x,t), u_2(x,t)$ με αρχικά δεδομένα $f_1(x), g_1(x)$ και $f_2(x), g_2(x)$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η μεταβολή των αρχικών δεδομένων είναι μικρή, δηλαδή

$$|f_1(x) - f_2(x)| \le \delta, |g_1(x) - g_2(x)| \le \delta, -\infty < x < \infty$$

Υπολογίζουμε την αντίστοιχη μεταβολή της λύσης (Λ):

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = \frac{f_1(x-ct)+f_1(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(s)ds - \frac{f_2(x-ct)+f_2(x+ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_2(s)ds$$

Επομένως:

$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le$

$$\left|\frac{f_1(x-ct)-f_2(x+ct)}{2}\right| + \left|\frac{f_1(x+ct)-f_2(x+ct)}{2}\right| + \frac{1}{2c}\int_{\mathrm{x-ct}}^{\mathrm{x+ct}}|(\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_2)(\mathrm{s})|\mathrm{ds}$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2c}\delta.2ct \leq \delta(1+t)$$

Έτσι για κάθε T, ε, αν ισχύει $\delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$, τότε $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ για $|x| < \infty$, $0 \leq t \leq T$ και το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών σε μη-φραγμένο πεδίο είναι καλά διατυπωμένο κατά Hadamard.