

Για τη λύση  $u(x,t)$  της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης  $u_{tt} = u_{xx}$  η πυκνότητα ενέργειας ορίζεται ως  $E(x,t) = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)$  και η πυκνότητα ορμής ορίζεται ως

$$P(x,t) = u_t u_x.$$

- a. Να δείξετε ότι  $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}$  και  $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}$ .
- b. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις  $E(x,t)$  και  $P(x,t)$  ικανοποιούν την ίδια κυματική εξίσωση με την  $u$ .
- c. Δώστε φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος του (b) ερωτήματος.

### Λύση

a.  $E(x,t) = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}(2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt}) = u_t u_{tt} + u_x u_{xt}.$

$$P(x,t) = u_t u_x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = u_{tx} u_x + u_t u_{xx} = u_t u_{xx} + u_{tx} u_x \stackrel{(1)}{=} u_t u_{tt} + u_x u_{tx} = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2}(2u_t u_{tx} + 2u_x u_{xx}) = u_t u_{tx} + u_x u_{xx}$$

$$P(x,t) = u_t u_x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = u_{tt} u_x + u_t u_{xt} = u_t u_{tx} + u_x u_{tt} \stackrel{(1)}{=} u_t u_{tx} + u_x u_{xx} = \frac{\partial E}{\partial x}$$

b.  $E_{tt} = \frac{\partial E_t}{\partial t} = \frac{\partial(u_t u_{tt} + u_x u_{xt})}{\partial t} = \frac{\partial(u_t u_{xtx} + u_x u_{xtt})}{\partial t} = u_{tt} u_{xtx} + u_t u_{xtxt} + u_{xt} u_{xt} + u_x u_{xtt}$

$$E_{xx} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial(u_t u_{txx} + u_x u_{xxx})}{\partial x} = \frac{\partial(u_t u_{txx} + u_x u_{ttx})}{\partial x} = u_{tx} u_{txx} + u_t u_{txxx} + u_{xx} u_{tt} + u_x u_{ttx}$$

$$= u_{tt} u_{xx} + u_t u_{xtt} + u_{xt} u_{xt} + u_x u_{xtt} = E_{tt}$$

$$P_{tt} = \frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{\partial(u_t u_{tx} + u_x u_{txx})}{\partial t} = u_{tt} u_{tx} + u_t u_{txt} + u_{xt} u_{txx} + u_x u_{xtt}$$

$$P_{xx} = \frac{\partial P_x}{\partial x} = \frac{\partial(u_t u_{tx} + u_x u_{txx})}{\partial x} = u_{tx} u_{tt} + u_t u_{ttx} + u_{xx} u_{tx} + u_x u_{txx}$$

$$= u_{tt} u_{tx} + u_t u_{txt} + u_{xt} u_{xx} + u_x u_{xtt} = P_{tt}$$

- c. Η ενέργεια και η ορμή της αρχικής διαταραχής διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η μετατόπιση  $u$ .