0

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα ξεκινήσουμε με μια επισκόπηση των περιοχών της θεωρίας υπολογισμού που θα παρουσιάσουμε στο βιβλίο αυτό. Μετά από αυτήν την επισκόπηση, θα έχετε τη δυνατότητα να γνωρίσετε ή να θυμηθείτε κάποιες μαθηματικές έννοιες που θα σας χρειαστούν στη συνέχεια.

0.1 ΑΥΤΟΜΑΤΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ, ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Το βιβλίο αυτό επικεντρώνεται σε τρεις καθιερωμένες κεντρικές περιοχές της θεωρίας υπολογισμού: τα αυτόματα, την υπολογισιμότητα, και την πολυπλοκότητα. Οι περιοχές αυτές συνδέονται μεταξύ τους μέσω του ερωτήματος:

Ποιες είναι οι θεμελιώδεις δυνατότητες και ποιοι οι εγγενείς περιορισμοί των υπολογιστών;

Το ερώτημα αυτό χρονολογείται από τη δεκαετία του 1930, όταν οι επιστήμονες της μαθηματικής λογικής ξεκίνησαν να διερευνούν την έννοια του υπολογισμού. Από τότε μέχρι σήμερα, οι τεχνολογικές εξελίξεις έχουν αυξήσει σημαντικά την ικανότητά μας να υπολογίζουμε, και έχουν μετατοπίσει το παραπάνω ερώτημα από τη σφαίρα της θεωρίας στο πεδίο των πρακτικών δραστηριοτήτων.

Σε καθεμία από τις τρεις παραπάνω περιοχές –τα αυτόματα, την υπολογισιμότητα, και την πολυπλοκότητα– το ερώτημα ερμηνεύεται διαφορετικά, και οι απαντήσεις ποικίλλουν ανάλογα με την ερμηνεία. Μετά από το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, θα διερευνήσουμε την κάθε περιοχή στο δικό της, ξεχωριστό μέρος αυτού του βιβλίου. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιάσουμε αυτά τα μέρη με την αντίστροφη σειρά, διότι ξεκινώντας από το τέλος μπορείτε να αντιληφθείτε καλύτερα τους λόγους που υπαγορεύουν τη συγκεκριμένη διάταξη της ύλης του βιβλίου.

0.1.1 ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

Τα προβλήματα που μπορούν να αντιμετωπιστούν μέσω των υπολογιστών είναι διαφόρων ειδών· κάποια από αυτά είναι εύκολα και κάποια δύσκολα. Το πρόβλημα της ταξινόμησης, παραδείγματος χάριν, είναι εύκολο. Έστω ότι θέλετε να διατάξετε ένα σύνολο αριθμών κατ' αύξουσα σειρά. Ακόμη και ένας μικρός υπολογιστής είναι σε θέση να ταξινομήσει ένα εκατομμύριο αριθμούς σχετικά γρήγορα. Από την άλλη πλευρά, θεωρήστε το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού. Έστω π.χ. ότι θέλετε να καταρτίσετε ένα ωρολόγιο πρόγραμμα για τα μαθήματα όλων των τμημάτων του πανεπιστημίου το οποίο να ικανοποιεί κάποιους εύλογους περιορισμούς, όπως λόγου χάριν ότι κανένα ζεύγος μαθημάτων δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί ταυτόχρονα στην ίδια αίθουσα. Αυτό το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού φαίνεται να είναι πολύ δυσκολότερο από το πρόβλημα της ταξινόμησης. Ακόμη και αν έχετε χίλια μόνο μαθήματα, η εύρεση του καλύτερου ωρολόγιου προγράμματος πιθανόν να απαιτεί αιώνες, ακόμη και με έναν υπερυπολογιστή.

Τι είναι αυτό που κάνει κάποια προβλήματα
υπολογιστικώς δύσκολα και κάποια άλλα εύκολα;

Αυτό είναι το κεντρικό ερώτημα της θεωρίας πολυπλοκότητας. Είναι εντυπωσιακό ότι, παρά την εντατική σχετική έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί από το 1965 (περίπου) και μετά, η απάντηση εξακολουθεί να μας είναι άγνωστη. Παρακάτω σε αυτό το βιβλίο θα μελετήσουμε το συναρπαστικό αυτό ερώτημα και κάποιες από τις συνέπειές του.

Ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της θεωρίας πολυπλοκότητας μέχρι σήμερα είναι ότι οι ερευνητές έχουν ανακαλύψει ένα κομψό σύστημα ταξινόμησης των προβλημάτων με βάση την υπολογιστική τους δυσκολία. Το σύστημα αυτό είναι ανάλογο με τον Περιοδικό Πίνακα για την ταξινόμηση των χημικών στοιχείων με βάση τις χημικές τους ιδιότητες. Χρησιμοποιώντας το, μπορούμε να καταστρώσουμε μια μέθοδο η οποία να παρέχει κάποιες ενδείξεις ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογιστικά δύσκολο, ακόμη και όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι όντως είναι.

Όταν αντιμετωπίζουμε κάποιο πρόβλημα που φαίνεται να είναι υπολογιστικά δύσκολο, έχουμε διάφορες επιλογές. Πρώτον, εάν κατανοήσουμε ποιο χαρακτηριστικό του προβλήματος προκαλεί τη δυσκολία, ίσως να καταφέρουμε να το τροποποιήσουμε ώστε το πρόβλημα να επιλύεται ευκολότερα. Δεύτερον, ίσως να μπορούμε να αρκεστούμε σε μια κάπως ατελή λύση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εύρεση λύσεων που απλώς προσεγγίζουν την τέλεια είναι σχετικά εύκολη. Τρίτον, ορισμένα προβλήματα είναι δύσκολα μόνο στη χειρότερη περίπτωση, ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις είναι εύκολα. Ανάλογα με την εφαρμογή, πιθανόν να μας αρκεί μια διαδικασία που, παρ' ότι μερικές φορές είναι αργή, συνήθως εκτελείται γρήγορα. Τέλος, μπορούμε να εξετάσουμε εναλλακτικούς τύπους υπολογισμού, όπως π.χ. ο πιθανοκρατικός, οι οποίοι μπορούν να επιταχύνουν κάποιες εργασίες.

Μια περιοχή εφαρμογών που έχει επηρεαστεί άμεσα από τη θεωρία πολυπλοκότητας είναι ο καθιερωμένος από την αρχαιότητα τομέας της κρυπτογραφίας. Στους περισσότερους τομείς εφαρμογών, τα εύκολα υπολογιστικά προβλήματα είναι προτιμότερα από τα δύσκολα, διότι έχουν μικρότερο κόστος επίλυσης. Αντίθετα, η κρυπτογραφία απαιτεί αποκλειστικώς δύσκολα και όχι εύκολα υπολογιστικά προβλήματα, διότι θα πρέπει να είναι δύσκολο για κάποιον να σπάσει έναν μυστικό κώδικα χωρίς το αντίστοιχο μυστικό κλειδί. Η θεωρία πολυπλοκότητας έχει στρέψει τους κρυπτογράφους προς την κατεύθυνση των δύσκολων υπολογιστικών προβλημάτων, για την επίλυση των οποίων αυτοί έχουν σχεδιάσει καινοτόμους νέους κώδικες.

0.1.2 ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Κατά την πρώτη πεντηκονταετία του εικοστού αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Kurt Gödel, ο Alan Turing, και ο Alonzo Church ανακάλυψαν ότι ορισμένα βασικά προβλήματα δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν με υπολογιστές. Ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι η απόδειξη ή η κατάρριψη μιας μαθηματικής πρότασης. Το έργο αυτό αποτελεί μια από τις τυπικές αρμοδιότητες ενός μαθηματικού. Καθώς εμπίπτει αυστηρά στη σφαίρα των μαθηματικών, θα περίμενε κανείς ότι συνιστά τυπική περίπτωση προβλήματος που μπορεί να επιλυθεί με υπολογιστή. Και όμως, κανένας αλγόριθμος δεν είναι σε θέση να εκτελέσει αυτή την εργασία.

Ένα από τα επακόλουθα αυτού του θεμελιώδους συμπεράσματος ήταν η ανάπτυξη διαφόρων εννοιών σχετικά με τα θεωρητικά μοντέλα των υπολογιστών, τα οποία με τη σειρά τους συνέβαλαν τελικά στην κατασκευή των πραγματικών υπολογιστών.

Οι θεωρίες της υπολογισιμότητας και της πολυπλοκότητας συνδέονται στενά μεταξύ τους. Στη θεωρία υπολογισιμότητας, ο στόχος είναι να χαρακτηρίσουμε τα διάφορα προβλήματα ως επιλύσιμα ή ανεπίλυτα, ενώ η θεωρία πολυπλοκότητας στοχεύει στην ταξινόμηση των επιλύσιμων προβλημάτων σε εύκολα και δύσκολα. Επιπλέον, αρκετές από τις έννοιες που χρησιμοποιούνται στη θεωρία πολυπλοκότητας εισάγονται από τη θεωρία υπολογισιμότητας.

0.1.3 ΘΕΩΡΙΑ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

Η θεωρία αυτομάτων πραγματεύεται τους ορισμούς και τις ιδιότητες των μαθηματικών μοντέλων της υπολογιστικής επιστήμης. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούνται σε αρκετές περιοχές εφαρμογών της επιστήμης υπολογιστών. Παραδείγματος χάριν, το λεγόμενο *πεπερασμένο αυτόματο* χρησιμοποιείται στην επεξεργασία κειμένου, στη σχεδίαση μεταφραστών, και στη σχεδίαση υλισμικού. Ένα άλλο μοντέλο, η λεγόμενη *ασυμφραστική γραμματική*, χρησιμοποιείται στη σχεδίαση γλωσσών προγραμματισμού και στην τεχνητή νοημοσύνη.

Καθώς λοιπόν εισάγει έννοιες σχετικές με άλλες, μη θεωρητικές, περιοχές της επιστήμης υπολογιστών, η θεωρία αυτομάτων είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον πεδίο. Επιπλέον, αποτελεί εξαιρετική αφετηρία για τη γενικότερη μελέτη της υπολογιστικής. Μας επιτρέπει να εξοικειωθούμε με τυπικούς ορισμούς της υπολογιστικής, οι οποίοι θα μας φανούν πολύ χρήσιμοι στις θεωρίες της υπολογισιμότητας και της πολυπλοκότητας, που απαιτούν ένα σαφή ορισμό του *υπολογιστή*.

0.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Όπως σε κάθε κλάδο των μαθηματικών, θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα και εργαλεία που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε, καθώς και τον αντίστοιχο συμβολισμό.

0.2.1 ΣΥΝΟΛΑ

Σύνολο είναι μια ομάδα αντικειμένων τα οποία αναπαρίστανται ως μία οντότητα. Ένα σύνολο μπορεί να περιέχει αντικείμενα οποιουδήποτε τύπου: αριθμούς, σύμβολα, ακόμη και άλλα σύνολα. Τα αντικείμενα που ανήκουν σε κάποιο σύνολο λέγονται ***στοιχεία*** ή ***μέλη*** του συνόλου.

Η τυπική περιγραφή ενός συνόλου μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι να παραθέσουμε τα στοιχεία του μέσα σε άγκιστρα. Έτσι, το σύνολο

$$\{7, 21, 57\}$$

περιέχει τα στοιχεία 7, 21, και 57. Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$ δηλώνουν ότι ένα αντικείμενο ανήκει ή δεν ανήκει, αντίστοιχα, σε κάποιο σύνολο. Παραδείγματος χάριν, γράφουμε $7 \in \{7, 21, 57\}$ και $8 \notin \{7, 21, 57\}$. Για δύο σύνολα A και B, λέμε ότι το A είναι ***υποσύνολο*** του B, και γράφουμε $A \subseteq B$, εάν κάθε μέλος του A είναι και μέλος του B. Εάν το A είναι υποσύνολο του B αλλά όχι ίσο με το B, λέμε ότι είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** του B, και γράφουμε $A \subsetneq B$.

Η σειρά με την οποία παρατίθενται τα στοιχεία ενός συνόλου, όπως και η επανάληψη κάποιων στοιχείων, δεν έχει σημασία. Έτσι, το σύνολο $\{57, 7, 7, 7, 21\}$

συμπίπτει απολύτως με το σύνολο που αναφέραμε αμέσως παραπάνω. Εάν όντως θέλουμε να λάβουμε υπ' όψιν το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου, τότε αποκαλούμε την ομάδα των στοιχείων ***πολυσύνολο***, αντί για σύνολο. Έτσι, οι οντότητες $\{7\}$ και $\{7, 7\}$ διαφέρουν ως πολυσύνολα, αλλά ταυτίζονται ως σύνολα.

Ένα ***άπειρο σύνολο*** περιέχει απειράριθμα στοιχεία. Καθώς είναι αδύνατον να παραθέσουμε ρητά όλα τα στοιχεία ενός άπειρου συνόλου, χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό «...», που σημαίνει ότι «η αλληλουχία συνεχίζεται επ' άπειρον». Έτσι, το σύνολο $\mathcal{N}$ των ***φυσικών αριθμών*** γράφεται ως

$$\{1, 2, 3, \dots\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{Z}$ των ***ακεραίων*** γράφεται ως

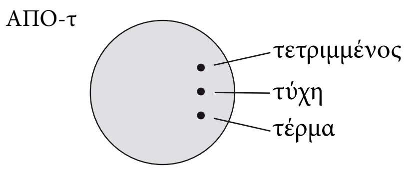
$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Το σύνολο που περιέχει 0 μέλη είναι το ***κενό σύνολο***, και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Όταν θέλουμε να περιγράψουμε ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ικανοποιούν κάποιον κανόνα, γράφουμε $\{n|$ κανόνας για το $n\}$. Έτσι, η έκφραση $\{n|\ n = m^2$ για κάποιο $m \in \mathcal{N}\}$ αναπαριστά το σύνολο όλων των τέλειων τετραγώνων.

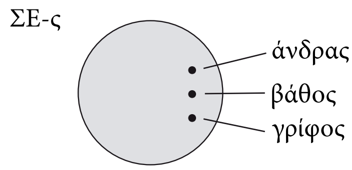
Για δύο δεδομένα σύνολα A και B, η ***ένωση*** των A και B, η οποία συμβολίζεται με $A \cup B$, είναι το σύνολο που παίρνουμε όταν συγκεντρώσουμε όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοιχεία του B σε ένα και μόνο σύνολο. Η ***τομή*** των A και B, η οποία συμβολίζεται με $A \cap B$, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα και στο A και στο B. Το ***συμπλήρωμα*** του A, που συμβολίζεται με $\overline{A}$, είναι το σύνολο όλων των υπό μελέτη αντικειμένων τα οποία *δεν* ανήκουν στο A.

Συχνά στα μαθηματικά μπορούμε να αποσαφηνίσουμε μια έννοια με τη βοήθεια ενός σχήματος. Για τα σύνολα χρησιμοποιούμε ένα είδος σχήματος που λέγεται ***διάγραμμα Venn***. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα, τα σύνολα αναπαρίστανται σαν περιοχές του επιπέδου οι οποίες περικλείονται από κύκλους. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι ορίζουμε ως ΑΠΟ-τ το σύνολο όλων των λέξεων της ελληνικής γλώσσας που αρχίζουν από το γράμμα «τ». Το σύνολο αυτό αναπαρίσταται από τον κύκλο που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Διάφορα μέλη του συνόλου αναπαρίστανται από σημεία εντός του κύκλου.



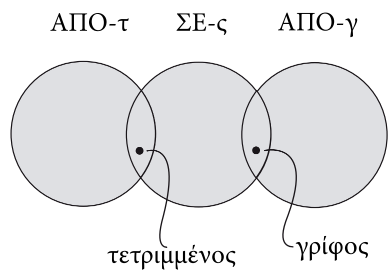
Σχήμα 0.1 Διάγραμμα Venn για το σύνολο των λέξεων της ελληνικής που αρχίζουν από το γράμμα «τ».

Παρομοίως, το σύνολο ΣΕ-ς των λέξεων της ελληνικής γλώσσας που τελειώνουν με το γράμμα «ς» αναπαρίσταται από τον κύκλο του ακόλουθου σχήματος.



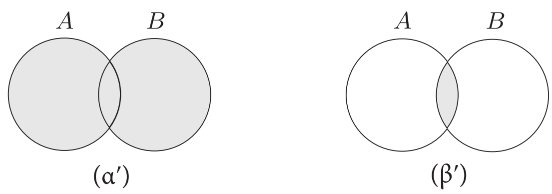
Σχήμα 0.2 Διάγραμμα Venn για το σύνολο των λέξεων της ελληνικής που τελειώνουν με το γράμμα «ς».

Για να αναπαραστήσουμε και τα δύο σύνολα στο ίδιο διάγραμμα Venn, θα πρέπει να σχεδιάσουμε τους αντίστοιχους κύκλους έτσι ώστε να επικαλύπτονται, προκειμένου να υποδείξουμε ότι τα σύνολα διαθέτουν κάποια κοινά μέλη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παραδείγματος χάριν, η λέξη «τετριμμένος» ανήκει και στα δύο σύνολα. Το σχήμα περιλαμβάνει επίσης έναν κύκλο για το σύνολο ΑΠΟ-γ, ο οποίος δεν επικαλύπτεται με τον κύκλο του ΑΠΟ-τ, αφού δεν υπάρχει καμία λέξη που να ανήκει ταυτόχρονα και στα δύο σύνολα.



Σχήμα 0.3 Οι επικαλυπτόμενοι κύκλοι υποδεικνύουν ότι υπάρχουν κοινά στοιχεία.

Τα επόμενα δύο διαγράμματα Venn απεικονίζουν την ένωση και την τομή δύο συνόλων A και B.



Σχήμα 0.4 Διαγράμματα για τα σύνολα (α′) $A \cup B$ και (β′) $A \cap B$.

0.2.2 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΠΛΕΙΑΔΕΣ

Μια ***ακολουθία*** αντικειμένων είναι ένας κατάλογος των αντικειμένων αυτών με κάποια καθορισμένη σειρά. Για να περιγράψουμε μια ακολουθία, συνήθως παραθέτουμε τον σχετικό κατάλογο μέσα σε παρενθέσεις. Παραδείγματος χάριν, η ακολουθία $7, 21, 57$ γράφεται ως

$$(7, 21, 57).$$

Αντίθετα απ' ό,τι στα σύνολα, στις ακολουθίες η σειρά των αντικειμένων έχει σημασία. Έτσι, η ακολουθία $(7, 21, 57)$ είναι διαφορετική από την $(57, 7, 21)$. Ομοίως, ενώ σε ένα σύνολο η επανάληψη στοιχείων δεν παίζει κανένα ρόλο, σε μια ακολουθία έχει σημασία. Έτσι, η ακολουθία $(7, 7, 21, 57)$ είναι διαφορετική και από τις δύο παραπάνω ακολουθίες, ενώ τα σύνολα $\{7, 21, 57\}$ και $\{7, 7, 21, 57\}$ ταυτίζονται.

Όπως και τα σύνολα, οι ακολουθίες μπορεί να είναι πεπερασμένες ή άπειρες. Οι πεπερασμένες ακολουθίες λέγονται συχνά και ***πλειάδες***. Μια ακολουθία με k στοιχεία λέγεται ***k-άδα***. Η ακολουθία $(7, 21, 57)$, π.χ., είναι μια τριάδα. Μια δυάδα λέγεται επίσης ***ζεύγος***.

Τα σύνολα και οι ακολουθίες μπορούν να περιλαμβάνουν ως στοιχεία άλλα σύνολα και ακολουθίες. Παραδείγματος χάριν, το ***δυναμοσύνολο*** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Έτσι, εάν το A είναι το σύνολο $\{0, 1\}$, το δυναμοσύνολό του είναι το $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Παρομοίως, το σύνολο όλων των ζευγών τα οποία έχουν ως μέλη το 0 και το 1 είναι το $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Για δύο σύνολα A και B, το ***καρτεσιανό γινόμενο*** των A και B, το οποίο συμβολίζεται $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των ζευγών που έχουν ως πρώτο τους στοιχείο κάποιο μέλος του A και ως δεύτερο στοιχείο κάποιο μέλος του B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.1

Εάν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{x, y, z\}$, τότε

$$A \times B = \{\, (1, x),\ (1, y),\ (1, z),\ (2, x),\ (2, y),\ (2, z) \,\}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο k συνόλων, $A_1, A_2, \dots, A_k$, το οποίο συμβολίζεται $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Πρόκειται για το σύνολο που αποτελείται από όλες τις k-άδες $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ όπου $a_i \in A_i$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.2

Για τα σύνολα A και B του Παραδείγματος 0.1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \times B \times A = \big\{ &(1, x, 1),\ (1, x, 2),\ (1, y, 1),\ (1, y, 2),\ (1, z, 1),\ (1, z, 2), \\ &(2, x, 1),\ (2, x, 2),\ (2, y, 1),\ (2, y, 2),\ (2, z, 1),\ (2, z, 2) \big\}. \end{aligned}$$

Για το καρτεσιανό γινόμενο ενός συνόλου με τον εαυτό του χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία

$$\overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{k \text{ φορές}} = A^k.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **0.3**

Το σύνολο $\mathcal{N}^2$ είναι το $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Αποτελείται από όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών. Μπορεί να γραφεί και ως $\{(i,j)|\, i,j \geq 1\}$. ■

0.2.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδης για τα μαθηματικά. Με τον όρο ***συνάρτηση*** εννοούμε κάποιο αντικείμενο που ορίζει έναν συσχετισμό εισόδου-εξόδου, δηλαδή που δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο.[1] Σε κάθε συνάρτηση, η ίδια είσοδος παράγει πάντα την ίδια έξοδο. Εάν η f είναι κάποια συνάρτηση που δίνει ως έξοδο την τιμή b όταν δέχεται ως είσοδο την τιμή a, γράφουμε

$$f(a) = b.$$

Μια συνάρτηση λέγεται επίσης ***απεικόνιση*** και, εάν $f(a) = b$, λέμε ότι η f απεικονίζει το a στο b.

Παραδείγματος χάριν, η συνάρτηση «απόλυτης τιμής» *απόλυτο* δέχεται ως είσοδο έναν αριθμό x και επιστρέφει είτε τον ίδιο τον x, εάν ο x είναι θετικός ή μηδέν, είτε τον $-x$, εάν ο x είναι αρνητικός. Έτσι, έχουμε *απόλυτο*$(2) =$ *απόλυτο*$(-2) = 2$. Ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης είναι η πρόσθεση, η οποία γράφεται *άθροισμα*. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο ένα ζεύγος αριθμών και επιστρέφει ως έξοδο το άθροισμά τους.

Το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων μιας συνάρτησης λέγεται ***πεδίο ορισμού*** της συνάρτησης. Αντιστοίχως, το σύνολο από το οποίο επιλέγονται οι έξοδοι της συνάρτησης είναι το ***πεδίο τιμών*** της. Για να δηλώσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το R χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$f\colon D \longrightarrow R.$$

Στην περίπτωση της συνάρτησης *απόλυτο*, και εφόσον εργαζόμαστε με ακεραίους, τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών είναι το $\mathcal{Z}$, οπότε γράφουμε *απόλυτο*$\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$. Στην περίπτωση της συνάρτησης πρόσθεσης για ακεραίους, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο όλων των ζευγών ακεραίων $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ και το πεδίο τιμών είναι το $\mathcal{Z}$, οπότε γράφουμε *άθροισμα*$\colon \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$. Σημειωτέον ότι μια

---

[1] ΣτΕ: Οι όροι «είσοδος» και «έξοδος» χρησιμοποιούνται καταχρηστικά για την περιγραφή των εισαγόμενων δεδομένων και των εξαγόμενων αποτελεσμάτων, αντίστοιχα.

συνάρτηση ενδέχεται να μη χρησιμοποιεί όλα τα στοιχεία του πεδίου τιμών της. Παραδείγματος χάριν, η συνάρτηση *απόλυτο* δεν παίρνει ποτέ την τιμή -1, παρ' ότι $-1 \in \mathcal{Z}$. Όταν μια συνάρτηση συμβαίνει να χρησιμοποιεί όλα τα στοιχεία του πεδίου τιμών, λέμε ότι η συνάρτηση είναι *επί* του πεδίου τιμών (ή ότι αποτελεί ***επιμορφισμό***).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να περιγράψουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Ένας τρόπος είναι να παραθέσουμε μια διαδικασία που με δεδομένη την είσοδο υπολογίζει την έξοδο. Ένας άλλος τρόπος είναι να συντάξουμε έναν πίνακα που να περιλαμβάνει όλες τις δυνατές εισόδους καθώς και την έξοδο για καθεμία από αυτές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.4

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f\colon \{0,1,2,3,4\} \longrightarrow \{0,1,2,3,4\}$:

n	$f(n)$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	0

Η συνάρτηση αυτή προσθέτει στην τιμή εισόδου της το 1 και στη συνέχεια επιστρέφει ως έξοδο το αποτέλεσμα της πρόσθεσης αυτής modulo 5. Υπενθυμίζουμε ότι η πράξη modulo m δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού δια m. Παραδείγματος χάριν, ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού δείχνει τα λεπτά του εικοσιτετραώρου modulo 60. Όταν ασχολούμαστε με «υπολοιπική» αριθμητική, ορίζουμε σύνολα του τύπου $\mathcal{Z}_m = \{0,1,2,\ldots,m-1\}$. Με αυτόν το συμβολισμό, η παραπάνω συνάρτηση f έχει τη μορφή $f\colon \mathcal{Z}_5 \longrightarrow \mathcal{Z}_5$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.5

Όταν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων, η συνάρτηση αναπαρίσταται ενίοτε από έναν πίνακα διπλής εισόδου. Θεωρήστε π.χ. τη συνάρτηση $g\colon \mathcal{Z}_4 \times \mathcal{Z}_4 \longrightarrow \mathcal{Z}_4$ η οποία περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα. Το στοιχείο το οποίο βρίσκεται στη γραμμή που επιγράφεται i και στη στήλη που επιγράφεται j είναι η τιμή $g(i,j)$.

g	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Η g είναι η συνάρτηση της πρόσθεσης modulo 4. ■

Όταν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \cdots \times A_k$, για κάποια σύνολα $A_1, \ldots, A_k$, τότε κάθε είσοδος της f είναι μια k-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Τα a_i λέγονται ***παράμετροι*** ή ***ορίσματα*** της f. Μια συνάρτηση με k παραμέτρους λέγεται ***k-παραμετρική***, ενώ ο αριθμός k ονομάζεται ***παραμετρικότητα*** της συνάρτησης. Αν το k είναι 1, η f έχει μόνο μία παράμετρο και λέγεται ***μονοπαραμετρική***. Αν το k είναι 2, η f είναι μια ***διπαραμετρική*** συνάρτηση. Διάφορες οικείες διπαραμετρικές συναρτήσεις εκφράζονται στον λεγόμενο ***ενθηματικό συμβολισμό***, στον οποίο το σύμβολο της συνάρτησης τοποθετείται ανάμεσα στις δύο παραμέτρους της, αντί του ***προθηματικού συμβολισμού***, στον οποίο το σύμβολο της συνάρτησης προηγείται. Η συνάρτηση *άθροισμα*, π.χ., γράφεται συνήθως ενθηματικά, με το σύμβολο $+$ ανάμεσα στις δύο παραμέτρους της, όπως στην έκφραση $a + b$, αντί της προθηματικής έκφρασης *άθροισμα*(a, b).

Κατηγόρημα ή ***ιδιότητα*** είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ}. Παραδείγματος χάριν, έστω *άρτιος* κάποια ιδιότητα η οποία παίρνει την τιμή ΑΛΗΘΕΣ όταν η είσοδός της είναι άρτιος αριθμός και την τιμή ΨΕΥΔΕΣ όταν η είσοδός της είναι περιττός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε *άρτιος*$(4) =$ ΑΛΗΘΕΣ και *άρτιος*$(5) =$ ΨΕΥΔΕΣ.

Κάθε ιδιότητα με πεδίο ορισμού ένα σύνολο k-άδων $A \times \cdots \times A$ λέγεται ***σχέση*** ή ***k-μελής σχέση (στο A)***. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή των ***διμελών σχέσεων***. Όταν γράφουμε μια έκφραση που περιλαμβάνει κάποια διμελή σχέση, χρησιμοποιούμε συνήθως τον ενθηματικό συμβολισμό. Παραδείγματος χάριν, η σχέση «μικρότερο από» γράφεται συνήθως με το ενθηματικό σύμβολο $<$. Μια άλλη γνωστή διμελής σχέση είναι η «ισότητα», που γράφεται με το ενθηματικό σύμβολο $=$. Γενικά, για κάθε διμελή σχέση R, η δήλωση aRb σημαίνει ότι $aRb =$ ΑΛΗΘΕΣ. Ομοίως, εάν η R είναι μια k-μελής σχέση, η δήλωση $R(a_1, \ldots, a_k)$ σημαίνει ότι $R(a_1, \ldots, a_k) =$ ΑΛΗΘΕΣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.6

Στο παιδικό παιχνίδι πέτρα-ψαλίδι-χαρτί, οι δύο παίκτες διαλέγουν ταυτόχρονα ένα στοιχείο του συνόλου {ΠΕΤΡΑ, ΨΑΛΙΔΙ, ΧΑΡΤΙ} και φανερώνουν την επιλογή τους με μια συμβολική χειρονομία. Αν οι δύο επιλογές συμπίπτουν, το παιχνίδι επαναλαμβάνεται. Αν οι επιλογές διαφέρουν, κερδίζει ένας από τους δύο παίκτες, σύμφωνα με τη σχέση *κερδίζει*:

κερδίζει	ΠΕΤΡΑ	ΨΑΛΙΔΙ	ΧΑΡΤΙ
ΠΕΤΡΑ	ΨΕΥΔΕΣ	ΑΛΗΘΕΣ	ΨΕΥΔΕΣ
ΨΑΛΙΔΙ	ΨΕΥΔΕΣ	ΨΕΥΔΕΣ	ΑΛΗΘΕΣ
ΧΑΡΤΙ	ΑΛΗΘΕΣ	ΨΕΥΔΕΣ	ΨΕΥΔΕΣ

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα, η έκφραση ΨΑΛΙΔΙ *κερδίζει* ΧΑΡΤΙ π.χ. έχει τιμή ΑΛΗΘΕΣ, ενώ η ΧΑΡΤΙ *κερδίζει* ΨΑΛΙΔΙ έχει τιμή ΨΕΥΔΕΣ. ■

Ενίοτε, μας διευκολύνει να περιγράφουμε κάποια κατηγορήματα με σύνολα, αντί συναρτήσεων. Εν γένει, το κατηγόρημα $P\colon D \longrightarrow \{\text{ΑΛΗΘΕΣ}, \text{ΨΕΥΔΕΣ}\}$ μπορεί να γραφεί ως (D, S), όπου $S = \{a \in D|\ P(a) = \text{ΑΛΗΘΕΣ}\}$, ή απλώς ως S, όταν το πεδίο ορισμού D είναι προφανές από τα συμφραζόμενα. Έτσι, η σχέση *κερδίζει* μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\{(\text{ΠΕΤΡΑ, ΨΑΛΙΔΙ}),\ (\text{ΨΑΛΙΔΙ, ΧΑΡΤΙ}),\ (\text{ΧΑΡΤΙ, ΠΕΤΡΑ})\}.$$

Όταν θέλουμε να περιγράψουμε την ισότητα κάποιων αντικειμένων ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, χρησιμοποιούμε συνήθως μια ειδική κατηγορία διμελούς σχέσης, που ονομάζεται ***σχέση ισοδυναμίας***. Συγκεκριμένα, μια διμελής σχέση R αποτελεί σχέση ισοδυναμίας εάν ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:

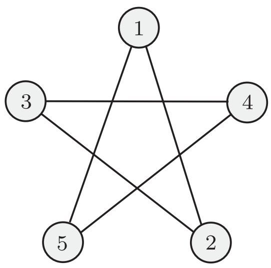
1. η R είναι ***ανακλαστική***: για κάθε x, ισχύει xRx·
2. η R είναι ***συμμετρική***: για κάθε x και y, εάν xRy τότε και yRx· και
3. η R είναι ***μεταβατική***: για κάθε x, y, και z, εάν xRy και yRz τότε και xRz.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **0.7**

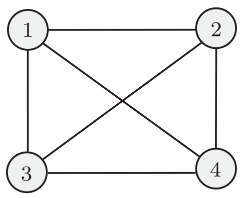
Θεωρήστε τη σχέση ισοδυναμίας $\equiv_7$ στους φυσικούς αριθμούς, που ορίζεται ως εξής: για κάθε $i, j \in \mathcal{N}$, λέμε ότι $i \equiv_7 j$ εάν η διαφορά $i - j$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Η $\equiv_7$ είναι σχέση ισοδυναμίας, καθώς ικανοποιεί και τις τρεις παραπάνω συνθήκες. Πρώτον, είναι ανακλαστική: η διαφορά $i - i = 0$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Δεύτερον, είναι συμμετρική: εάν η διαφορά $i - j$ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε το ίδιο ισχύει και για τη διαφορά $j - i$. Τρίτον, είναι μεταβατική: εάν η διαφορά $i - j$ είναι πολλαπλάσιο του 7 και η διαφορά $j - k$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 7, τότε η διαφορά $i - k = (i - j) + (j - k)$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 7, ως άθροισμα δύο πολλαπλασίων του 7. ■

0.2.4 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ακατεύθυντο γράφημα, ή απλώς ***γράφημα***, είναι ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών οι οποίες συνδέουν μεταξύ τους κάποια από αυτά τα σημεία. Τα σημεία ονομάζονται ***κόμβοι*** ή ***κορυφές***, και οι γραμμές ονομάζονται ***ακμές***. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται δύο ενδεικτικά γραφήματα.



(α′)



(β′)

Σχήμα 0.5 Ενδεικτικά γραφήματα.

Το πλήθος των ακμών που απολήγουν σε κάποιον συγκεκριμένο κόμβο λέγεται ***βαθμός*** του κόμβου αυτού. Στο Σχήμα 0.5(α′) όλοι οι κόμβοι έχουν βαθμό 2, ενώ στο Σχήμα 0.5(β′) όλοι οι κόμβοι έχουν βαθμό 3. Σημειωτέον ότι δύο οποιοιδήποτε κόμβοι δεν επιτρέπεται να συνδέονται μεταξύ τους με περισσότερες από μία ακμές.

Σε ένα γράφημα G το οποίο περιέχει τους κόμβους i και j, το ζεύγος (i, j) αναπαριστά την ακμή που συνδέει τους δύο αυτούς κόμβους. Δεδομένου ότι το γράφημα είναι ακατεύθυντο, η σειρά των i και j δεν παίζει κανένα ρόλο, και επομένως τα ζεύγη (i, j) και (j, i) αναπαριστούν την ίδια ακμή. Εναλλακτικά, αφού η σειρά των κόμβων δεν έχει σημασία, μπορούμε να αναπαριστούμε τις ακμές με σύνολα αντί για ζεύγη, δηλαδή ως $\{i, j\}$.

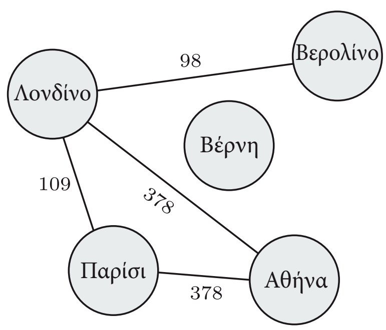
Εάν ονομάσουμε V το σύνολο των κόμβων του G και E το σύνολο των ακμών του, λέμε ότι $G = (V, E)$. Μπορούμε να περιγράψουμε ένα γράφημα μέσω ενός διαγράμματος ή, σε πιο τυπική μορφή, παραθέτοντας ρητά τα σύνολα V και E. Μια τυπική περιγραφή του γραφήματος του Σχήματος 0.5(α′), π.χ., είναι η εξής:

$$\big(\{1, 2, 3, 4, 5\},\ \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 1)\}\big).$$

Η αντίστοιχη περιγραφή του γραφήματος του Σχήματος 0.5(β′) είναι η εξής:

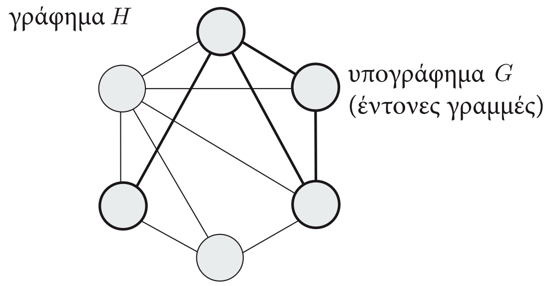
$$\big(\{1, 2, 3, 4\},\ \{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 4)\}\big).$$

Τα γραφήματα χρησιμοποιούνται συχνά για αναπαράσταση δεδομένων. Λόγου χάριν, οι κόμβοι μπορεί να αναπαριστούν πόλεις και οι ακμές αυτοκινητοδρόμους οι οποίοι συνδέουν τις πόλεις αυτές· ή οι κόμβοι μπορεί να αναπαριστούν στοιχεία ηλεκτρικών κυκλωμάτων και οι ακμές τα καλώδια που συνδέουν τα στοιχεία αυτά. Μερικές φορές, χάριν εποπτείας, σημαίνουμε τους κόμβους και/ή τις ακμές ενός γραφήματος με κατάλληλες επιγραφές, οπότε λέμε ότι το αντίστοιχο γράφημα είναι ***ενεπίγραφο***. Στο Σχήμα 0.6 βλέπουμε ένα γράφημα στο οποίο οι κόμβοι αναπαριστούν πόλεις και η επιγραφή κάθε ακμής αντιπροσωπεύει την τιμή (σε ευρώ) του φθηνότερου διαθέσιμου εισιτηρίου για μια απευθείας πτήση ανάμεσα στις δύο αντίστοιχες πόλεις, εφόσον υπάρχει τέτοια πτήση.



Σχήμα 0.6 Φθηνότατα εισιτήρια για απευθείας πτήσεις μεταξύ κάποιων πόλεων.

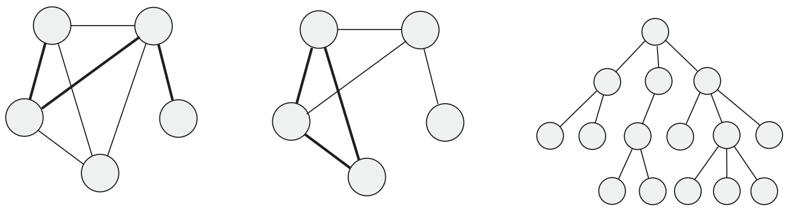
Ένα γράφημα G ονομάζεται ***υπογράφημα*** ενός γραφήματος H εάν οι κόμβοι του G αποτελούν υποσύνολο των κόμβων του H, και οι ακμές του G είναι οι ακμές του H οι οποίες συνδέουν τους αντίστοιχους κόμβους. Στο ακόλουθο σχήμα βλέπουμε ένα γράφημα H και ένα υπογράφημα G του H.



Σχήμα 0.7 Το γράφημα G (έντονες γραμμές) αποτελεί υπογράφημα του H.

Διαδρομή σε ένα γράφημα είναι οποιαδήποτε ακολουθία κόμβων οι οποίοι συνδέονται διαδοχικά μεταξύ τους με ακμές. Εάν κάθε κόμβος μιας διαδρομής εμφανίζεται σε αυτήν μία μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται ***απλή*** (Σχήμα 0.8(α′)). Εάν ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος μιας διαδρομής ταυτίζονται, η διαδρομή λέγεται ***κύκλος***. ***Απλός κύκλος*** είναι κάθε κύκλος που περιέχει τουλάχιστον τρεις κόμβους, από τους οποίους ταυτίζονται μόνο ο πρώτος και ο τελευταίος (Σχήμα 0.8(β′)).

Ένα γράφημα λέγεται ***συνδεδεμένο*** εάν όλοι οι κόμβοι του συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους μέσω κάποιας διαδρομής. Ένα συνδεδεμένο γράφημα που δεν περιέχει απλούς κύκλους ονομάζεται ***δένδρο***. (Σχήμα 0.8(γ′)). Ένα δένδρο ενδέχεται να περιέχει κάποιον ιδιαίτερο, διακεκριμένο κόμβο ο οποίος ονομάζεται ***ριζικός κόμβος*** ή ***ρίζα***. Οι κόμβοι του δένδρου οι οποίοι έχουν βαθμό 1, εκτός από τον ριζικό, ονομάζονται ***καταληκτικοί κόμβοι*** ή ***φύλλα***.

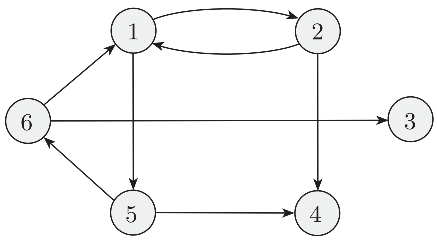


(α′) (β′) (γ′)

Σχήμα 0.8 (α′) Μια απλή διαδρομή σε γράφημα. (β′) Ένας απλός κύκλος σε γράφημα. (γ′) Ένα δένδρο.

Αν ένα γράφημα έχει βέλη αντί για γραμμές, ονομάζεται ***κατευθυντό γράφημα***.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα παράδειγμα κατευθυντού γραφήματος. Το πλήθος των βελών που εκκινούν από έναν κόμβο λέγεται ***βαθμός εξόδου*** του κόμβου· αντίστοιχα, το πλήθος των βελών που απολήγουν στον κόμβο λέγεται ***βαθμός εισόδου*** του κόμβου.



Σχήμα 0.9 Ένα κατευθυντό γράφημα.

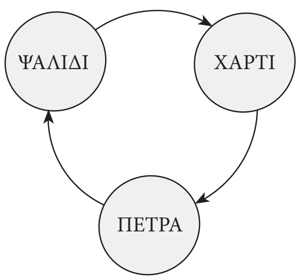
Σε ένα κατευθυντό γράφημα, η ακμή από τον κόμβο i στον κόμβο j αναπαρίσταται από το ζεύγος (i, j). Η τυπική περιγραφή ενός κατευθυντού γραφήματος G είναι το ζεύγος (V, E), όπου V το σύνολο των κόμβων και E το σύνολο των ακμών. Για το γράφημα του Σχήματος 0.9 η τυπική περιγραφή είναι η εξής:

$$\big(\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3)\}\big).$$

Κάθε διαδρομή στην οποία η κατεύθυνση όλων των βελών είναι η ίδια με την κατεύθυνση των βημάτων της διαδρομής λέγεται ***κατευθυντή***. Ένα κατευθυντό γράφημα λέγεται ***ισχυρά συνδεδεμένο*** εάν για οποιουσδήποτε δύο κόμβους και για οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις μεταξύ τους υπάρχει κατευθυντή διαδρομή που συνδέει τους κόμβους με τη συγκεκριμένη κατεύθυνση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.8

Το ακόλουθο κατευθυντό γράφημα αναπαριστά τη σχέση του Παραδείγματος 0.6.



Σχήμα 0.10 Το γράφημα της σχέσης *κερδίζει*.

Τα κατευθυντά γραφήματα αποτελούν έναν εύχρηστο τρόπο αναπαράστασης διμελών σχέσεων. Συγκεκριμένα, κάθε διμελής σχέση R με πεδίο ορισμού $D \times D$ αναπαρίσταται από το ενεπίγραφο γράφημα $G = (D, E)$, όπου $E = \{(x, y) |\ xRy\}$. Στο Σχήμα 0.10 βλέπουμε ένα παράδειγμα τέτοιας αναπαράστασης.

0.2.5 ΛΕΞΕΙΣ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΕΣ

Οι ακολουθίες (τυπογραφικών) χαρακτήρων είναι θεμελιώδη δομικά στοιχεία στην επιστήμη υπολογιστών. Το αλφάβητο επί του οποίου ορίζονται οι ακολουθίες αυτές μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με την εφαρμογή. Για τους σκοπούς του βιβλίου αυτού, ορίζουμε ως ***αλφάβητο*** οποιοδήποτε μη κενό πεπερασμένο σύνολο, και ως ***σύμβολα*** του αλφαβήτου τα μέλη του συνόλου αυτού. Γενικά, θα χρησιμοποιούμε τα κεφαλαία γράμματα Σ και Γ για να αναφερόμαστε σε αλφάβητα, και τη γραμματοσειρά ενιαίου πλάτους (ή Courier, όπως είναι γνωστή) για να αναφερόμαστε στα σύμβολά τους. Παραδείγματα αλφαβήτων είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{\texttt{0}, \texttt{1}\},\\ \Sigma_2 &= \{\mathtt{α}, \mathtt{β}, \mathtt{γ}, \mathtt{δ}, \mathtt{ε}, \mathtt{ζ}, \mathtt{η}, \mathtt{θ}, \mathtt{ι}, \mathtt{κ}, \mathtt{λ}, \mathtt{μ}, \mathtt{ν}, \mathtt{ξ}, \mathtt{ο}, \mathtt{π}, \mathtt{ρ}, \mathtt{σ}, \mathtt{τ}, \mathtt{υ}, \mathtt{φ}, \mathtt{χ}, \mathtt{ψ}, \mathtt{ω}\},\\ \Gamma &= \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}\}.\end{aligned}$$

Λέξη επί ενός αλφαβήτου είναι οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου αυτού. Τα σύμβολα της ακολουθίας γράφονται συνήθως το ένα δίπλα στο άλλο, χωρίς ενδιάμεσα κόμματα. Παραδείγματος χάριν, η ακολουθία `01001` είναι μια λέξη επί του Σ_1, και η ακολουθία `καλημερα` είναι μια λέξη επί του Σ_2. Το ***μήκος*** μιας λέξης w επί ενός αλφαβήτου Σ είναι το πλήθος των συμβόλων που περιέχει, και συμβολίζεται με $|w|$. Η λέξη μηδενικού μήκους είναι η λεγόμενη ***κενή λέξη***, και συμβολίζεται με ε. Ο ρόλος της είναι παρόμοιος με τον ρόλο του 0 στην πρόσθεση. Εάν η λέξη w έχει μήκος n, μπορούμε να γράφουμε $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, όπου κάθε $w_i \in \Sigma$. Η ***ανάστροφη*** της w συμβολίζεται $w^{\mathcal{R}}$, και είναι η λέξη που προκύπτει όταν γράψουμε τα σύμβολα της w με την αντίστροφη σειρά (δηλαδή ως $w_n w_{n-1} \cdots w_1$). Μια λέξη z ονομάζεται ***υπόλεξη*** της w εάν εμφανίζεται αυτούσια (δηλαδή, ως διαδοχή συνεχόμενων συμβόλων) μέσα στην w. Παραδείγματος χάριν, η λέξη `λημ` είναι μια υπόλεξη της λέξης `καλημερα`.

Για δύο δεδομένες λέξεις x και y μήκους m και n, αντίστοιχα, η ***συναρμογή*** των x και y, η οποία συμβολίζεται xy, είναι η λέξη που παίρνουμε όταν συνάψουμε την y στο τέλος της x, ως εξής: $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_n$. Για να συναρμόσουμε περισσότερα από ένα αντίγραφα της ίδιας λέξης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της ύψωσης σε δύναμη:

$$\overbrace{xx\cdots x}^{k \text{ φορές}} = x^k.$$

Η ***λεξικογραφική διάταξη*** λέξεων είναι η συνήθης διάταξη που ακολουθούν τα λεξικά, με τη μόνη διαφορά ότι οι βραχύτερες λέξεις προηγούνται των μακρύτερων. Έτσι, η λεξικογραφική διάταξη όλων των λέξεων επί του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ είναι η ακόλουθη:

$$(\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots).$$

Οποιοδήποτε σύνολο λέξεων ονομάζεται ***γλώσσα***.

0.2.6 ΛΟΓΙΣΜΟΣ BOOLE

Ο ***λογισμός Boole*** είναι ένα μαθηματικό σύστημα δομημένο πάνω στις δύο τιμές ΑΛΗΘΕΣ και ΨΕΥΔΕΣ. Αν και αρχικά αναπτύχθηκε ως επινόηση των καθαρών μαθηματικών, σήμερα θεωρείται το θεμέλιο της ψηφιακής ηλεκτρονικής και της σχεδίασης υπολογιστών. Οι τιμές ΑΛΗΘΕΣ και ΨΕΥΔΕΣ είναι οι λεγόμενες ***λογικές τιμές*** και συχνά αναπαρίστανται με τις τιμές 1 και 0. Οι λογικές τιμές χρησιμοποιούνται σε καταστάσεις όπου υπάρχουν δύο δυνατότητες, όπως στην περίπτωση ενός αγωγού που μπορεί να έχει υψηλή ή χαμηλή τάση, μιας πρότασης που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, ή μιας απάντησης σε κάποια ερώτηση που μπορεί να είναι «ναι» ή «όχι».

Ο χειρισμός των λογικών τιμών γίνεται με ειδικά σχεδιασμένες πράξεις, τις λεγόμενες ***λογικές πράξεις***. Η απλούστερη από αυτές είναι η ***άρνηση***, ή πράξη **ΟΧΙ**, που συμβολίζεται με $\neg$: η άρνηση μιας λογικής τιμής είναι απλώς η άλλη λογική τιμή, δηλαδή $\neg 0 = 1$ και $\neg 1 = 0$. Δύο πιο σύνθετες πράξεις είναι η ***σύζευξη***, ή πράξη **ΚΑΙ**, που συμβολίζεται με $\wedge$, και η ***διάζευξη***, ή πράξη **Ή**, που συμβολίζεται με $\vee$. Η σύζευξη δύο λογικών τιμών δίνει αποτέλεσμα 1 εάν και οι δύο τιμές είναι 1, ενώ η διάζευξη δύο λογικών τιμών δίνει αποτέλεσμα 1 εάν τουλάχιστον μία από τις τιμές είναι 1. Οι ορισμοί αυτοί συνοψίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{lll}
0 \wedge 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0 & \neg 0 = 1 \\
0 \wedge 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 & \neg 1 = 0 \\
1 \wedge 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 & \\
1 \wedge 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1 &
\end{array}$$

Ακριβώς όπως με τις αριθμητικές πράξεις $+$ και $\times$ μπορούμε να κατασκευάζουμε σύνθετες αριθμητικές εκφράσεις, έτσι και με τις λογικές πράξεις μπορούμε, συνδυάζοντας απλές προτάσεις, να κατασκευάζουμε πιο σύνθετες λογικές εκφράσεις. Παραδείγματος χάριν, εάν η λογική τιμή P αναπαριστά το αληθές της πρότασης «ο ήλιος λάμπει» και η λογική τιμή Q αναπαριστά το αληθές της πρότασης «σήμερα είναι Δευτέρα», μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $P \wedge Q$ για να αναπαραστήσουμε το αληθές της πρότασης «ο ήλιος λάμπει *και* σήμερα είναι Δευτέρα» ή, αντίστοιχα, την έκφραση $P \vee Q$ για την ίδια πρόταση με το *ή* στη θέση του *και*. Οι λογικές τιμές που συμμετέχουν σε τέτοιες λογικές πράξεις (όπως οι P και Q στα παραπάνω παραδείγματα) ονομάζονται ***τελεστέοι*** της εκάστοτε πράξης.

Στον λογισμό Boole χρησιμοποιούνται ενίοτε και κάποιες άλλες λογικές πράξεις. Η ***αποκλειστική διάζευξη***, ή πράξη **ΕΙΤΕ**, συμβολίζεται με $\oplus$, και δίνει αποτέλεσμα 1 εάν ένας και μόνο ένας από τους δύο τελεστέους της είναι 1. Η ***ισότητα*** συμβολίζεται με $\leftrightarrow$, και δίνει αποτέλεσμα 1 εάν οι δύο τελεστέοι της έχουν την ίδια τιμή. Τέλος, η ***συνεπαγωγή*** συμβολίζεται με $\rightarrow$, και δίνει αποτέλεσμα 0 εάν ο πρώτος τελεστέος της είναι 1 και ο δεύτερος 0· σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, δίνει αποτέλεσμα 1. Οι ορισμοί αυτοί συνοψίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{lll} 0 \oplus 0 = 0 & 0 \leftrightarrow 0 = 1 & 0 \rightarrow 0 = 1 \\ 0 \oplus 1 = 1 & 0 \leftrightarrow 1 = 0 & 0 \rightarrow 1 = 1 \\ 1 \oplus 0 = 1 & 1 \leftrightarrow 0 = 0 & 1 \rightarrow 0 = 0 \\ 1 \oplus 1 = 0 & 1 \leftrightarrow 1 = 1 & 1 \rightarrow 1 = 1 \end{array}$$

Οι λογικές αυτές πράξεις συνδέονται μεταξύ τους με διάφορες σχέσεις. Μάλιστα, όλες τους μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των πράξεων ΟΧΙ και ΚΑΙ, όπως φαίνεται στις παρακάτω ταυτότητες. Οι δύο εκφράσεις που παρατίθενται σε κάθε γραμμή είναι ισοδύναμες. Σε κάθε γραμμή, η πράξη στα αριστερά εκφράζεται στα δεξιά συναρτήσει της ΟΧΙ, της ΚΑΙ, και των πράξεων των προηγούμενων γραμμών:

$$\begin{array}{rl} P \vee Q & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\ P \rightarrow Q & \neg P \vee Q \\ P \leftrightarrow Q & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\ P \oplus Q & \neg(P \leftrightarrow Q). \end{array}$$

Τον χειρισμό λογικών εκφράσεων διευκολύνει η ***επιμεριστικότητα*** καθεμίας από τις πράξεις Ή και ΚΑΙ ως προς την άλλη. Η ιδιότητα αυτή είναι παρόμοια με την επιμεριστική ιδιότητα του συνηθισμένου πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, σύμφωνα με την οποία $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Η αντίστοιχη ιδιότητα στον λογισμό Boole έχει δύο σκέλη. Η πράξη ΚΑΙ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη Ή:

- η έκφραση $P \wedge (Q \vee R)$ ισούται με την $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

ενώ το ίδιο ισχύει και για την Ή ως προς την ΚΑΙ:

- η έκφραση $P \vee (Q \wedge R)$ ισούται με την $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Σημειωτέον ότι η συμμετρική αυτή ιδιότητα δεν ισχύει στις αριθμητικές πράξεις, δηλαδή η συνήθης πρόσθεση εν γένει δεν είναι επιμεριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό.

0.3 ΟΡΙΣΜΟΙ, ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ, ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Τα θεωρήματα και οι αποδείξεις είναι η καρδιά και η ψυχή των μαθηματικών, ενώ οι ορισμοί είναι το πνεύμα τους. Οι τρεις αυτές οντότητες κατέχουν κεντρική θέση σε κάθε μαθηματικό αντικείμενο, συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας υπο-

ΣΥΝΟΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

ακμή	γραμμή ή βέλος σε ένα γράφημα
ακολουθία	κατάλογος αντικειμένων
αλφάβητο	πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων, που ονομάζονται σύμβολα
απλή διαδρομή	διαδρομή χωρίς επαναλήψεις κόμβων
γλώσσα	σύνολο λέξεων
γράφημα	συλλογή σημείων και γραμμών οι οποίες συνδέουν κάποια σημεία ανά δύο
δένδρο	συνδεδεμένο γράφημα χωρίς απλούς κύκλους
διαδρομή	ακολουθία κόμβων γραφήματος που συνδέονται μεταξύ τους με ακμές
διάζευξη	η λογική πράξη Ή
διμελής σχέση	σχέση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο ζευγών
ένωση	πράξη σε σύνολα η οποία συγκεντρώνει όλα τα στοιχεία σε ένα σύνολο
ζεύγος	κατάλογος δύο αντικειμένων, που ονομάζεται επίσης δυάδα
ιδιότητα	κατηγόρημα
k-άδα	κατάλογος k αντικειμένων
καρτεσιανό γινόμενο	πράξη σε σύνολα η οποία σχηματίζει ένα σύνολο όλων των πλειάδων με στοιχεία από τα αντίστοιχα σύνολα
κατευθυντό γράφημα	συλλογή σημείων και βελών τα οποία συνδέουν κάποια σημεία ανά δύο
κατηγόρημα	συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο {ΑΛΗΘΕΣ, ΨΕΥΔΕΣ}
κενή λέξη	η λέξη μηδενικού μήκους
κενό σύνολο	το σύνολο που δεν έχει κανένα μέλος
κόμβος	σημείο σε γράφημα
κορυφή	κόμβος
κύκλος	διαδρομή που αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο
λέξη	πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων από ένα αλφάβητο
λογική πράξη	πράξη σε λογικές τιμές
λογική τιμή	καθεμία από τις τιμές ΑΛΗΘΕΣ και ΨΕΥΔΕΣ, που συχνά αναπαρίστανται ως 1 και 0 αντίστοιχα
μέλος	αντικείμενο σε ένα σύνολο
όρισμα	παράμετρος
παράμετρος	είσοδος σε συνάρτηση
πεδίο ορισμού	το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων σε μια συνάρτηση
πεδίο τιμών	το σύνολο από όπου αντλούνται οι έξοδοι μιας συνάρτησης
στοιχείο	μέλος
σύζευξη	η λογική πράξη ΚΑΙ
σύμβολο	μέλος ενός αλφαβήτου
συμπλήρωμα	πράξη σε σύνολο η οποία δίνει το σύνολο των στοιχείων που δεν ανήκουν στο αρχικό σύνολο
συναρμογή	πράξη που συνάπτει λέξεις
συνάρτηση	πράξη που μετασχηματίζει εισόδους σε εξόδους
συνδεδεμένο γράφημα	γράφημα στο οποίο όλοι οι κόμβοι συνδέονται ανά δύο με κάποια διαδρομή
σύνολο	ομάδα αντικειμένων
σχέση	κατηγόρημα, συνήθως με πεδίο ορισμού ένα σύνολο k-άδων
σχέση ισοδυναμίας	ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική διμελής σχέση
τομή	πράξη σε σύνολα που επιστρέφει το σύνολο των κοινών στοιχείων

λογισμού.

Οι ***ορισμοί*** περιγράφουν τα αντικείμενα και τις έννοιες που χρησιμοποιούμε. Ένας ορισμός μπορεί να είναι απλός, όπως ο ορισμός του *συνόλου* που δώσαμε προηγουμένως σε αυτό το κεφάλαιο, ή σύνθετος, όπως ο ορισμός της *ασφάλειας* ενός κρυπτοσυστήματος. Σε κάθε περίπτωση, ένας μαθηματικός ορισμός θα πρέπει να είναι ακριβής. Θα πρέπει να καθιστά σαφές ποια αντικείμενα εμπίπτουν στον ορισμό και ποια όχι.

Αφού ορίσουμε διάφορες έννοιες και αντικείμενα, διατυπώνουμε συνήθως κάποιες σχετικές ***μαθηματικές προτάσεις***. Συνήθως μια πρόταση δηλώνει ότι κάποιο αντικείμενο έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα. Ανεξάρτητα από το εάν είναι αληθής ή όχι, η πρόταση θα πρέπει να είναι ακριβής, όπως ένας ορισμός. Δεν θα πρέπει να υπάρχει καμία ασάφεια ως προς τη σημασία της.

Απόδειξη είναι κάποιο πειστικό λογικό επιχείρημα υπέρ της ισχύος μιας πρότασης. Στα μαθηματικά, ένα επιχείρημα θα πρέπει να είναι αδιαφιλονίκητο, δηλαδή πειστικό με την απόλυτη έννοια. Στην καθημερινή ζωή ή στη νομική επιστήμη, δεν υπάρχουν τόσο υψηλές απαιτήσεις όσον αφορά την απόδειξη. Παραδείγματος χάριν, σε μια δίκη για φόνο απαιτείται απλώς απόδειξη «πέραν πάσης λογικής αμφιβολίας». Οι ένορκοι είναι δυνατόν να δεχθούν την αθωότητα ή την ενοχή του κατηγορουμένου βασιζόμενοι απλώς στη βαρύτητα των ενδείξεων. Αντιθέτως, σε μια μαθηματική απόδειξη οι ενδείξεις δεν παίζουν κανένα ρόλο. Ένας μαθηματικός απαιτεί απόδειξη πέραν *πάσης* αμφιβολίας.

Θεώρημα είναι μια μαθηματική πρόταση που έχει αποδειχθεί αληθής. Εν γένει, ο όρος αυτός χρησιμοποιείται μόνο για προτάσεις ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Μερικές φορές, οι προτάσεις που αποδεικνύουμε είναι ενδιαφέρουσες μόνο επειδή βοηθούν στην απόδειξη κάποιας άλλης, πιο σημαντικής πρότασης. Τέτοιες προτάσεις λέγονται ***λήμματα***. Κάποιες άλλες φορές, ένα θεώρημα ή η απόδειξή του μπορεί να μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε απευθείας ότι άλλες, σχετικές προτάσεις είναι αληθείς. Αυτές οι συνακόλουθες προτάσεις λέγονται ***πορίσματα*** του θεωρήματος.

0.3.1 ΕΥΡΕΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

Ο μόνος τρόπος για να αποφανθούμε περί του αληθούς ή ψευδούς μιας μαθηματικής πρότασης είναι μέσω μιας μαθηματικής απόδειξης. Δυστυχώς, η εύρεση αποδείξεων δεν είναι πάντοτε εύκολη. Δεν μπορεί δηλαδή να αναχθεί σε ένα απλό σύνολο κανόνων ή μεθόδων. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια αυτού του μαθήματος, θα σας ζητηθεί να καταστρώσετε αποδείξεις για διάφορες προτάσεις. Δεν θα πρέπει να σας τρομάζει αυτή η προοπτική! Αν και κανείς δεν γνωρίζει κάποια έτοιμη συνταγή παραγωγής αποδείξεων, εντούτοις υπάρχουν κάποιες χρήσιμες γενικές στρατηγικές.

Κατ' αρχάς, διαβάστε προσεκτικά την πρόταση που θέλετε να αποδείξετε. Καταλαβαίνετε όλα τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται; Ξαναγράψτε την πρόταση με δικά σας λόγια. Χωρίστε την σε τμήματα και εξετάστε το καθένα χωριστά.

Σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι αμέσως προφανές ποια είναι τα διάφορα σκέλη μιας σύνθετης πρότασης. Ένα είδος σύνθετης πρότασης που εμφανίζεται συχνά είναι η έκφραση «P εάν και μόνο εάν Q», όπου P και Q μαθηματικές προτάσεις. Η έκφραση αυτή είναι συντομογραφία μιας δισκελούς πρότασης. Το πρώτο σκέλος είναι η πρόταση «P μόνο εάν Q», που σημαίνει «εάν η P είναι αληθής, τότε και η Q είναι αληθής», και γράφεται $P \Rightarrow Q$. Το δεύτερο σκέλος είναι η πρόταση «P εάν Q», που σημαίνει «εάν η Q είναι αληθής, τότε και η P είναι αληθής» και γράφεται $P \Leftarrow Q$. Λέμε ότι το πρώτο σκέλος είναι η ***ορθή κατεύθυνση*** του «εάν και μόνο εάν», ενώ το δεύτερο σκέλος είναι η ***αντίστροφη κατεύθυνση***. Συνολικά, η πρόταση «P εάν και μόνο εάν Q» γράφεται $P \iff Q$, και για να την αποδείξετε θα πρέπει να αποδείξετε και την ορθή και την αντίστροφη κατεύθυνση. Συχνά, η μία από αυτές είναι ευκολότερο να αποδειχθεί απ' ό,τι η άλλη.

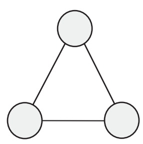
Ένα άλλος είδος σύνθετης πρότασης είναι η δήλωση ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα. Το πρώτο σκέλος της δηλώνει ότι το A είναι υποσύνολο του B, και το δεύτερο ότι το B είναι υποσύνολο του A. Με άλλα λόγια, ένας συνήθης τρόπος για να αποδείξουμε ότι $A = B$ είναι να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του A ανήκει επίσης στο B και ότι κάθε στοιχείο του B ανήκει επίσης στο A.

Όταν λοιπόν θέλετε να αποδείξετε μια πρόταση ή ένα σκέλος της, προσπαθήστε να αντιληφθείτε διαισθητικά, δηλαδή με το ένστικτό σας, τον λόγο για τον οποίο οφείλει η πρόταση να είναι αληθής. Ιδιαίτερα χρήσιμος για αυτόν τον σκοπό είναι ο πειραματισμός με παραδείγματα. Εάν π.χ. η πρόταση δηλώνει ότι όλα τα αντικείμενα κάποιου τύπου έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, διαλέξτε μερικά αντικείμενα αυτού του τύπου και ελέγξτε εάν όντως έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Στη συνέχεια, προσπαθήστε να βρείτε ένα αντικείμενο που να μη διαθέτει την ιδιότητα, δηλαδή ένα ***αντιπαράδειγμα***. Εάν η πρόταση είναι πράγματι αληθής, δεν θα καταφέρετε να βρείτε κανένα τέτοιο αντικείμενο. Εντοπίζοντας τι ακριβώς είναι αυτό που σας δυσκολεύει να βρείτε κάποιο αντιπαράδειγμα, ίσως να κατανοήσετε ευκολότερα γιατί τελικά η πρόταση είναι αληθής.

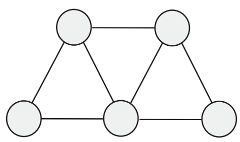
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.9

Έστω ότι θέλετε να αποδείξετε την πρόταση: *σε κάθε γράφημα, το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων είναι άρτιος αριθμός.*

Κατ' αρχάς, επιλέξτε μερικά γραφήματα και παρατηρήστε την πρόταση στην εφαρμογή της. Δύο σχετικά παραδείγματα είναι τα παρακάτω γραφήματα.

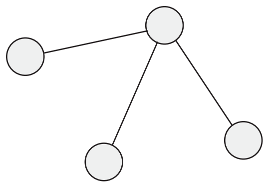


άθροισμα $= 2+2+2$ $= 6$



άθροισμα $= 2+3+4+3+2$ $= 14$

Κατόπιν, προσπαθήστε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα γράφημα στο οποίο το άθροισμα να είναι περιττός αριθμός.



Κάθε φορά που προστίθεται μια ακμή,
το άθροισμα αυξάνεται κατά 2.

Μπορείτε τώρα να αντιληφθείτε γιατί η πρόταση είναι αληθής και πώς να την αποδείξετε; ■

Αν εξακολουθείτε να βρίσκεστε σε αδιέξοδο, δοκιμάστε κάτι ευκολότερο. Προσπαθήστε να αποδείξετε μια ειδική περίπτωση της πρότασης. Παραδείγματος χάριν, εάν πρέπει να αποδείξετε ότι κάποια ιδιότητα είναι αληθής για κάθε $k > 0$, δοκιμάστε πρώτα να την αποδείξετε για $k = 1$. Αν τα καταφέρετε, δοκιμάστε το ίδιο για $k = 2$, κ.ο.κ., μέχρι να είστε σε θέση να κατανοήσετε την πιο γενική περίπτωση. Αν δυσκολευτείτε να αποδείξετε κάποια ειδική περίπτωση, δοκιμάστε μια άλλη ειδική περίπτωση ή ίσως κάποια ειδική περίπτωση της ειδικής περίπτωσης.

Τελικά, όταν θεωρείτε ότι έχετε βρει την απόδειξη, θα πρέπει να την καθαρογράψετε. Μια καλογραμμένη απόδειξη είναι μια ακολουθία από προτάσεις, καθεμία από τις οποίες προκύπτει από εκείνες που προηγούνται στην ακολουθία μέσω μιας απλής αιτιολόγησης. Η προσεκτική σύνταξη μιας απόδειξης είναι σημαντική, αφ' ενός διότι επιτρέπει στον αναγνώστη να την κατανοήσει, και αφ' ετέρου επειδή επιτρέπει σε εσάς τους ίδιους να βεβαιωθείτε ότι δεν περιέχει λάθη.

Μερικές ακόμη υποδείξεις για την εύρεση αποδείξεων:

- *Να είστε υπομονετικοί*. Η εύρεση μιας απόδειξης είναι χρονοβόρα διαδικασία. Αν δεν αντιλαμβάνεστε αμέσως πώς να προχωρήσετε, μην αγχώνεστε. Μερικές φορές οι ερευνητές δουλεύουν για εβδομάδες, ακόμη και για χρόνια, προκειμένου να βρουν μία και μόνο απόδειξη.

- *Ξαναδείτε το*. Εξετάστε την πρόταση που θέλετε να αποδείξετε, σκεφτείτε την για λίγο, αφήστε την, και επιστρέψτε μερικά λεπτά ή μερικές ώρες αργότερα. Δώστε την ευκαιρία στο ασυνείδητο, διαισθητικό τμήμα του νου σας να δουλέψει.

- *Δουλέψτε με τάξη*. Για να αναπτύξετε τη διαίσθησή σας για την πρόταση που προσπαθείτε να αποδείξετε, χρησιμοποιήστε απλά, σαφή σχήματα και/ή απλό, σαφές κείμενο. Η προχειρότητα δυσχεραίνει την προσπάθειά σας να κατανοήσετε την πρόταση βαθύτερα. Παρομοίως, εάν γράφετε κάποια απόδειξη με σκοπό να διαβαστεί από άλλους, η καθαρότητα θα βοηθήσει τον αναγνώστη να παρακολουθήσει τους συλλογισμούς σας.

- *Να είστε λακωνικοί.* Η λακωνικότητα και η περιεκτικότητα σας βοηθά να εκφράζετε γενικές έννοιες χωρίς να χάνεστε στις λεπτομέρειες. Ασφαλώς, ένα σημαντικό εργαλείο στην προσπάθεια να εκφραστείτε συνοπτικά είναι και ο εύστοχος μαθηματικός συμβολισμός. Ωστόσο, μην ξεχνάτε ότι η αιτιολόγηση που θα συμπεριλάβετε τελικά στην απόδειξη θα πρέπει να είναι αρκετά αναλυτική ώστε να επιτρέπει στον αναγνώστη να κατανοήσει εύκολα τι προσπαθείτε να πείτε.

Ως εξάσκηση, ας αποδείξουμε έναν από τους τύπους του DeMorgan.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.10

Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Κατ' αρχάς, είναι το νόημα αυτού του θεωρήματος ξεκάθαρο; Αν δεν καταλαβαίνετε τη σημασία των συμβόλων $\cup$ ή $\cap$, ή της υπεργράμμισης, ανατρέξτε στη σχετική παρουσίαση του συμβολισμού στη σελίδα 5.

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα θα πρέπει να δείξουμε ότι τα δύο σύνολα $\overline{A \cup B}$ και $\overline{A} \cap \overline{B}$ είναι ίσα. Όπως ήδη αναφέρθηκε, ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα είναι να δείξουμε ότι κάθε μέλος του ενός συνόλου ανήκει επίσης στο άλλο, και αντιστρόφως. Προτού διαβάσετε την απόδειξη που ακολουθεί, εξετάστε μερικά παραδείγματα και στη συνέχεια προσπαθήστε να αποδείξετε το θεώρημα μόνοι σας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το θεώρημα δηλώνει ότι δύο σύνολα, τα $\overline{A \cup B}$ και $\overline{A} \cap \overline{B}$, είναι ίσα. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, θα δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ανήκει επίσης στο άλλο σύνολο, και αντιστρόφως.

Έστω x κάποιο στοιχείο του $\overline{A \cup B}$. Τότε, από τον ορισμό του συμπληρώματος συνόλου, έπεται ότι το x δεν ανήκει στο $A \cup B$. Επομένως, από τον ορισμό της ένωσης συνόλων, έπεται ότι το x δεν ανήκει ούτε στο A ούτε στο B. Με άλλα λόγια, το x ανήκει στο $\overline{A}$ και επίσης στο $\overline{B}$. Άρα, από τον ορισμό της τομής δύο συνόλων, έχουμε ότι το x ανήκει στο $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Όσον αφορά το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το x ανήκει στο $\overline{A} \cap \overline{B}$. Άρα, το x ανήκει και στο $\overline{A}$ και στο $\overline{B}$. Επομένως, δεν ανήκει ούτε στο A ούτε στο B. Συνεπώς, δεν ανήκει ούτε και στην ένωση των δύο συνόλων, οπότε ανήκει στο συμπλήρωμα αυτής της ένωσης. Με άλλα λόγια, το x ανήκει στο σύνολο $\overline{A \cup B}$ (ό.έ.δ.). □

Ας αποδείξουμε τώρα την πρόταση του Παραδείγματος 0.9.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.11

Σε κάθε γράφημα, το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων είναι άρτιος αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω γράφημα G. Κάθε ακμή του G συνδέει δύο κόμβους. Άρα, κάθε ακμή συνεισφέρει 1 μονάδα στον βαθμό καθενός από τους κόμβους που συνδέει. Επομένως, κάθε ακμή συνεισφέρει 2 μονάδες στο άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων του γραφήματος. Συνεπώς, εάν το G περιέχει e ακμές, το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων του G ισούται με $2e$, το οποίο είναι άρτιος αριθμός. □

0.4 ΕΙΔΗ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

Κάποια είδη αιτιολόγησης εμφανίζονται τακτικά στις μαθηματικές αποδείξεις. Στην ενότητα αυτή, θα περιγράψουμε μερικά που απαντούν συχνά στη θεωρία υπολογισμού. Σημειώστε ότι μια απόδειξη είναι δυνατόν να περιέχει περισσότερα από ένα είδη αιτιολόγησης, καθώς μπορεί να εμπεριέχει αρκετές επιμέρους αποδείξεις.

0.4.1 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ότι υπάρχουν αντικείμενα κάποιου συγκεκριμένου τύπου. Για να αποδείξουμε ένα τέτοιο θεώρημα, αρκεί να περιγράψουμε πώς μπορεί να κατασκευαστεί ένα τέτοιο αντικείμενο. Η τεχνική αυτή λέγεται ***απόδειξη με κατασκευή***.

Θα χρησιμοποιήσουμε την απόδειξη με κατασκευή για να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα. Ορίζουμε ότι ένα γράφημα είναι ***k-κανονικό*** εάν κάθε κόμβος του έχει βαθμό k.

ΘΕΩΡΗΜΑ **0.12**

Για κάθε άρτιο αριθμό n μεγαλύτερο του 2, υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με n κόμβους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω n ένας άρτιος αριθμός, μεγαλύτερος του 2. Κατασκευάζουμε το γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους ως εξής. Το σύνολο των κόμβων του G είναι το $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ και το σύνολο των ακμών του είναι το

$$\begin{aligned} E = {} & \{\{i, i+1\} \mid \text{για } 0 \leq i \leq n-2\} \,\cup\, \{\{n-1, 0\}\} \\ & \cup \{\{i, i+n/2\} \mid \text{για } 0 \leq i \leq n/2-1\}. \end{aligned}$$

Φανταστείτε τους κόμβους αυτού του γραφήματος τοποθετημένους διαδοχικά κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου. Στην περίπτωση αυτή, οι ακμές που περιγράφονται στην πρώτη γραμμή του ορισμού του E συνδέουν διαδοχικούς κόμβους κατά μήκος του κύκλου. Από την άλλη πλευρά, οι ακμές που περιγράφονται στη δεύτερη γραμμή του ορισμού συνδέουν αντιδιαμετρικούς κόμβους πάνω στον κύκλο. Αυτή η νοερή εικόνα δείχνει με σαφή τρόπο ότι κάθε κόμβος του G έχει βαθμό 3. □

0.4.2 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Ένα συνήθης τρόπος αιτιολόγησης για την απόδειξη ενός θεωρήματος είναι να υποθέσουμε ότι το θεώρημα δεν ισχύει και στη συνέχεια να δείξουμε ότι αυτή η υπόθεση μας οδηγεί σε κάποιο εμφανώς εσφαλμένο συμπέρασμα, που λέγεται *άτοπο*. Όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα, αυτό το είδος αιτιολόγησης χρησιμοποιείται συχνά και στην καθημερινή ζωή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **0.13**

Ο Δημήτρης βλέπει τη Φανή, που έχει μόλις μπει στο σπίτι ερχόμενη από έξω. Παρατηρώντας ότι είναι εντελώς στεγνή, συμπεραίνει ότι έξω δεν βρέχει. Η «απόδειξή» του για το ότι δεν βρέχει είναι ότι, *εάν έβρεχε* (η υπόθεση ότι η πρόταση δεν ισχύει), *η Φανή θα ήταν βρεγμένη* (ένα εμφανώς εσφαλμένο συμπέρασμα). Επομένως, ο Δημήτρης συμπεραίνει ότι δεν βρέχει. ■

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος αριθμός. Ένας αριθμός ονομάζεται ***ρητός*** εάν ισούται με κάποιο κλάσμα m/n, όπου m και n ακέραιοι αριθμοί. Με άλλα λόγια, ρητός αριθμός είναι οποιοσδήποτε *λόγος* δύο ακεραίων, όπως π.χ. ο $2/3$. ***Άρρητος*** είναι κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

ΘΕΩΡΗΜΑ **0.14**

Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Κατ' αρχάς, προκειμένου στη συνέχεια να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, οπότε έχουμε

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

για κάποιους ακέραιους αριθμούς m και n. Εάν υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος του 1 ο οποίος διαιρεί αμφότερους τους m και n, βρίσκουμε τον μεγαλύτερο τέτοιο ακέραιο και διαιρούμε με αυτόν και τους δύο αριθμούς. Μετά από αυτό, η τιμή του κλάσματος δεν έχει αλλάξει και τουλάχιστον ένας από τους m και n είναι περιττός.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με n, παίρνουμε

$$n\sqrt{2} = m.$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε ότι

$$2n^2 = m^2.$$

Αφού ο αριθμός m^2 ισούται με 2 επί τον ακέραιο n^2, έπεται ότι είναι άρτιος. Επομένως, ο m είναι επίσης άρτιος, δεδομένου ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι πάντοτε περιττό. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $m = 2k$ για κάποιον ακέραιο k. Εάν τώρα θέσουμε όπου m το $2k$, έχουμε

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2. \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη δια 2, καταλήγουμε στη σχέση

$$n^2 = 2k^2.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι ο n^2 είναι άρτιος, και επομένως ότι ο n είναι επίσης άρτιος. Άρα, έχουμε αποδείξει ότι τόσο ο m όσο και ο n είναι άρτιοι. Νωρίτερα όμως τους είχαμε απλοποιήσει ώστε να *μην* είναι και οι δύο άρτιοι, όπερ άτοπον. □

0.4.3 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΠΑΓΩΓΗ

Η επαγωγή είναι μια κάπως πιο σύνθετη μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός άπειρου συνόλου έχουν κάποια καθορισμένη ιδιότητα. Παραδείγματος χάριν, μέσω της επαγωγής μπορούμε να δείξουμε ότι μια αριθμητική έκφραση δίνει κάποια ζητούμενη ποσότητα για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της, ή ότι ένα πρόγραμμα λειτουργεί σωστά σε κάθε του βήμα, ή για όλες τις εισόδους του.

Για να αντιληφθούμε πώς δουλεύει η επαγωγική απόδειξη, ας υποθέσουμε ότι το άπειρο σύνολο είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, και ας ονομάσουμε την αποδεικτέα ιδιότητα $\mathcal{P}$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι η πρόταση $\mathcal{P}(k)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό k. Με άλλα λόγια, θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής, και το ίδιο ισχύει για τις $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$, $\mathcal{P}(4)$, και ούτω καθεξής.

Μια επαγωγική απόδειξη αποτελείται από δύο σκέλη: το ***επαγωγικό βήμα*** και την ***εναρκτήρια περίπτωση***. Καθένα από τα δύο σκέλη αποτελεί καθ' εαυτό μια ξεχωριστή απόδειξη. Το επαγωγικό βήμα αποδεικνύει για κάθε $i \geq 1$ ότι, εάν η πρόταση $\mathcal{P}(i)$ είναι αληθής, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\mathcal{P}(i+1)$. Η εναρκτήρια περίπτωση αποδεικνύει ότι η πρόταση $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής.

Άπαξ και αποδείξουμε και τα δύο σκέλη, το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται αυτομάτως, δηλαδή η $\mathcal{P}(i)$ είναι αληθής για κάθε $i \geq 1$. Γιατί; Κατ' αρχάς, γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής, διότι αυτό ακριβώς αποδεικνύει η εναρκτήρια περίπτωση. Δεύτερον, γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{P}(2)$ είναι αληθής, διότι το επαγωγικό βήμα αποδεικνύει ότι εάν η $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής τότε και η $\mathcal{P}(2)$ είναι αληθής, και γνωρίζουμε ήδη ότι η $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής. Τρίτον, γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{P}(3)$ είναι αληθής, διότι το επαγωγικό βήμα αποδεικνύει ότι εάν η $\mathcal{P}(2)$ είναι αληθής τότε και η $\mathcal{P}(3)$ είναι αληθής, και γνωρίζουμε ήδη ότι η $\mathcal{P}(2)$ είναι αληθής. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για όλους τους φυσικούς αριθμούς, αποδεικνύοντας διαδοχικά ότι η $\mathcal{P}(4)$ είναι αληθής, η $\mathcal{P}(5)$ είναι αληθής, και ούτω καθεξής.

Εφόσον καταλάβετε την προηγούμενη παράγραφο, μπορείτε εύκολα να κατανοήσετε και παραλλαγές ή γενικεύσεις της ίδιας ιδέας. Παραδείγματος χάριν, η εναρκτήρια περίπτωση δεν είναι απαραίτητο να αφορά τον αριθμό 1. Μπορεί να αναφέρεται σε οποιαδήποτε αρχική τιμή b. Στην περίπτωση αυτή, η επαγωγική μέθοδος αποδεικνύει ότι η πρόταση $\mathcal{P}(k)$ είναι αληθής για κάθε k μεγαλύτερο ή ίσο του b.

Η παραδοχή που υιοθετούμε στο επαγωγικό βήμα ότι η $\mathcal{P}(i)$ είναι αληθής ονομάζεται ***επαγωγική υπόθεση***. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να υιοθετεί κανείς την ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση ότι η $\mathcal{P}(j)$ είναι αληθής για κάθε $j \leq i$. Αυτό δεν θίγει την ισχύ της επαγωγικής απόδειξης, αφού στο στάδιο όπου θέλουμε να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{P}(i+1)$ είναι αληθής έχουμε ήδη ούτως ή άλλως αποδείξει ότι η $\mathcal{P}(j)$ ισχύει για κάθε $j \leq i$.

Η δομή που ακολουθούμε για τη σύνταξη μιας επαγωγικής απόδειξης έχει ως εξής:

Εναρκτήρια περίπτωση: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $\mathcal{P}(1)$ είναι αληθής.

$$\vdots$$

Επαγωγικό βήμα: Για κάθε $i \geq 1$, υποθέτουμε ότι η πρόταση $\mathcal{P}(i)$ είναι αληθής και χρησιμοποιούμε αυτήν την παραδοχή για να δείξουμε ότι η $\mathcal{P}(i+1)$ είναι επίσης αληθής.

$$\vdots$$

Για παράδειγμα, ας αποδείξουμε με επαγωγή την ορθότητα του τύπου που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η μηνιαία δόση ενός στεγαστικού δανείου. Οι περισσότεροι αγοραστές κατοικίας δανείζονται ένα μέρος των χρημάτων που απαιτούνται για την αγορά και αποπληρώνουν αυτό το δάνειο κατά τη διάρκεια κάποιων ετών. Συνήθως, οι όροι του δανείου προβλέπουν ότι ο δανειολήπτης θα πληρώνει κάθε μήνα ένα σταθερό ποσό για να καλύπτει τους τόκους και τμήμα του αρχικού κεφαλαίου, έτσι ώστε το σύνολο να αποπληρωθεί σε 30 χρόνια. Ο τύπος για τον υπολογισμό αυτού του σταθερού μηνιαίου ποσού περιβάλλεται από κάποιο μυστήριο. Στην πραγματικότητα, όμως, είναι πολύ απλός. Δεδομένου μάλιστα ότι επηρεάζει τη ζωή αρκετών ανθρώπων, πιθανόν να σας ενδιαφέρει να τον γνωρίζετε. Στο θεώρημα που ακολουθεί, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι ο τύπος αυτός είναι ορθός, δίνοντας με τον τρόπο αυτό ένα καλό παράδειγμα εφαρμογής της επαγωγικής μεθόδου.

Κατ' αρχάς, θα πρέπει να αναφέρουμε την ονομασία και τη σημασία διαφόρων μεταβλητών. Έστω P το *κεφάλαιο*, δηλ. το αρχικό ποσό του δανείου. Έστω $I > 0$ το ετήσιο *επιτόκιο* του δανείου, όπου π.χ. $I = 0{,}06$ σημαίνει επιτόκιο 6%, και έστω Y η μηνιαία δόση. Για να διευκολύνουμε την περιγραφή, ορίζουμε με βάση το I μία ακόμη μεταβλητή, τον μηνιαίο πολλαπλασιαστή M, που αντιπροσωπεύει τον ρυθμό με τον οποίον μεταβάλλεται το δάνειο κάθε μήνα εξαιτίας του τόκου. Ακολουθώντας την πάγια τραπεζική τακτική, υποθέτουμε μηνιαίο ανατοκισμό, οπότε $M = 1 + I/12$.

Κάθε μήνα συμβαίνουν οι εξής δύο μεταβολές. Από τη μία, το ποσό του δανείου τείνει να αυξηθεί εξαιτίας του μηνιαίου πολλαπλασιαστή. Από την άλλη, το ποσό τείνει να μειωθεί λόγω της καταβολής της μηνιαίας δόσης. Έστω P_t το ποσό του δανείου που εκκρεμεί μετά από t μήνες. Προφανώς, το ποσό του αρχικού δανείου είναι $P_0 = P$, το ποσό του δανείου μετά από έναν μήνα είναι $P_1 = MP_0 - Y$, το ποσό του δανείου μετά από δύο μήνες είναι $P_2 = MP_1 - Y$, και ούτω καθεξής. Κατόπιν αυτών, μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε, με επαγωγή ως προς t, το θεώρημα για τον τύπο που δίνει την τιμή του P_t.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.15

Για κάθε $t \geq 0$,

$$P_t = PM^t - Y\left(\frac{M^t - 1}{M - 1}\right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με επαγωγή ως προς t.

Εναρκτήρια περίπτωση: Αποδεικνύουμε κατ' αρχάς ότι ο τύπος ισχύει για $t = 0$. Όταν $t = 0$, ο τύπος δίνει

$$P_0 = PM^0 - Y\left(\frac{M^0 - 1}{M - 1}\right).$$

Δεδομένου ότι $M^0 = 1$, μπορούμε να απλοποιήσουμε το δεξιό μέλος, οπότε τελικά έχουμε

$$P_0 = P,$$

το οποίο ισχύει, διότι έχουμε ορίσει το ποσό P_0 ίσο με P. Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι η εναρκτήρια περίπτωση της επαγωγής ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Για κάθε $k \geq 0$ υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για $t = k$, και θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και για $t = k + 1$. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση,

$$P_k = PM^k - Y\left(\frac{M^k - 1}{M - 1}\right).$$

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι

$$P_{k+1} = PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1} - 1}{M - 1}\right).$$

Για τον σκοπό αυτό, εργαζόμαστε ως εξής. Κατ' αρχάς, από τον ορισμό του P_{k+1} μέσω του P_k, γνωρίζουμε ότι

$$P_{k+1} = P_k M - Y.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας το P_k με βάση την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι

$$P_{k+1} = \left[PM^k - Y\left(\frac{M^k-1}{M-1}\right)\right] M - Y.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό επί M και αθροίζοντας τους συντελεστές του Y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1}-M}{M-1}\right) - Y\left(\frac{M-1}{M-1}\right) \\ &= PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1}-1}{M-1}\right). \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος είναι σωστός και για $t = k+1$ (ό.έ.δ.). □

Στο Πρόβλημα 0.14, σας ζητείται να χρησιμοποιήσετε τον παραπάνω τύπο για να υπολογίσετε πραγματικές δόσεις στεγαστικών δανείων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

0.1 Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα, μελετήστε την τυπική περιγραφή του, έτσι ώστε να καταλάβετε ποια είναι τα μέλη του. Στη συνέχεια, δώστε μια σύντομη άτυπη περιγραφή του συνόλου στην καθομιλουμένη.

- **α′.** $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
- **β′.** $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
- **γ′.** $\{n \mid n = 2m$ για κάποιο m στο $\mathcal{N}\}$
- **δ′.** $\{n \mid n = 2m$ για κάποιο m στο $\mathcal{N}$ και $n = 3k$ για κάποιο k στο $\mathcal{N}\}$
- **ε′.** $\{w \mid$ η w είναι μια λέξη από `0` και `1` και ταυτίζεται με την ανάστροφή της$\}$
- **ς′.** $\{n \mid$ ο n είναι ακέραιος και ισχύει $n = n+1\}$

0.2 Δώστε μια τυπική περιγραφή για καθένα από τα παρακάτω σύνολα.

- **α′.** Το σύνολο που περιέχει τους αριθμούς 1, 10, και 100.
- **β′.** Το σύνολο που περιέχει όλους τους ακεραίους που είναι μεγαλύτεροι του 5.
- **γ′.** Το σύνολο που περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 5.
- **δ′.** Το σύνολο που περιέχει τη λέξη `aba`.
- **ε′.** Το σύνολο που περιέχει την κενή λέξη.
- **ς′.** Το σύνολο που δεν περιέχει απολύτως τίποτα.

0.3 Έστω A το σύνολο $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ και B το σύνολο $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

- **α′.** Είναι το A υποσύνολο του B;
- **β′.** Είναι το B υποσύνολο του A;
- **γ′.** Ποιο είναι το σύνολο $A \cup B$;

δ′. Ποιο είναι το σύνολο $A \cap B$;

ε′. Ποιο είναι το σύνολο $A \times B$;

ς′. Ποιο είναι το δυναμοσύνολο του B;

0.4 Εάν το A έχει a στοιχεία και το B έχει b στοιχεία, πόσα στοιχεία περιέχει το σύνολο $A \times B$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

0.5 Εάν C είναι ένα σύνολο με c στοιχεία, πόσα στοιχεία περιέχει το δυναμοσύνολο του C; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

0.6 Έστω X το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και Y το σύνολο $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Η μονοπαραμετρική συνάρτηση $f\colon X \longrightarrow Y$ και η διπαραμετρική συνάρτηση $g\colon X \times Y \longrightarrow Y$ δίνονται από τους παρακάτω πίνακες.

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

α′. Ποια είναι η τιμή $f(2)$;

β′. Ποιο είναι το πεδίο τιμών και το πεδίο ορισμού της f;

γ′. Ποια είναι η τιμή $g(2, 10)$;

δ′. Ποιο είναι το πεδίο τιμών και το πεδίο ορισμού της g;

ε′. Ποια είναι η τιμή $g\big(4, f(4)\big)$;

0.7 Για κάθε σκέλος, αναφέρετε μια σχέση που να ικανοποιεί τις διδόμενες συνθήκες.

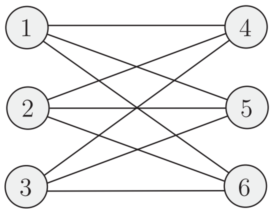
α′. Ανακλαστική και συμμετρική, αλλά όχι μεταβατική.

β′. Ανακλαστική και μεταβατική, αλλά όχι συμμετρική.

γ′. Συμμετρική και μεταβατική, αλλά όχι ανακλαστική.

0.8 Θεωρήστε το ακατεύθυντο γράφημα $G = (V, E)$, όπου το V, το σύνολο των κόμβων, είναι $\{1, 2, 3, 4\}$ και το E, το σύνολο των ακμών, είναι $\{\{1, 2\},\{2, 3\},\{1, 3\},\{2, 4\},\{1, 4\}\}$. Σχεδιάστε το γράφημα G. Ποιος είναι ο βαθμός του κόμβου 1; Ποιος είναι ο βαθμός του κόμβου 3; Δείξτε στο σχήμα σας μια διαδρομή από τον κόμβο 3 μέχρι τον κόμβο 4.

0.9 Περιγράψτε σε τυπική μορφή το ακόλουθο γράφημα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

0.10 Βρείτε το σφάλμα στην ακόλουθη απόδειξη ότι $2 = 1$.
Έστω η εξίσωση $a = b$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί a, οπότε παίρνουμε $a^2 = ab$. Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το b^2 , οπότε έχουμε $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Εν συνεχεία παραγοντοποιούμε κάθε μέλος, $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, και διαιρούμε και τα δύο μέλη με $(a - b)$, οπότε παίρνουμε $a + b = b$. Τέλος, θέτουμε τα a και b ίσα με 1, οπότε καταλήγουμε στη σχέση $2 = 1$.

0.11 Βρείτε το σφάλμα στην ακόλουθη απόδειξη ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.
Ισχυρισμος: Σε κάθε σύνολο h αλόγων, όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.
Αποδειξη: Με επαγωγή ως προς h.
Εναρκτήρια περίπτωση: Για $h = 1$. Σε κάθε σύνολο που περιέχει μόνο 1 άλογο, προφανώς όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.
Επαγωγικό βήμα: Για $k \geq 1$, δεχόμαστε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $h = k$ και θα αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για $h = k + 1$.
Έστω οποιοδήποτε σύνολο $k + 1$ αλόγων, H. Θα δείξουμε ότι όλα τα άλογα σε αυτό το σύνολο έχουν το ίδιο χρώμα. Για τον σκοπό αυτό, αφαιρούμε από το σύνολο ένα άλογο, οπότε παίρνουμε κάποιο σύνολο H_1 με k μόνο άλογα. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, όλα τα άλογα του H_1 έχουν το ίδιο χρώμα. Εν συνεχεία, επαναφέρουμε το άλογο που αφαιρέσαμε και αφαιρούμε κάποιο άλλο άλογο, οπότε παίρνουμε ένα νέο σύνολο H_2. Με το ίδιο σκεπτικό όπως και πριν, όλα τα άλογα του H_2 έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως, όλα τα άλογα του H θα πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα, το κοινό χρώμα των αλόγων του H_1 και του H_2 (ό.έ.δ.).

0.12 Δείξτε ότι οποιοδήποτε γράφημα με 2 ή περισσότερους κόμβους περιέχει δύο ισόβαθμους κόμβους.

$^{\wedge\star}$**0.13** **Θεώρημα του Ramsey.** Έστω γράφημα G. ***Κλίκα*** στο G είναι οποιοδήποτε υπογράφημα στο οποίο όλοι οι κόμβοι συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους με κάποια ακμή. ***Αντικλίκα***, ή ***σύνολο ανεξάρτητων κόμβων***, στο G είναι οποιοδήποτε υπογράφημα στο οποίο δεν υπάρχει κανένα ζεύγος κόμβων που να συνδέονται μεταξύ τους με κάποια ακμή. Δείξτε ότι κάθε γράφημα με n κόμβους περιέχει είτε μια κλίκα είτε μια αντικλίκα με $\frac{1}{2}\log_2 n$ ή περισσότερους κόμβους.

$^{\wedge}$**0.14** Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 0.15, βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό της μηνιαίας δόσης ενός στεγαστικού δανείου συναρτήσει του κεφαλαίου P, του επιτοκίου I, και του πλήθους των δόσεων t. Υποθέστε ότι μετά την καταβολή t δόσεων το ποσό του δανείου μηδενίζεται. Χρησιμοποιήστε τον τύπο για να υπολογίσετε τη μηνιαία δόση σε ευρώ ενός 30-ετούς δανείου με 360 μηνιαίες δόσεις, αρχικό ποσό δανείου €100.000, και ετήσιο επιτόκιο 5%.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

0.13 Ορίστε δύο αρχικά κενούς σωρούς κόμβων, A και B. Στη συνέχεια, ξεκινώντας από το πλήρες γράφημα, επαναλάβετε το εξής: επιλέξτε έναν από τους υπολειπόμενους κόμβους, έστω x, και εάν ο βαθμός του είναι μεγαλύτερος από το ήμισυ του πλήθους των υπολειπόμενων κόμβων, προσθέστε τον x στον σωρό A και διαγράψτε όλους τους κόμβους που δεν συνδέονται με τον x· διαφορετικά, προσθέστε τον x στον σωρό B και διαγράψτε όλους τους κόμβους που συνδέονται με τον x. Συνεχίστε μέχρι να εξαντληθούν όλοι οι κόμβοι. Σε καθένα από αυτά τα βήματα, αφαιρούνται από το γράφημα το πολύ οι μισοί από τους υπολειπόμενους κόμβους του, οπότε για να ολοκληρωθεί η διαδικασία θα χρειαστούν τουλάχιστον $\log_2 n$ βήματα. Σε κάθε βήμα προστίθεται σε έναν από τους σωρούς κάποιος κόμβος, και επομένως στο τέλος της όλης διαδικασίας κάποιος σωρός θα περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2}\log_2 n$ κόμβους. Ο σωρός A περιέχει τους κόμβους μιας κλίκας και ο B τους κόμβους μιας αντικλίκας.

0.14 Θέτοντας $P_t = 0$ και λύνοντας ως προς τη μηνιαία δόση Y, παίρνουμε τον τύπο: $Y = PM^t(M-1)/(M^t-1)$. Για $P =$€100.000, $I = 0{,}05$, και $t = 360$ έχουμε $M = 1+(0{,}05)/12$. Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης, βρίσκουμε ότι το ποσό της μηνιαίας δόσης είναι $Y \approx$ €536,82.