### Το Μη-Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών με Ομογενείς Αρχικές Τιμές– Η Αρχή Duhamel

Θεωρούμε το **μη-ομογενές** πρόβλημα με **ομογενείς** Αρχικές Συνθήκες:

Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε τη λύση εισάγοντας ένα ομογενές ΠΑΤ στο οποίο όμως κάνει την εμφάνισή της μια νέα παράμετρος .

**Αρχή Duhamel**

Σύμφωνα με την αρχή του Duhamel αναζητούμε τη λύση του μη ομογενούς ΠΑΤ σαν μια συνεχή επαλληλία (ολοκλήρωμα) λύσεων ενός παραμετροποιημένου προβλήματος με μια συνεχή **παράμετρο**  που μεταβάλλεται στο διάστημα . Έστω λοιπόν ότι η λύση του ΠΑΤ είναι της μορφής

 όπου για κάθε παριστάνουμε με τη λύση του σχετιζόμενου **ομογενούς** προβλήματος **παλμού** με **μη-ομογενείς** Αρχικές Συνθήκες:

Πρόκειται δηλαδή για μια οικογένεια προβλημάτων αρχικών τιμών ως προς την παράμετρο , ενώ οι Αρχικές Συνθήκες ορίζονται για .

Παρατήρηση

Αν θέλουμε οι αρχικές συνθήκες να αναφέρονται στην αρχή του χρόνου και όχι στη χρονική στιγμή μετατρέπουμε το πρόβλημα μέσω του μετασχηματισμού μετατόπισης

στο πρόβλημα

Θα αποδείξουμε με αντικατάσταση ότι μια λύση του αρχικού προβλήματος δίνεται από το ολοκλήρωμα

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι και με τον τύπο του Leibniz

Επομένως με δεύτερη παραγώγιση

και παραγώγιση ως προς

Συνδυάζοντας βρίσκουμε:

ή, από τον τρόπο ορισμού της συνάρτησης

 

Ερμηνεία της λύσης:

Η αρχή του Duhamel λέει πώς η λύση του μη-ομογενούς προβλήματος με ομογενείς αρχικές συνθήκες για μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας τη σχετιζόμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των επιμέρους προβλημάτων όπου οι αρχικές συνθήκες δεν περιγράφονται πια τη χρονική στιγμή , αλλά τη στιγμή του παρελθόντος που καθορίζει η τιμή της παραμέτρου για κάθε πρόβλημα της οικογένειας. Κάθε ΠΑΤ της οικογένειας έχει ομογενή ΜΔΕ και λύνεται με τις γνωστές μεθόδους.

Παράδειγμα:

Χρησιμοποιήστε την Αρχή του Duhamel για να λύσετε το μη-ομογενές ΠΑΤ

Λύση:

Σχηματίζουμε το παραμετρικοποιημένο πρόβλημα παλμών:

το οποίο λύνεται με τον γνωστό τύπο του d’ Alembert και δίνει

Επομένως

και

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η είναι μια παράγουσα της βρίσκουμε: