Ενέργεια στην Κυματική Εξίσωση

Θεωρούμε μια άπειρη χορδή με σταθερή γραμμική πυκνότητα ρ και τάση T. Η κυματική εξίσωση που περιγράφει τις ταλαντώσεις της χορδής είναι τότε

$$\rho\, u_{tt} = T\, u_{xx}\,, \qquad -\infty < x < \infty$$

Αφού η εξίσωση περιγράφει τη μηχανική κίνηση της ταλαντευόμενης χορδής, μπορούμε να υπολογίσουμε την **κινητική ενέργεια** που σχετίζεται με την κίνηση της χορδής.

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \rho\, u_t^2\, dx$$

Θα υποθέσουμε ότι οι Αρχικές Τιμές είναι μηδενικές έξω από ένα μεγάλο διάστημα $|x| \leq \mathbb{R}$, ώστε το ολοκλήρωμα της ενέργειας να συγκλίνει χάρη στην πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της κινητικής ενέργειας στον χρόνο παίρνουμε την παράγωγο ως προς τον χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_k = \frac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{\infty} 2u_t u_{tt} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\, u_t u_{tt} dx$$

Με χρήση της κυματικής εξίσωσης βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_k = T\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} dx$$

Εφαρμόζουμε μερική ολοκλήρωση

$$\frac{\partial}{\partial t}E_k = T\left[u_t u_x|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx} u_x dx\right]$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται χάρη στην πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης. Μετασχηματίζοντας βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_k = -\int_{-\infty}^{\infty} T u_{xt} u_x dx = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} T\, u_x^2 dx\right)$$

Ορίζουμε $E_p = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} T\, u_x^2 dx$

οπότε $\frac{\partial}{\partial t}E_k = -\frac{\partial}{\partial t}E_p$ ή

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E_k + E_p\right) = 0$$

Η ποσότητα που **διατηρείται** είναι η **ολική ενέργεια** $\boldsymbol{E}$ της ταλαντευόμενης χορδής

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{\rho}\,\boldsymbol{u}_t^2 + \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_x^2\right)\boldsymbol{dx}$$

Η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει έναν άμεσο τρόπο να αποδείξουμε ότι η λύση ενός ΠΑΤ με γραμμική ΜΔΕ είναι **μοναδική**:

Θεωρούμε το ΠΑΤ

(Ε) $\quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < t < \infty$

(ΑΣ) $\quad \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις του ΠΑΤ, οι u και v.
Η διαφορά τους $w = u - v$ θα επιλύει την ομογενή κυματική εξίσωση με Αρχικές Συνθήκες:

$$\begin{gathered} w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \\ w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = \psi(x) - \psi(x) = 0 \end{gathered}$$

Η ενέργεια της λύσης w τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$E[w](0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(w_t(x,0)\right)^2 + c^2\left(w_x(x,0)\right)^2\right]dx = \mathbf{0}$$

Αυτή η έκφραση της ενέργειας διαφέρει από την παραπάνω ολική ενέργεια E στον συντελεστή $\frac{1}{\rho}$ (γιατί $\frac{T}{\rho} = c^2$) και ονομάζεται **πυκνότητα ενέργειας**. Επομένως είναι και αυτή μια ποσότητα που διατηρείται και έτσι θα είναι μηδέν σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο. Έχουμε λοιπόν:

$$E[w](t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\boldsymbol{w_t(x,t)}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c^2}\left(\boldsymbol{w_x(x,t)}\right)^{\mathbf{2}}\right]dx = \mathbf{0}, \quad \forall t$$

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μη αρνητική, επομένως ο μόνος τρόπος να γίνει το ολοκλήρωμα μηδέν είναι όταν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ομοιόμορφα μηδέν: $\left(w_t(x,t)\right)^2 + c^2\left(w_x(x,t)\right)^2 \equiv 0, \quad \forall x, t$

Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση w παραμένει σταθερή για όλες τις τιμές των x, t, αλλά επειδή $w(x, 0) \equiv 0$ η σταθερή τιμή πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι

$$u(x, t) - v(x, y) = w(x, t) \equiv 0$$

σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση ότι u και v είναι δύο διαφορετικές λύσεις. Συμπεραίνουμε ότι η λύση του ΠΑΤ (Ε) – (ΑΣ) είναι **μοναδική**.

Παρατήρηση:

Για ΠΑΤ με περισσότερες χωρικές διαστάσεις χρησιμοποιούμε μια ανάλογη ενεργειακή μέθοδο για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Οι ενεργειακές μέθοδοι παράγουν από τη ΜΔΕ του ΠΑΤ ένα είδος «ενέργειας» του συστήματος. Αυτή η ενέργεια μπορεί τότε να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε την ύπαρξη και / ή τη μοναδικότητα της λύσης, και αν αυτή εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα.